2022 秋季学期

1 （12 分）填空题

（1）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 6 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$ 则其范数 $\|A\|_1 =$ ________，$\|A\|_\infty =$ ________，谱半径 $=$ ________；若利用 Householder 变换求该矩阵的 QR 分解，则 $Q =$ ________，$R =$ ________。

（2）将线性规划问题

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2,x_3} \; & z = 2x_1 + x_2 - 4x_3 \\ \text{subject to: } & -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 6, \\ & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{无约束。} \end{aligned}$$

化为**标准形式**。

2 （13 分）

在线性空间 $\mathbf{P}_1[x] = span\{1, x\}$ 中，求 $f(x) = \sin x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的：

（1）一次最佳平方逼近多项式（设权函数为 1）；（2）一次最佳一致逼近多项式。

3 （10 分）

给定线性方程组 $Ax = b$，其中 A 可逆，D 为 A 的对角元构成的对角阵，在 Jacobi 迭代法中引入迭代参数 $\omega > 0$，即：

$$x_{k+1} = x_k - \omega D^{-1}(Ax_k - b)$$

称之为 Jacobi 松弛法（简称 JOR 方法），证明：若此时 Jacobi 迭代法收敛且 $0 < \omega < 1$，则 JOR 方法收敛。

4 （15 分）

（1）构造一个次数不高于三次的多项式 $H(x) \in \mathcal{P}_3[x]$，使之满足

$$H(x_i) = f(x_i), H'(x_i) = f'(x_i), i = 0, 1$$

其中 $a \le x_0 \le x_1 \le b$。

（2）给定节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的函数 $f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 及一阶导数值 $f'(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$，设 $H(x) \in \mathcal{P}_{2n+1}[x]$ 为相应的 Hermite 插值多项式，即 $H(x)$ 满足 $H(x_i) = f(x_i), H'(x_i) = f'(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$ 且 $f(x)$ 充分光滑，

证明：此时插值误差 $R(x) = f(x) - H(x)$ 满足

$$R(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi(x))}{(2n+2)!}[w_{n+1}(x)]^2,$$

其中 $w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \xi(x) \in (x_0, x_n)$。(注：<u>不可利用差商与导数的关系式</u>)

5 （10 分）

考虑用 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 求非线性函数 f(x) 的单重根 s。其中 $\varphi(x) = x - a(x)f(x) + b(x)f^2(x)$。试确定一组 $a(x)$ 和 $b(x)$ 使得该迭代公式在根 s 附近至少是三阶收敛的。

6 （15 分）

（1）用 LU 分解求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=-1 \\ 2x_1+4x_2+6x_3=0 \\ 3x_1+5x_2-2x_3=10 \end{cases}$ ，其中 L 是单位下三角矩阵，U 是上三角矩阵。

（2）设 $A=(a_{ij}\in R^{n\times n}$ 是严格对角占优矩阵, 即 A 满足

$$|a_{kk}|>\sum j=1,j\neq k^n|a_{jk}|,k=1,2,\cdots,n,$$

证明：对 $Ax=b$ 用 Gauss 顺序消元法得到的上三角阵方程组与用 Gauss 列主元消元法得到的上三角阵方程组是完全相同的。

7 （15 分）

设 $f(x)$ 充分可微，设有数值积分公式

$$\int_{-2}^{2}\omega(x)f(x)dx=Af(x_0)+Bf(x_1)$$

其中 $\omega(x)=(4-x^2)^{-0.5}$。

（1）试确定常数 A,B,x_0,x_1 使其达到最高阶 的代数精度；给出此时的代数精度。

（2）试求第一问中数值积分公式的截断误差。

8 （10 分）

设二元函数 $f(x,y)$ 在 $a\leq x\leq b,-\infty<y<\infty$ 上连续，且对 y 满足 Lipschitz 条件，即 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|$，设常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=f(x,y), \\ y(a)=y_0. \end{cases} \quad a\leq x\leq b$$

的精确解为 $y(x)\in C^2[a,b]$，且满足 $|y''(x)|\leq M,\forall x\in[a,b]$（这里的 $M>0$ 为常数）。对区间 $[a,b]$ 作等距划分，记步长为 $h=\frac{b-a}{n},x_i=a+ih,i=0,1,\cdots,n,n\geq 2$ 为正整数。考虑用向前 Euler 公式解此初值问题，记 y_i 为 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 处的数值解。

（1）写出向前 Euler 公式；

（2）若不考虑计算机舍入误差，试证明：

$$|y(x_n) - y_n| \le \frac{hM}{2L}(e^{L(b-a)} - 1).$$