

数理方程复习参考

yuki

2022/05/06

(这个文档就是我感觉学完这个课、过几天去参加闭卷考试需要掌握的知识点的小抄笔记，有需要的同学参考着看看是不是都会了，也许能为大家复习提供一点点帮助。如有谬误，请大家方便的话向我指出。)

Chap.1. 数学物理中的偏微分方程

(一些以前学过的知识应当是很熟悉的，比如一阶线性ODE的解，2阶常系数ODE与Euler方程等的解，以及极坐标、球坐标下的拉普拉斯算子的形式等。)

1. 三个典型方程（波动方程、热传导方程、场位方程），定解条件

2. 无界弦震动：d'Alembert公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

另(1)，半无界弦：奇/偶延拓

另(2)，作业里做到过的三维空间中的球面波，做变量代换 $u(r, t) = rv(r, t)$ 即易求。

3. 叠加原理、齐次化原理

Chap.2. 分离变量法

求解偏微分方程最常用的方法，到现在应该是烂熟于心了……包括矩形域、圆域、环形域、扇形域、球域等。考试时请同学们把分离变量必要步骤写下来，即使你可能一眼看出来解是什么形式。

1. 一个典型例子.

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, r \leq a \\ u|_{r=a} = f(a \cos \theta, a \sin \theta) \end{cases}$$

令 $u = R(r)\Theta(\theta)$ ，则方程

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

成为

$$\frac{\frac{1}{r}(rR)'}{\frac{1}{r^2}R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

Θ:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0 : \Theta_0(\theta) = A_0 \\ \lambda_n = n^2 : \Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \end{cases}$$

相应的R:

$$R_0 = C_0 + D_0 \ln r = 1, R_n = C_n r^n + D_n r^{-n} = r^n$$

(不要在0奇异的部分)

故

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_n \left(\frac{r}{a}\right)^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

根据 $u|_{r=a}$ 的边界条件求出系数:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta, a \sin \theta) d\theta$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta, a \sin \theta) \cos n\theta d\theta$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta, a \sin \theta) \sin n\theta d\theta$$

以上便是分离变量法求解偏微分方程的完整过程。

2. Sturm-Liouville定理

Sturm-Liouville定理是我们看待二阶线性常微分方程的一个很重要的角度。任何二阶线性常微分方程都可以化为施图姆-刘维尔方程,

$$(k(x)y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$$

(k、q、 ρ 满足的条件详见课本)

我们希望它是一个本征值问题, 且唯有参数 λ 可以成为本征值, 故

$$Ay = \left[\frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{d}{dx} \right) - \frac{q(x)}{\rho(x)} \right] y = -\lambda y$$

可以证明本征值正是我们期望的一个递增序列 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$

而本征函数具备正交性。本征函数族具有完备性。于是通解可以写成各本征函数的线性组合。

写个大概, 详细的大家看课本。Sturm-Liouville定理一定要懂的。

3. 非齐次问题

大多数时候我们碰到的都不是什么漂亮的方程, 可能方程不齐次, 可能边界条件不齐次, 这时候就需要一些经验了。常用的方法有固有函数法、特解法和冲量原理法(就是利用齐次化原理求解)。这里没什么好说的, 就是多做练习就是了。

Chap.3. 特殊函数

1. Bessel函数

(1). Helmholtz方程在柱坐标下的变量分离

$$\Delta_3 u + k^2 u = 0, \Delta_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

令 $u(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{(rR)'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} + k^2 &= 0 \\ \frac{\Theta''}{\Theta} = -\sigma, \frac{Z''}{Z} = -\mu, \sigma = \nu^2, \lambda = k^2 - \mu \\ \Rightarrow (rR)' + (\lambda r - \frac{\nu^2}{r})R &= 0 \end{aligned}$$

令 $x = \sqrt{\lambda}r, y(x) = R(r)$, 得

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

这就是 ν 阶 Bessel 方程。

(2). Bessel函数

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

(3). 性质

母函数:

$$e^{\frac{x}{2}(\xi - \xi^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \xi^n$$

递推公式:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] &= x^\nu J_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \end{aligned}$$

就记住这两个就可以推其它几个常用的。

正交性:

$$\int_0^a r J_n(\omega_m^n r) J_n(\omega_l^n r) dr = \frac{a^2}{2} [J_{n+1}(\omega_l^n a)]^2 \delta_{ml}$$

(4). 固有值问题

就是柱坐标下各种含有 Laplace 算子的方程。如果与 θ 无关, 那就是 0 阶 Bessel 方程。Fourier 展开时要记得权函数是 r 。关于模平方在三类边条下的值, 至少把 1 类的记一下。(一定要会解方程!)

