2020 中国科学技术大学

量子力学期终考试试题卷

姓名: 学号: 成绩:

一. 必做题(共 3 题,总分 52)

1. 某微观粒子的量子态由球坐标系中的波函数

$$\psi(\vec{r})=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}F(r)\left[\sin\theta\exp(i\phi)+\cos\theta\right]$$

描写,式中θ与ϕ分别是位置矢量$\vec{r}$ 的极角和方位角,$r=|\vec{r}|$. 假设径向波函数$F(r)$已满足归一化条件:

$$\int_0^\infty [F(r)]^2 r^2 dr=1$$

① (5 分)倘若在$\psi(\vec{r})$态下测量粒子的轨道角动量第三分量L_z, 请问有哪些可能的测量值? (5 分)各个测量值出现的概率是多少?

② (5 分)请计算$\psi(\vec{r})$态下L_z的系综平均值。.

解:

在球坐标系中,轨道角动量第三分量算符表达为$\hat{L}_3=-i\hbar\,\partial_\phi$,其本征值和属于本征值的归一化本征函数分别为$m\hbar$与

$$\Phi_m(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(im\phi),\qquad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

题设的波函数可表为:

$$\psi(\vec{r})=\frac{1}{\sqrt{2}}F(r)\left[\sin\theta\,\Phi_1(\phi)+\cos\theta\,\Phi_0(\phi)\right]$$

所以，

① 在$\psi(\vec{r})$态下L_3有两个可能的测量值，$\hbar$和0。$\hbar$出现的概率是：

$$P_1=\int_0^{\infty}dr\ r^2\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left[\frac{1}{\sqrt{2}}F(r)\sin\theta\right]^2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=\frac{2}{3}\approx 0.67$$

而0出现的概率为：

$$P_0=\int_0^{\infty}dr\ r^2\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left[\frac{1}{\sqrt{2}}F(r)\cos\theta\right]^2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta=\frac{1}{3}\approx 0.33$$

② $\psi(\vec{r})$态下L_3的系综平均值为：

$$\langle L_3\rangle=P_1\hbar+P_0 0=\frac{2}{3}\hbar$$

此结果也可以通过标准步骤得到：

$$\begin{aligned}\langle L_3\rangle&=\int d^3x\,\psi(\vec{r})\left[-i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial\phi}\right]\\&=\frac{\hbar}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\ \sin^2\theta[\sin\theta+\cos\theta\exp(i\phi)]\\&=\frac{\hbar}{2}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\ d\theta=\frac{2}{3}\hbar\end{aligned}$$

2. 一个电荷为 q 的带电粒子在 x, y 平面运动。沿 z 方向外加匀强磁场。该系统的哈密顿量为，

$$H=\frac{1}{2m}(p_x+qyB/2)^2+\frac{1}{2m}(p_y-qxB/2)^2$$

其中 B 为磁感应强度。

① （10 分）证明哈密顿量与角动量算符第三分量对易，$[H, L_3]=0$，其中

$$L_3=xp_y-yp_x$$

② (10 分)量子态 $|\psi\rangle$ 满足,

$$H|\psi\rangle = \frac{1}{2}\frac{qB\hbar}{m}|\psi\rangle, \quad L_3|\psi\rangle = \hbar|\psi\rangle$$

求解 $|\psi\rangle$ 的波函数 $\psi(x,y)$(不必归一化)。

解:

① 按照量子力学基本对易关系 $[x_i,\ p_j]=i\hbar\delta_{ij}$,我们有:

$$\begin{aligned}[L_3,(p_x+qBy/2)^2]&=(p_x+qBy/2)[xp_y,\ p_x+qBy/2]\\&\quad+[xp_y,\ p_x+qBy/2](p_x+qBy/2)\\&=i\hbar\begin{bmatrix}(p_x+qBy/2)(p_y-qBx/2)\\ \quad+(p_y-qBx/2)(p_x+qBy/2)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[L_3,(p_y-qBx/2)^2]&=-(p_y-qBx/2)[yp_x,\ p_y-qBx/2]\\&\quad-[yp_x,\ p_y-qBx/2](p_y-qBx/2)\\&=-i\hbar\begin{bmatrix}(p_y-qBx/2)(p_x+qBy/2)\\ \quad+(p_x+qBy/2)(p_y-qBx/2)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

