2022数分B1 考试简答

一、简单计算题.

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, 其中 $p>0$.

解 直接写成积分 $\displaystyle\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$ 的Riemann 和并计算积分

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}.$$

点评 也可以用Stolz 定理:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\frac{1}{n\left[(1+\frac{1}{n})^{p+1}-1\right]}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\frac{1}{(p+1)(1+\xi)^p}=\frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

上式分母对$(1+x)^{p+1}$ 用中值定理

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)=f'(\xi)\frac{1}{n}=(p+1)(1+\xi)^p\frac{1}{n},$$

其中$0\le\xi\le\dfrac{1}{n}$, 所以当 $n\to\infty,\xi\to0$.

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

解 被积函数 $\sqrt{1+x^n}$ 在区间$\left[1,1+\dfrac{1}{n}\right]$ 上满足

$$\sqrt{2}=\sqrt{1+1^n}\le\sqrt{1+x^n}\le\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\le\sqrt{1+\mathrm{e}}$$

$$\Longrightarrow\frac{\sqrt{2}}{n}\le\int_1^{1+\frac{1}{n}}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x\le\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}}}{n}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x=0$.

点评 本题的目的是计算极限, 不是积分. 试图算出积分, 或是考虑 $a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ 的单调性, 都比较困难. 最好的办法通过积分进行估计.

3. 由曲线$y=sinx$ $(0\le x\le \frac{\pi}{2})$ 与 x 轴及直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 围成的图形, 在绕 x 轴旋转一周后所得旋转体体积是多少? .

解

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}.$$

4. 求 $\displaystyle\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}&=\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

这里作了变换 $\frac{1}{x}=-\cos\theta$, 并注意上下限的对应.

二、计算不定积分.

1. 求 $\displaystyle\int\frac{3\cos x+4\sin x}{2\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解 设 $I=\displaystyle\int\frac{\cos x}{2\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x,\ J=\int\frac{\sin x}{2\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$, 则

$$2I+J=x+C,$$

$$I-2J=\int\frac{\cos x-2\sin x}{2\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(2\cos x+\sin x)}{2\cos x+\sin x}=\ln|2\cos x+\sin x|+C,$$

$$\Longrightarrow I=\frac{2x}{5}+\frac{1}{5}\ln|2\cos x+\sin x|+C,\quad J=\frac{x}{5}-\frac{1}{5}\ln|2\cos x+\sin x|+C$$

$$\Longrightarrow\int\frac{3\cos x+4\sin x}{2\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x=3I+4J=2x-\ln|2\cos x+\sin x|+C.$$

这里任意常数统一用C 表示.

点评 该题解法不唯一.也可以按如下解法: 设

$$f(x)=2\cos x+\sin x,\Longrightarrow f'(x)=-2\sin x+\cos x,$$

$$\Longrightarrow\int\frac{3\cos x+4\sin x}{2\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2f(x)-f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=2x-\ln|f(x)|+C$$

2. 求 $\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, 其中常数 $a>0$.(本题解法不唯一)

解 令 $x=a\sinh t,\ \ \mathrm{d}x=a\cosh t\,\mathrm{d}t,\ \ t=\sinh^{-1}\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{a}(x+\sqrt{a^2+x^2})$, 则

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= a^2\int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(\cosh 2t+1)\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{a^2}{4}\sinh 2t+\frac{a^2}{2}t+C=\frac{a^2}{2}\sinh t\cosh t+\frac{a^2}{2}t+C\\ &=\frac{x}{2}\sqrt{a^1+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.\end{aligned}$$

三、证明 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2\,\mathrm{d}x>0$.

证明 作变换 $u=x^2$,然后将积分区间为 $[0,\pi]$ 和 $[\pi,2\pi]$, 对$[\pi,2\pi]$ 上积分作平移:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}x+\int_\pi^{2\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u+\pi}}\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^{\pi}\sin u\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}-\frac{1}{2\sqrt{u+\pi}}\right)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

在$(0,\pi)$ 上, $\sin u>0,\ \dfrac{1}{2\sqrt{u}}-\dfrac{1}{2\sqrt{u+\pi}}>0$, 所以$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2\,\mathrm{d}x>0$.

四、设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^2-\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$.

