原子的结构

- 电子的发现

1894年，J. Stoney命名阴极射线的粒子为电子electron

1897年， 英国J. Thomson测量电子荷质比

1899年， J. Thomson利用T. Wilson发明的云室测量电子电荷

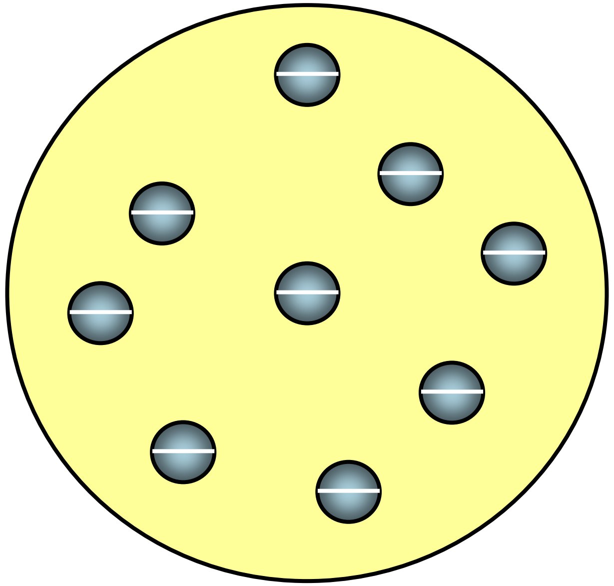
Sir Joseph John Thomson

- Thomson认为

❶正电荷均匀分布在一个半径～ 10^{-10} 米的球内，

❷电子镶嵌其中

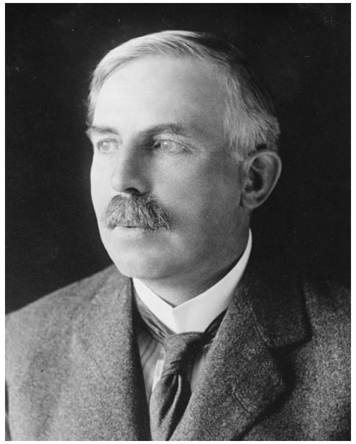
$$m_e = \frac{1}{1836} m_p$$



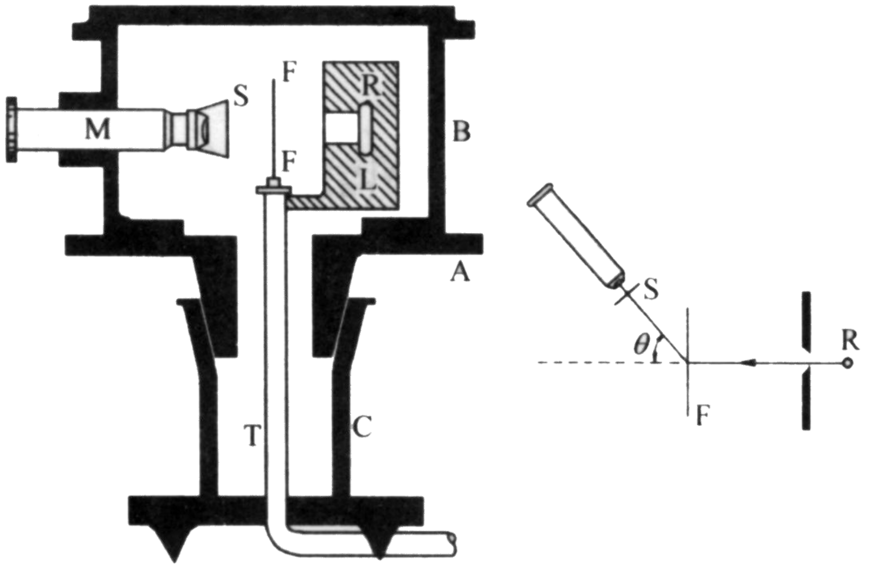
葡萄干布丁模型

散射装置

- 1896年Antoine Henri Becquerel发现α射线
- E. Rutherford确认α粒子是He^{++}
- 卢瑟福发明用荧光屏的发光次数来计数α粒子
- 卢瑟福用α粒子碰撞靶原子，检验原子模型