2. Legendre函数

(1). Helmholtz方程在球坐标下的变量分离

$$\Delta_3 u + k^2 u = 0, \Delta_3 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

令 $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$,

Φ 部分:

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0$$

(2π 周期性 $\Rightarrow \mu = m^2$)

Θ 部分:

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \Theta')' + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0$$

令 $x = \cos \theta$, 就得到

$$[(1-x^2)y']' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0$$

这是 m 阶伴随 Legendre 方程。书上只出现 φ 对称的, 也就是不用管这个 m 。
 R 部分, 其实是个球 Bessel 方程, 书上没写就不考, 大家也不需要知道, 只需要会 $k=0$ 时的情况——Euler 方程。

总之, 我们关注

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0$$

$\lambda = l(l+1), l = 0, 1, 2, \dots$

(2). Legendre 多项式

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \frac{(-1)^n (2l-2n)!}{2^l n! (l-n)! (l-2n)!} x^{l-2n}$$

前几个多项式建议记住。

(3). 性质

母函数:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l, |t| < 1$$

递推公式:

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0$$

$$(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$$

正交性:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}$$

(4). 固有值问题

课本275-278页，认真看过解方程应该没什么问题了。（一定要会解方程！）

Chap.4. 积分变换方法

1. 傅里叶变换

$$\bar{f}(\lambda) = F[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx$$

(1). 线性

(2). 微分关系

$$F[f^{(n)}(x)] = (i\lambda)^n F[f(x)]$$

(3). 逆变换

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda$$

(4). 频移和时移特性

$$F[f(x)e^{i\lambda_0 x}] = \bar{f}(\lambda - \lambda_0)$$

$$F[f(x - x_0)] = \bar{f}(\lambda)e^{-ix_0\lambda}$$

(5). 相似性质

$$F[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|} \bar{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$$

(6). 积分关系

$$F\left[\int_{-\infty}^x f(\xi)d\xi\right] = \frac{1}{i\lambda} \bar{f}(\lambda)$$

(7). 卷积性质

$$F[f(x) * g(x)] = \bar{f}(\lambda)\bar{g}(\lambda)$$

2. 拉普拉斯变换

略（上学期的一章，作业也写了好几题了。ILT有时候不太好求，我觉得大家不用太在意，上学期考过的这学期大概率不会再考。以前学会了之后会忘也无可厚非，平时需要用到时翻翻复变能做出来我觉得就算学会了。）

Chap.5. 基本解和解的积分表达式

1. δ 函数

这里列一些关于 δ 函数的性质：

$$F[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-i\lambda x} dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^x \delta(x)dx = H(x)$$

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(x, y, z)$$

若 $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$, J 是变换的 Jacobi 行列式, 则

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \frac{1}{|J|} \delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)$$

另外, 由 $\delta(x)$ 的傅里叶变换可知: 对 1 作 FT 是 $2\pi\delta$, 还可推 e^{iax} 、 $\cos ax$ 、 $\sin ax$ 的 FT.

2. $Lu = \delta(M)$, 基本解的求法

若 $U(M)$ 是 $LU = \delta(M)$ 的解, 则

$$u = U(M) * f(M) = \int_{R^3} U(M - M_0) f(M_0) dM_0$$

满足方程

$$Lu = f(M)$$

物理上的理解也是很自然的。

另外就是基本解的求解, 有镜像法、分离变量法、保形变换法、Fourier 变换法等等。大家重点掌握镜像法吧, 一般是很简单的几何关系, 最后一题大概率是考这个。(关于这一章的考试, (直接引语, 大家自己理解) 老师说: “按教材上 Green 函数的基本解方程来看各种区域上的 Green 函数。不用 Green 表示。”)

这两个相信大家都会算并记住了:

$$\Delta_3 U = \delta(x, y, z) \Rightarrow U = -\frac{1}{4\pi r}$$

$$\Delta_2 U = \delta(x, y) \Rightarrow U = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$$

3. 场势

$$\begin{cases} \Delta u = -f(M) \\ u|_{\partial V} = \varphi(M) \end{cases}$$

若 $G(M; M_0)$ 是上式方程 I 类边条对应的 Green 函数, 则上式解为

$$u(M) = \int_V f(M_0) G(M; M_0) dM_0 - \oint_{\partial V} \varphi(M_0) \frac{\partial G}{\partial n} dS_0$$

4. 初值问题的基本解方法: $U_t = Lu$ 与 $U_{tt} = Lu$
略。(应当要掌握的, 但是我懒得抄了。。。)

总结起来差不多就是这些。**老师在群里发了复习指导**, 我相信对大家考试还是很有裨益的, 建议着重复习老师所提及的内容。(我没有近几年考题, 真想刷卷子的同学自己找找吧。平时未必能及时看到 qq 消息也未必能看了题就会解, 但不管怎么说对于提问虽迟必回, 请大家谅解。) 祝大家考试顺利。