解 显然 $f(0)=0$. 将方程写为

$$f(x)=x^2-x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

上式右边是连续函数变上限积分, 因此可导, 因此左边 $f(x)$ 也可导. 两边对 x 求导

$$f'(x)=2x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-xf(x)+xf(x)=2x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

因此 $f'(0)=0$, 而且导函数 $f'(x)$ 仍是连续函数的变上限积分, 因此连续可导,

$$f''(x)=2-f(x).$$

因此所求 $f(x)$必满足下列常系数非齐次二阶微分方程的定解问题（解唯一）,

$$y''+y=2,\quad y(0)=0,y'(0)=0.$$

第一步求齐次方程 $y''+y=0$ 的通解:由特征方程 $\lambda^2+1=0$ 的根 $\lambda=\pm\mathrm{i}$, 得通解

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x,$$

第二步求非齐次方程 $y''+y=2$ 的特解: 显然 $y_0(x)=2$ 就是特解. 因此 $y''+y=2$ 的通解为

$$y(x)=2+c_1\cos x+c_2\sin x,$$

再由定解条件得 $c_1=-2,\ c_2=0$, 最后得所求的解为 $f(x)=2-2\cos x$.

点评 把变上限的积分方程化为微分方程. 同时微分方程的定解问题是唯一的. 因此通过解微分方程的定解问题就得到积分方程的解.

五、设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间$[a,b]$ 上连续. $g(x)$ 在$[a,b]$ 上非负. 证明: 存在$\xi\in[a,b]$, 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

证明 由 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 推出有最大值 M 和最小值m:

$$m\le f(x)\le M\ \ (x\in[a,b]),$$

$$\Longrightarrow mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x),\ \ (x\in[a,b]).$$

$$\Longrightarrow m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\le M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

若$\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0$, $g(x)$ 连续非负, 推出 $g(x)\equiv0$, 因此结论对任何 ξ 都成立.

若$\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x>0$, 则 $m\le\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\le M$ 由介值定理就可证得结论.

六、设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上Riemann 可积, 证明 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 在$[a,b]$ 上也是Riemann可积的.

证明 因$f(x)$ 在$[a,b]$ 上Riemann 可积, 所以有界:$|f(x)|\le M\ \ (x\in[a,b])$.
$\forall x',x''\in[a,b]$, 由e^u 的连续性,存在介于$f(x')$ 和 $f(x'')$ 中间的值ξ, 使得

$$\left|\mathrm{e}^{f(x')}-\mathrm{e}^{f(x'')}\right|\le\mathrm{e}^{\xi}|f(x')-f(x'')|\le\mathrm{e}^{M}|f(x')-f(x'')|.$$

对任意分割 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, $f(x)$ 和 $\mathrm{e}^{f(x)}$在$[x_{k-1},x_k]$ 上振幅满足

$$\omega_k(\mathrm{e}^f)\le\mathrm{e}^M\omega_k(f),$$

根据$f(x)$ 在$[a,b]$ 上的可积性推出

$$0\le\lim_{|T|\to0}\sum_{k=1}^n\omega_k(\mathrm{e}^f)\le\lim_{|T|\to0}\sum_{k=1}^n\omega_k(f)=0$$

所以 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 在$[a,b]$ 上可积.

点评 本题用到了函数可积性的等价命题, 通过估计$\mathrm{e}^{f(x)}$ 和 $f(x)$ 在分割区间上的振幅证明了$\mathrm{e}^{f(x)}$ 的可积性. 如果通过$f(X)$ 的 Riemann 和来计算$\mathrm{e}^{f(x)}$ 的 Riemann 和是比较困难的.

七、设 $f(x)$ 是$[0,1]$ 上连续函数, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

解

$$n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^1 x^n f(1)\,\mathrm{d}x + n\int_0^1 x^n (f(x)-f(1))\,\mathrm{d}x$$

其中第一个积分满足

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(1)\,\mathrm{d}x = f(1)\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}f(1) = f(1)$$

为了估计第二个积分, 由 $f(x)$ 在$[0,1]$ 上连续得$f(x)$ 有界:$|f(x)|\le M$ $(x\in[0,1])$, 且对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $1-\delta<x<1$ 时, $|f(x)-f(1)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

因此第二个积分满足

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 x^n (f(x)-f(1))\,\mathrm{d}x\right| &\le \int_0^{1-\delta} x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x + \int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|\,\mathrm{d}x\\ &\le 2M\int_0^{1-\delta} x^n\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}\int_{1-\delta}^1 x^n\,\mathrm{d}x\\ &= 2M(1-\delta)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{n}{n+1} \le 2M(1-\delta)^{n+1}+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

令$n\to\infty$, $(1-\delta)^{n+1}\to 0$, 所以存在N, 当 $n>N$ 时$(1-\delta)^{n+1}<\dfrac{\varepsilon}{4M}$, 推出

$$\left|n\int_0^1 x^n (f(x)-f(1))\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

最后得 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1)$.