把以上二式相加并注意到

$$H=\frac{1}{2m}\left[(p_x+qBy/2)^2+(p_y-qBx/2)^2\right]$$

即得:

$$[L_3,\ H]=0 \tag{1}$$

② 此问题解法不唯一,命题者张扬老师提供了两种解法(见后面的英文页面)。这里列出第三种。引入复坐标 $z=x+iy$ 和 $\bar{z}=x-iy$,我们有:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}=i\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

注意到 z 和 $\bar{z}$ 是彼此独立的复坐标,如下对易关系成立:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z},\ z\right]=\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}},\ \bar{z}\right]=1, \qquad \left[\frac{\partial}{\partial z},\ \bar{z}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial \bar{z}},\ z\right]=0 \tag{2}$$

如此,哈密顿算符在位置表象中可表为:

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}+\frac{qB}{2}y\right)^2+\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}-\frac{qB}{2}x\right)^2 \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{qB}{4\hbar}\bar{z}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}+\frac{qB}{4\hbar}z\right)\right]^2 \\
&\quad +\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{qB}{4\hbar}\bar{z}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}+\frac{qB}{4\hbar}z\right)\right]^2
\end{aligned}
$$

引入辅助算符

$$
a^{\dagger}=\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{qB}}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{qB}{\hbar}}\,\bar{z}\right) \tag{3}
$$

我们看到:

$$
a=\sqrt{2}\left(-\sqrt{\frac{\hbar}{qB}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{qB}{\hbar}}\,z\right),\qquad [a,\ a^{\dagger}]=1 \tag{4}
$$

哈密顿算符可重新表为:

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\sqrt{\frac{qB}{2\hbar}}(a^{\dagger}-a)\right]^2+\frac{\hbar^2}{2m}\left[\sqrt{\frac{qB}{2\hbar}}(a^{\dagger}+a)\right]^2 \\
&= \frac{\hbar qB}{2m}(a^{\dagger}a+aa^{\dagger}) \\
&= \frac{\hbar qB}{m}\left(a^{\dagger}a+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{5}
$$

这是一个标准的简谐振子的哈密顿算符。题目中所说的量子态$|\psi\rangle$

实际上是H的最低本征态ψ_0: $a\psi_0(z,\ \bar{z})=0$. 换言之,

$$
\frac{\partial\psi_0(z,\ \bar{z})}{\partial\bar{z}}+\frac{qB}{4\hbar}z\,\psi_0(z,\ \bar{z})=0 \tag{6}
$$

显然,(6)式在复平面上各处收敛的解有无穷多:

$$
\psi_0{}^{(m)}(z,\ \bar{z})=c_m z^m\exp\left(-\frac{qB}{4\hbar}z\bar{z}\right);\qquad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{7}
$$

或等价地表为:

$$
\psi_0{}^{(m)}(x,\ y)=c_m(x+iy)^m\exp\left[-\frac{qB}{4\hbar}(x^2+y^2)\right];\qquad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{8}
$$

我们猜测$\psi_0{}^{(m)}(x,\ y)$实际上是H与L_3的一个共同本征态。事实上，

$$\begin{aligned}L_3\psi_0{}^{(m)}&=-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)c_m(x+iy)^m\exp\left[-\frac{qB}{4\hbar}(x^2+y^2)\right]\\&=m\hbar\ c_m(x+iy)^m\exp\left[-\frac{qB}{4\hbar}(x^2+y^2)\right]\\&=m\hbar\psi_0{}^{(m)}\end{aligned}$$

所以，题目中指定的量子态$|\psi\rangle$在位置表象中的波函数是：

$$\psi(x,\ y)=\psi_0{}^{(1)}(x,\ y)\propto(x+iy)\exp\left[-\frac{qB}{4\hbar}(x^2+y^2)\right]\tag{9}$$

3. 考虑一维简谐振子，其哈密顿算符是：

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

式中m与ω分别是振子的质量和角频率。假设$t=0$时刻振子的状态可以表达为波函数

$$\psi(x,0)=\cos\alpha\,\psi_0(x)\ +i\sin\alpha\,\psi_1(x)$$

此处α为一实参数，$\psi_0(x)$和$\psi_1(x)$分别是简谐振子基态和第一激发态的归一化能量本征函数。

③(5分)求$t>0$时刻的状态波函数$\psi(x,\ t)$.

④(10分)给出$t>0$时刻振子位置坐标与动量的期望值。这两个期望值各自在什么条件下达到它们的最大值?