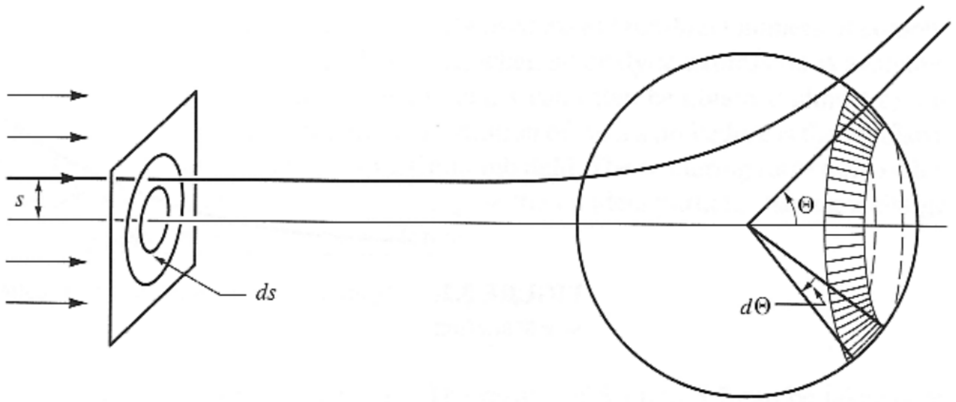
Ernest Rutherford



(a) 侧视图　　(b) 俯视图

图中 R 是放射源,F 是散射箔,S 是闪烁屏,圆形金属匣 B 固定于附有刻度的圆盘 A 上,A 和 B 可在光滑的套轴 C 上转动,R 与 F 装于与匣无关的管 T 上,整个匣子由 T 管抽空,在 S 屏上的闪烁计数通过显微镜 M 观察.

碰撞截面



- 微观粒子的运动轨迹不可见
- 实验中能做到的是使用大量速度（几乎）相同的粒子构成的束流去碰撞靶标
- 能够测量被散射粒子的方向

- 在距离靶标无穷远处取一平面，该平面以入射束流方向为法向
- 粒子的初始状态，可用入射粒子轨道与平面的交点表示
- 对此平面取极坐标系(b,ϕ)，测度（面积）为

$$d\sigma = b \cdot db \cdot d\phi$$

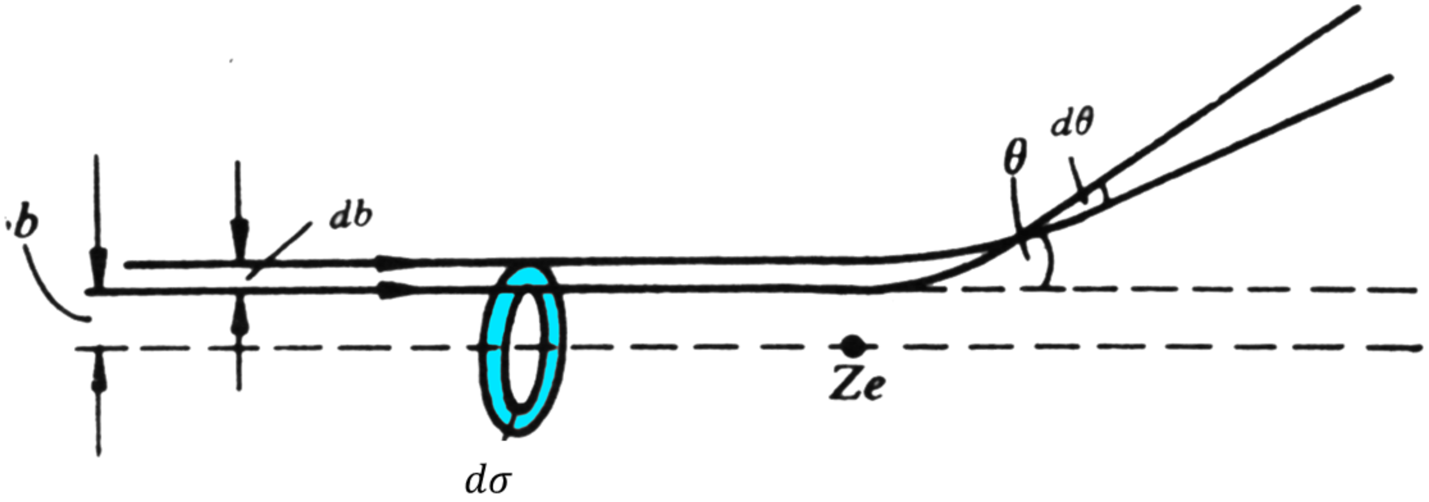
- 取一半径无穷大的球面
- 粒子被散射后的末态，用出射粒子轨道与此球面的交点表示
- 对此球面取球坐标(Θ,Φ)，立体角是

$$d\Omega = \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\Phi$$

- 微分截面定义为：初态测度与末态测度之比$d\sigma/d\Omega$
- 中心力场散射满足$\Phi = \phi$
- 中心力场散射的微分截面是

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\Theta}\frac{db}{d\Theta}}$$

微分截面的物理意义



- 在束流半径范围内，入射粒子的流密度大小均匀
- $d\sigma$正比于参与碰撞的粒子数目，$d\Omega$是粒子被散射后所处的立体角范围
- 微分截面$\frac{d\sigma}{d\Omega}$越大，则粒子被散射到该方向的概率越大

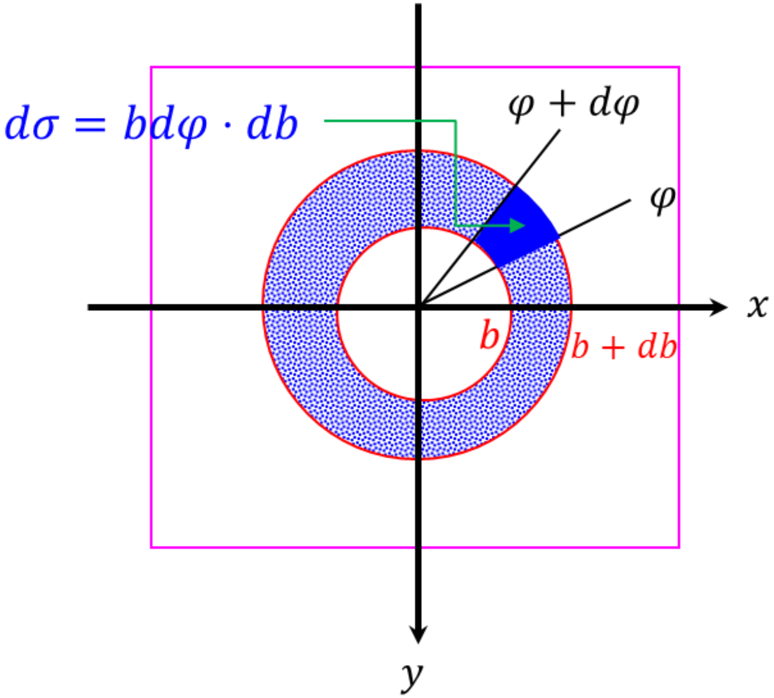
微分截面的实验值

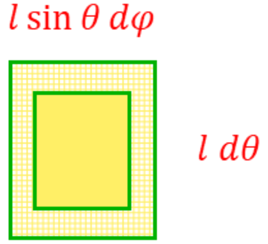
- 实验中束流强度（单位时间内在单位面积通过粒子数）为j
- 单位时间内通过$d\sigma$的粒子数为$jd\sigma$
- 这些粒子被散射后，被布置在(Θ,Φ)方向、立体角范围$\Delta\Omega$的探测器捕获
- 单位时间内捕获的粒子数目n为

$$n = j\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\exp}\Delta\Omega$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\exp} = \frac{n}{j\Delta\Omega}$$