⑤(2分)描写该量子体系随时间演化过程中的表现行为。

解：

① 波函数的时间演化算符是$U=\exp(-iHt/\hbar)$，

$$\begin{aligned}\psi(x,\ t)&=U\psi(x,0)\\&=\exp\left(-\frac{it}{\hbar}H\right)[\cos\alpha\ \psi_0(x)\ +i\sin\alpha\ \psi_1(x)]\\&=\cos\alpha\ \psi_0(x)\exp\left(-\frac{it}{\hbar}E_0\right)+i\sin\alpha\ \psi_1(x)\exp\left(-\frac{it}{\hbar}E_1\right)\end{aligned}\tag{10}$$

因为：

$$E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega,\quad E_1=\frac{3}{2}\hbar\omega,\quad \psi_0(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right),$$

$$\psi_1(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x\ \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right).$$

把这些资料代入到(10)式，知：

$$\psi(x,\ t)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)\exp(-i\omega t/2)\left[\cos\alpha\ +i\sin\alpha\ \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x\ \exp(-i\omega t)\right]\tag{11}$$

② 振子位置坐标在$\psi(x,\ t)$态下的平均值为：

$$\begin{aligned}\langle x(t)\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}dx\ \psi^*(x,\ t)x\psi(x,t)\\&=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\ \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)x\left[\cos\alpha\ -i\sin\alpha\ \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x\ \exp(i\omega t)\right]\\&\qquad\left[\cos\alpha\ +i\sin\alpha\ \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x\ \exp(-i\omega t)\right]\end{aligned}$$

而动量的平均值为：

$$\begin{aligned}\langle p(t)\rangle&=-i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}dx\ \psi^*(x,\ t)\psi'(x,t)\\&=-i\hbar\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\ \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)\left[\cos\alpha\ -i\sin\alpha\ \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x\ \exp(i\omega t)\right]\\&\qquad\left[-\frac{m\omega}{\hbar}x\cos\alpha\ +i\sin\alpha\ \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\left(1-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)\exp(-i\omega t)\right]\end{aligned}$$

完成上述积分（这个过程特别繁琐，建议阅卷时考生能写出上面二式的正确表达式就可以得本小题的满分），结果为：

$$\langle x(t)\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sin(2\alpha)\sin(\omega t),\quad \langle p(t)\rangle=\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\sin(2\alpha)\cos(\omega t) \tag{12}$$

从(12)式知，倘若$\alpha=\pi/4$，则随着时间的演化，振子位置坐标和动量交替达到各自的最大值$x_{max}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$和$p_{max}=\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$.

③ 简谐振子的位置坐标和动量无确定的测量值。但它们的系综平均值随时间做周期性的振荡。

二. 选做题（请在如下 4 题中任选 3 题进行解答，每题 16 分，共 48 分）

4. 两个质量为m、自旋为$\frac{1}{2}$的全同费米子被限制在一维无限深势阱中运动，

$$V(x,\ \vec{s}_1,\ \vec{s}_2)=\begin{cases}+\infty, & x\le 0\ \&\ x\ge a\\ -\alpha\dfrac{4\pi^2}{ma^2}\ \vec{s}_1\cdot\vec{s}_2, & 0<x<a\end{cases}$$

其中$\vec{s}_1$和$\vec{s}_2$分别是二费米子的自旋角动量算符，α为一无量纲的耦合常数且$\alpha>0$.　假设对此体系的总自旋角动量的z分量进行了一次测量并得到了测量值$S_z=\hbar$. 请求出本次测量结束瞬间（约定为$t=0$时刻）体系完整的基态波函数（10 分）与基态能量（6 分）。

解：

鉴于势场的势能不含轨道、自旋耦合项，体系的哈密顿算符及其本征函数可分别表为：

$$H=H_{\text{space}}\otimes\mathbb{I}_{\text{spin}}+\mathbb{I}_{\text{space}}\otimes H_{\text{spin}}$$

和$\psi(x_1, x_2, s_{1z}, s_{2z}) = \psi(x_1, x_2) \otimes \chi(s_{1z}, s_{2z})$. 按题设,二粒子之间仅存在自旋角动量的耦合且在势阱内部,

$$H_{\text{space}} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m}, \qquad H_{\text{spin}} = -\alpha \frac{4\pi^2}{ma^2} \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$$

倘若引入体系的总自旋角动量算符,$\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$, 我们可以把$H_{\text{spin}}$等价地表为:

$$H_{\text{spin}} = -\alpha \frac{2\pi^2}{ma^2} \left(\vec{S}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2 \right) = -\alpha \frac{\pi^2}{ma^2} \left(2\vec{S}^2 - 3\hbar^2 \right)$$