- 微分截面实验值与理论值对比，可检验理论模型是否正确





探测器张开的立体角

$$dS = l^2 d\cos\theta\, d\varphi \propto d\Omega$$

散射公式

- 为了计算散射截面的理论值

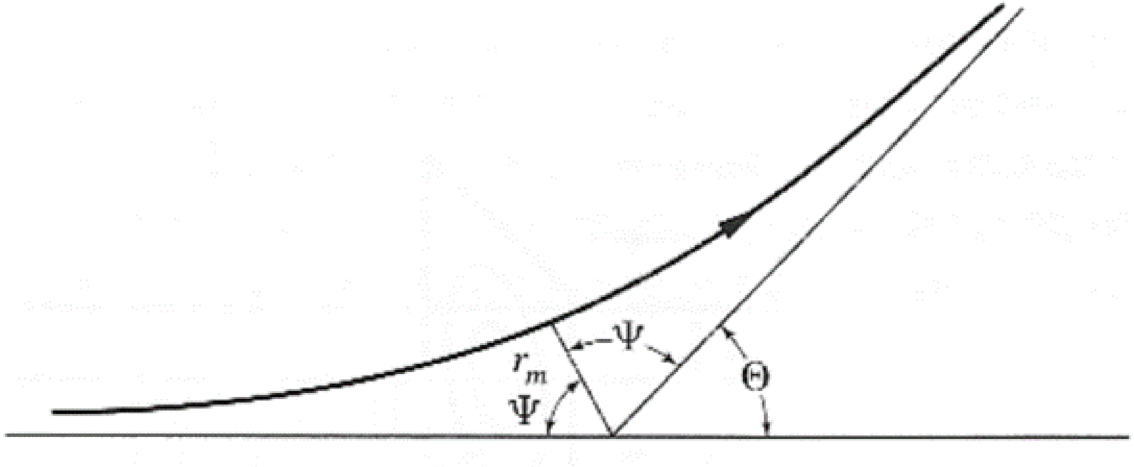
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\Theta}\frac{db}{d\Theta}$$

需要知道瞄准距离b与散射角Θ的关系，即散射公式

$$b = b(\Theta)$$

- 散射公式是初末态关系的理论公式

- 在经典力学中，散射公式可以通过粒子轨道求得



设粒子从左方无穷远处入射，

$$r \to +\infty$$
$$\theta \to \pi$$

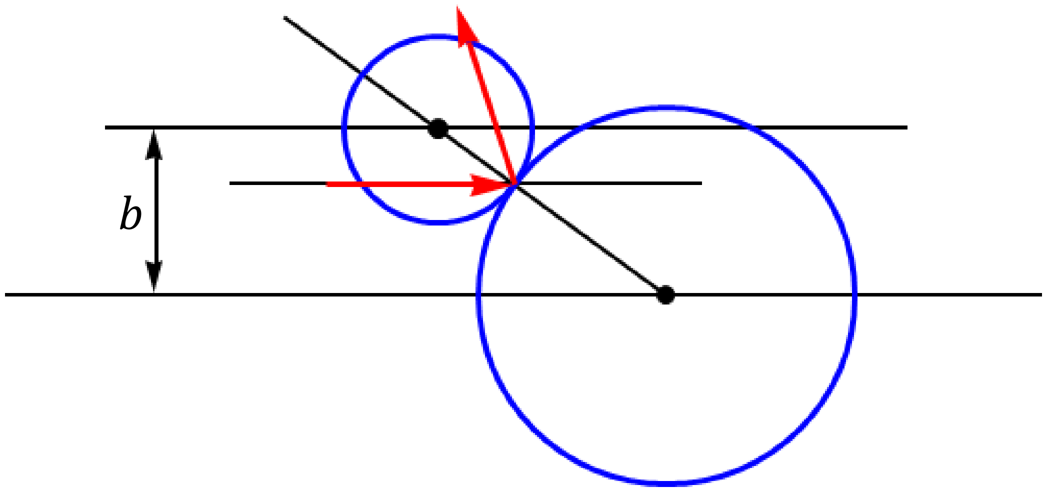
$$\Theta = \pi - 2[\pi - \theta(r_{\min})]$$

刚性球的散射

- 一个小球撞向一固定的球，两者半径之和为R
- 对弹性碰撞，可直接写出散射公式

$$b = R\cos\frac{\Theta}{2}\ (b \le R)$$

$$\Theta = 0\ (\text{if } b > R)$$



$$\sin\frac{\pi-\Theta}{2} = \frac{b}{R}$$

- 微分截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\Theta}\left|\frac{db}{d\Theta}\right| = \frac{R^2}{4}$$

- 总截面

$$\sigma_{\text{tot}} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \int_0^{\pi}\frac{R^2}{4}2\pi\sin\theta\, d\theta = \pi R^2$$

中心力场中的散射

- 第三章中，利用莫培督原理求得中心力场中的轨道公式

$$d\theta = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2m}{J^2}(E-V)r^4 - r^2}}$$

- 改以$u = 1/r$为广义坐标比较方便，

$$V = ar^n = au^{-n}$$

$$\theta(u) = \theta_0 + \int_{u_0}^{u} d\theta$$

$$= \theta_0 \pm \int_{u_0}^{u} \frac{Jdu}{\sqrt{2mE - 2mau^{-n} - J^2u^2}}$$

- 在$n = 2, -1, -2$时可积，积分结果为三角函数；
- 在$n = 6,4,1,-3,-5,-7$时为椭圆积分。
- 伯特兰定理（J. Bertrand）

在齐次力场中，只有平方反比引力和各向同性谐振子势场中的轨道是封闭的。

- 散射角是

$$\Theta = \pi - 2\int_0^{u_{\max}} \frac{bdu}{\sqrt{1 - \frac{1}{E}V(u) - b^2u^2}}$$

- 上式不适用势能有突变的情形，

此时分界面处会有反射或折射，满足反射定律或折射定律。

- 也可以用牛顿力学或拉格朗日力学求轨道和散射公式

卢瑟福散射

- 卢瑟福认为正电荷集中于一个点
- α粒子在库伦势中的散射

$$V=\frac{\alpha}{r}=\alpha u,\qquad \alpha=\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$$

- 近日点

解方程

$$d\theta=\infty$$

$$1-\frac{\alpha}{E}u-b^2u^2=0$$

$$2mE-2m\alpha u-2mEb^2u^2=0$$

得

$$u_{\max}=\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4E^2b^2}}{2Eb^2}$$

$$=\left\{\left[1+\left(\frac{\alpha}{2Eb}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{\alpha}{2Eb}\right\}\frac{1}{b}$$

- 散射角

$$\Theta=\pi-2\int_0^{u_{\max}}\frac{bdu}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{E}u-b^2u^2}}$$

$$=\pi-2\arctan\frac{\alpha}{2Eb}$$

$$b=\frac{\alpha}{2E}\cot\frac{\Theta}{2}$$

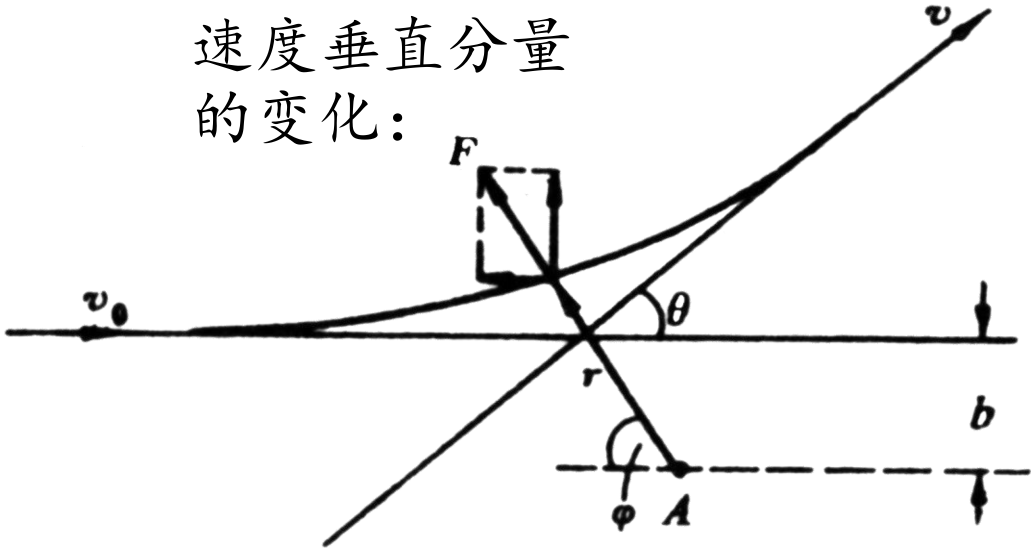
- 微分截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{16E^2\sin^4\frac{\Theta}{2}}$$