显然,$[H_{\text{spin}}, S_z] = 0$. 按题设,$t = 0$时刻体系处在$S_z$属于本征值为$\hbar$的本征态,即

$$\chi(s_{1z}, s_{2z}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

它实际上也是H_{spin}的本征态:

$$H_{\text{spin}} \chi(s_{1z}, s_{2z}) = -\alpha \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^2} \chi(s_{1z}, s_{2z})$$

请注意$\chi(s_{1z}, s_{2z})$关于二粒子自由度的交换是对称的。

计及全同性原理的限制,空间波函数$\psi(x_1,x_2)$必须具有关于二粒子自由度交换的反对称性:

$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) - \varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2) \right]$$

式中的两个因子波函数均满足定解条件:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi_i(x)}{dx^2} = E_i \varphi_i(x), 0 < x < a; \quad \varphi_i(x)|_{x \le 0} = \varphi_i(x)|_{x \ge a} = 0.$$

其解为:

$$\varphi_i(x)=\varphi_{n_i}(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_i\pi}{a}x\right);\ \ n_i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots;\ \ 0<x<a$$

$$E_i=E_{n_i}=\frac{n_i^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

综合起来，$t=0$ 时刻体系完整的基态波函数是：

$$\Psi_G(t=0)=\frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right)-\sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\right]\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

基态能量是：

$$E_G=\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}\left(\frac{5}{2}-\alpha\right)$$

5. 质量为 μ 的微观粒子被势能为

$$V(x)=\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2+\alpha\sqrt{\frac{8\mu^3\omega^5}{\hbar}}\,x^3$$

的势场限制在 x 轴上运动并处于束缚态，式中 α 为一无量纲常数且 $0<\alpha\ll 1$.

① (8 分)已知辅助哈密顿算符

$$\hat{H}_0=\frac{\hat{p}^2}{2\mu}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$$

的本征值方程是 $\hat{H}_0|n\rangle=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle$， $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$. 请计算力学量算符 x^3 在 $\hat{H}_0$ 的任意两个本征态 $|m\rangle$ 与 $|n\rangle$ 之间的矩阵元 $\langle m|x^3|n\rangle$.

② (8 分)精确到非简并微扰论的二级近似，求出哈密顿算符

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2\mu}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2+\alpha\sqrt{\frac{8\mu^3\omega^5}{\hbar}}\,x^3$$

的本征值。

解：

① 把辅助哈密顿算符写作$\hat{H}_0=\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)$，不难看出可取：

$$\hat{a}=\frac{\hat{p}}{\sqrt{2\mu\hbar\omega}}-i\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}}\hat{x},\quad \hat{a}^\dagger=\frac{\hat{p}}{\sqrt{2\mu\hbar\omega}}+i\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}}\hat{x},\quad [\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1 \tag{13}$$

从而，

$$\hat{x}=i\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger) \tag{14}$$

注意到升降算符对$\hat{H}_0$本征态$|n\rangle$的作用法则是

$$\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle,\quad \hat{a}^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle,\quad \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle=n|n\rangle \tag{15}$$

我们有：

$$\begin{aligned}
\langle m|\hat{x}^3|n\rangle&=-i\left(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\right)^{\frac{3}{2}}\langle m|(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)^3|n\rangle\\
&=-i\left(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\right)^{\frac{3}{2}}\langle m|(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)^2\left[\sqrt{n}|n-1\rangle-\sqrt{n+1}|n+1\rangle\right]\\
&=-i\left(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\right)^{\frac{3}{2}}\langle m|(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)\left[\begin{array}{c}\sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle-(2n+1)|n\rangle\\+\sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle\end{array}\right]\\
&=-i\left(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\begin{array}{c}\sqrt{n(n-1)(n-2)}\delta_{m,n-3}-3n\sqrt{n}\delta_{m,n-1}\\+3(n+1)\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}-\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\delta_{m,n+3}\end{array}\right]
\end{aligned}$$