- 总截面无穷大（电磁力是远程力）

牛顿力学解法

速度垂直分量的变化：



$$F_{\perp} = F\sin\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}\sin\varphi$$

$$\Rightarrow dv_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{m}dt = \frac{2Ze^2\sin\varphi}{4\pi\varepsilon_0 m r^2}dt$$

角动量守恒

$$mv_0 b = mr^2\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{r^2}{v_0 b}d\varphi$$

$$dv_{\perp} = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_0 b}\sin\varphi\, d\varphi$$

$$v_0\sin\theta - 0 = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_0 b}\int_0^{\pi-\theta}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_0 b}(1+\cos\theta)$$

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D}$$

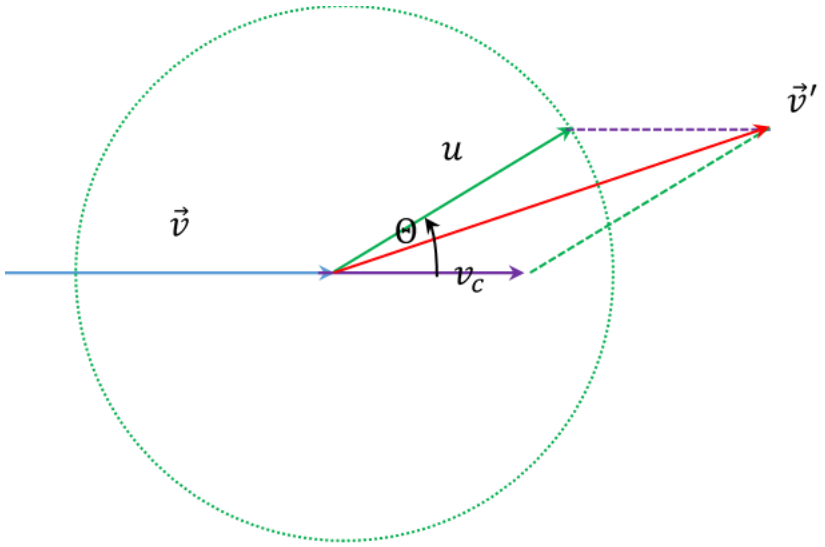
$$D \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Ze^2}{mv_0^2}$$

打靶实验中的坐标变换

- 在打靶实验中，碰撞后的靶粒子并非静止不动

  前面的计算实际上是质心系的结果

- 考虑以质量为m粒子的束流，撞击质量为M的静止靶粒子，碰撞后靶粒子获得速度



- 由动量守恒，在实验室系，质心速度在碰撞前后不变，沿入射速度$\vec{v}$方向，大小为

$$v_c = \frac{mv}{m+M}$$

- 在质心系，由机械能守恒，束流粒子碰撞前后的速率u不变，

$$u = v - v_c = \frac{Mv}{m+M}$$

- 束流粒子在实验室系的出射速度$\vec{v}'$是

$$\vec{v}' = \vec{v}_c + \vec{u} = (v_c + u\cos\Theta, u\sin\Theta)$$

- 束流出射方向与入射方向的夹角Θ_L满足

$$\tan\Theta_L = \frac{u\sin\Theta}{v_c + u\cos\Theta} = \frac{M\sin\Theta}{m + M\cos\Theta}$$

$$\Rightarrow \cos\Theta_L = \frac{m + M\cos\Theta}{\sqrt{m^2 + M^2 + 2mM\cos\Theta}}$$

质心系与实验室系散射角的关系

- 质心系散射角

$$\cos\Theta_L = \frac{m + M\cos\Theta}{\sqrt{m^2 + M^2 + 2mM\cos\Theta}}$$

- 微商得

$$\frac{d\cos\Theta_L}{d\cos\Theta} = \frac{M^2(M + m\cos\Theta)}{(m^2 + M^2 + 2mM\cos\Theta)^{3/2}}$$

- 解出实验室系散射角

$$\cos\Theta = -\frac{m}{M}\sin^2\Theta_L \pm \cos\Theta_L\left(1 - \frac{m^2}{M^2}\sin^2\Theta_L\right)^{\frac{1}{2}}$$

- 当$m \le M$时，

$$d\cos\Theta_L/d\cos\Theta \ge 0$$

是一一映射，只能取

$$\cos\Theta = -\frac{m}{M}\sin^2\Theta_L + \cos\Theta_L\left(1 - \frac{m^2}{M^2}\sin^2\Theta_L\right)^{\frac{1}{2}}$$

- 当$m \ge M$时，

$$d\cos\Theta_L/d\cos\Theta$$

可正可负，Θ在整个定义域取双值，

$$\cos\Theta = -\frac{m}{M}\sin^2\Theta_L \pm \cos\Theta_L\left(1 - \frac{m^2}{M^2}\sin^2\Theta_L\right)^{\frac{1}{2}}$$

截面的参考系变换

- 截面不变，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_L}d\Omega_L = \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega$$

- 当$m \le M$时，实验室坐标系的微分截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_L} = \frac{d\sigma}{d\Omega}\frac{d\Omega}{d\Omega_L} = \frac{d\sigma}{d\Omega}\frac{d\cos\Theta}{d\cos\Theta_L}$$

- 当$m \ge M$时，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_L} = \left\{\frac{d\sigma}{d\Omega}\left|\frac{d\cos\Theta}{d\cos\Theta_L}\right|\right\}\Bigg|_{\Theta=\Theta_1} + \left\{\frac{d\sigma}{d\Omega}\left|\frac{d\cos\Theta}{d\cos\Theta_L}\right|\right\}\Bigg|_{\Theta=\Theta_2}$$

- 卢瑟福散射中入射粒子质量小于靶粒子

$$m < M$$

- 动能

$$E_L = \frac{1}{2}mv^2, \qquad E = \frac{1}{2}\mu v^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{M}{m+M}E_L = \frac{1}{1+\gamma}E_L, \qquad \gamma \overset{\text{def}}{=} \frac{m}{M}$$

- 散射角的关系

$$\cos\Theta = -\gamma\sin^2\Theta_L + \cos\Theta_L\left(1-\gamma^2\sin^2\Theta_L\right)^{\frac{1}{2}}$$

- 微分截面

$$\frac{d\cos\Theta}{d\cos\Theta_L} = \frac{\left(-\gamma\cos\Theta_L + \sqrt{1-\gamma^2\sin^2\Theta_L}\right)^2}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\Theta_L}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_L} = \frac{\alpha^2(1+\gamma)^2}{16E_L^2\sin^4\frac{\Theta}{2}}\frac{\left(-\gamma\cos\Theta_L + \sqrt{1-\gamma^2\sin^2\Theta_L}\right)^2}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\Theta_L}}$$

$$= \frac{\alpha^2}{4E_L^2}\frac{1}{\sin^4\Theta_L}\frac{\left(\cos\Theta_L + \sqrt{1-\gamma^2\sin^2\Theta_L}\right)^2}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\Theta_L}}$$