需要说明的是，矩阵元$\langle m|\hat{x}^3|n\rangle$的具体表达式强烈地依赖着升降算符的选择。如果选择了别的升降算符，该矩阵元的表达式可以与上式不同。只要上式右端各项均出现且各项的绝对值一致，则可以认为计算结果正确。显然，

$$\langle n|\hat{x}^3|n\rangle=0 \tag{16}$$

② 设$\hat{H}=\hat{H}_0+\alpha\hat{W}$，

$$\hat{W}=\sqrt{\frac{8\mu^3\omega^5}{\hbar}}\,\hat{x}^3$$

从而$\langle n|\hat{W}|n\rangle=0$且：

$$\langle m|\hat{W}|n\rangle=-i\,\hbar\omega\begin{bmatrix}\sqrt{n(n-1)(n-2)}\,\delta_{m,n-3}-3n\sqrt{n}\,\delta_{m,n-1}\\+3(n+1)\sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1}-\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\,\delta_{m,n+3}\end{bmatrix}\tag{17}$$

几个特例是：

$$\langle m|\hat{W}|0\rangle=-i\hbar\omega\left(3\delta_{m,1}-\sqrt{6}\,\delta_{m,3}\right)$$
$$\langle m|\hat{W}|1\rangle=-i\hbar\omega\left(-3\delta_{m,0}+6\sqrt{2}\,\delta_{m,2}-2\sqrt{6}\,\delta_{m,4}\right)$$
$$\langle m|\hat{W}|2\rangle=-i\hbar\omega\left(-6\sqrt{2}\,\delta_{m,1}+9\sqrt{3}\,\delta_{m,3}-2\sqrt{15}\,\delta_{m,5}\right)$$

按照非简并微扰论，$\hat{H}$的第n个本征值近似表为：

$$E_n\approx\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega-\frac{\alpha^2}{\hbar\omega}\sum{}'\frac{\left|\langle m|\hat{W}|n\rangle\right|^2}{(m-n)}$$

具体地，

$$\begin{gathered}E_0\approx\left(\frac{1}{2}-11\alpha^2\right)\hbar\omega,\quad E_1\approx\left(\frac{3}{2}-71\alpha^2\right)\hbar\omega,\\E_2\approx\left(\frac{5}{2}-191\alpha^2\right)\hbar\omega\end{gathered}\tag{18}$$

对于$n\geq3$，

$$\begin{aligned}E_n&\approx\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega-\alpha^2\hbar\omega\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)-9n^3+9(n+1)^3\\+\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)\end{bmatrix}\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega-\alpha^2\hbar\omega\left(30n^2+30n+11\right)\end{aligned}\tag{19}$$

实际上，(18)式可以纳入到(19)式不必单独讨论。

6．质量为μ、动量为$\hbar\vec{k}$的非相对论微观粒子在中心力场

$$V(r)=\frac{V_0}{\alpha\, r}\exp(-\alpha\, r),\qquad V_0>0,\quad \alpha>0$$

中与靶粒子发生了弹性碰撞。请使用波恩一级近似计算散射振幅(10分)与微分散射截面(6分)。

解:

在波恩一级近似中,散射振幅的计算公式是:

$$f(q)=-\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty dr\ r\ \sin(qr)V(r) \tag{20}$$

这里$q=2k\sin(\theta/2)$， $k=\sqrt{2mE}/\hbar$， θ为散射角。把题设的势场代入到(20)式,我们有:

$$\begin{aligned} f(q)&=-\frac{2mV_0}{\hbar^2 q\alpha}\int_0^\infty dr\ \sin(qr)\exp(-\alpha r)\\ &=-\frac{2mV_0}{\hbar^2 q\alpha}\Im\left[\int_0^\infty dr\ \exp[-(\alpha-iq)r]\right]\\ &=-\frac{2mV_0}{\hbar^2 q\alpha}\Im\left[\frac{1}{\alpha-iq}\right]\\ &=-\frac{2mV_0}{\hbar^2\alpha}\frac{1}{\alpha^2+q^2}\end{aligned} \tag{21}$$

微分散射截面为:

$$\sigma(\theta)=|f(q)|^2=\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2\alpha}\right)^2\frac{1}{(\alpha^2+q^2)^2} \tag{22}$$

7. 假设在自旋为 $\frac{1}{2}$ 的微观粒子的自旋态上相继进行了两次测量。

① 第一次测量中我们企图测量粒子自旋角动量的笛卡尔直角分量代数和S_x+S_z，请问有哪些可能的测量值(6 分)?

②倘若第一次测量结束后粒子处在自旋态

$$\psi_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2+\sqrt{2}}\\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

请问S_x+S_z的测量值是什么(5 分)?

③ 对于处在ψ_1态的粒子我们进行第二次测量,但这次测量的力学量是粒子的自旋角动量直角分量S_z. 请问测量结果为$\pm\hbar/2$的概率分别是多少(5 分)?

解:

本题的关键是要把S_x+S_z在测量过程中从整体上看作是一个物理量。

设$O=S_x+S_z$,则在泡利表象中:

$$O=\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \tag{23}$$

① O的本征值方程

$$O\chi=\lambda\hbar\chi,\quad \chi=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} \tag{24}$$

在泡利表象中可表为:

$$\begin{bmatrix}1-2\lambda & 1\\ 1 & -1-2\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=0$$

因此,无量纲本征值λ的定解方程及其解分别是:

$$\begin{vmatrix}1-2\lambda & 1\\ 1 & -1-2\lambda\end{vmatrix}=0\ ,\qquad \lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{25}$$

(25)式表明S_x+S_z可能的测量值有两个，即$\pm\hbar/\sqrt{2}$.

② 因为，

$$
\begin{aligned}
O\psi_1&=\frac{\hbar}{4}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2+\sqrt{2}}\\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\
&=\frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\\ \sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\
&=\frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{4+2\sqrt{2}}\\ \sqrt{4-2\sqrt{2}}\end{pmatrix}\\
&=\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2+\sqrt{2}}\\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\psi_1
\end{aligned}
\tag{26}
$$

ψ_1是S_x+S_z属于本征值$\hbar/\sqrt{2}$的本征态。所以，当体系处在ψ_1态上后，S_x+S_z的测量值是$\dfrac{\hbar}{\sqrt{2}}$.

③ S_z属于本征值$\pm\hbar/2$的本征态分别是$\chi_\uparrow=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$\chi_\downarrow=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. 注意到

$$
\psi_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2+\sqrt{2}}\\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\chi_\uparrow+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\chi_\downarrow \tag{27}
$$

倘若在ψ_1态上测量S_z，将以概率

$$
P(\uparrow)=\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}=0.853553 \tag{28}
$$

得到测量值$\dfrac{\hbar}{2}$，以概率

$$
P(\downarrow)=\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}=0.146447 \tag{29}
$$

得到测量值$-\dfrac{\hbar}{2}$.

Solution

1. By an explicit computation,

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)+\frac{1}{8m}q^2B^2(x^2+y^2)+\frac{qB}{2m}(yp_x-xp_y)\\ &= \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)+\frac{1}{8m}q^2B^2(x^2+y^2)-\frac{qB}{2m}L_3\end{aligned} \tag{1}$$

It is clear that $p_x^2+p_y^2$, x^2+y^2 are rotationally invariant under the z-axis rotation. Therefore,

$$[H, L_3] = 0 \tag{2}$$

2.

- (Method 1) In polar coordinates,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)+\frac{q^2B^2}{8m}r^2-\frac{qB}{2m}(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}) \tag{3}$$

  Let $\psi(x,y)=f(r)g(\phi)$. From $L_3|\psi\rangle=\hbar|\psi\rangle$, $g(\phi)=e^{i\phi}$. The equation $H|\psi\rangle=\frac{qB\hbar}{2m}|\psi\rangle$ reads,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{1}{r^2}f\right)+\frac{q^2B^2}{8m}r^2 f-\frac{qB\hbar}{m}f=0\,. \tag{4}$$

  From the characteristic length of Landau levels, we make an Ansatz

$$f(r)=F(r)e^{-\frac{qBr^2}{4\hbar}}, \tag{5}$$

  and get the differential equation for F,

$$\hbar r^2F''(r)+(\hbar-Bqr^2)\Big(rF'(r)-F(r)\Big)=0 \tag{6}$$

  Then from the series analysis, we can get one solution,

$$F(r)\propto r \tag{7}$$

  The unnormalized wave function is then,

$$\psi(x,y)\propto re^{-\frac{qBr^2}{4\hbar}}e^{i\phi} \tag{8}$$

- (Method 2) It is known that the ground state of Landau level with zero L_3 eigenvalue is,

$$\psi_{0,0}(x,y)\propto e^{-\frac{qBr^2}{4\hbar}} \tag{9}$$

The L_3 raising operator is

$$Q_+ = \frac{1}{2\sqrt{2}l_B}\left(x - i\frac{2}{m\omega}p_x + iy + \frac{2}{m\omega}p_y\right)$$

with the characteristic length $l_B = \sqrt{\hbar/(qB)}$ and the classical frequency $\omega = qB/m$. Act Q_+ on $\psi_{0,0}$ and we get,

$$\psi(x,y) \propto (x+iy)e^{-\frac{qBr^2}{4\hbar}} \tag{10}$$