2017—2018学年《概率论》期中考试试卷

学生所在系________ 姓 名________ 学 号________ 得 分________

一. (30分, 每小题3分) 填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.

(1) 设随机事件A和B相互独立, A和C相互独立, 且B和C互斥. 若$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=1/2$, $\mathrm{P}(AC|AB\cup C)=1/4$, 则$\mathrm{P}(C)=$________.

(2) 试卷中的某选择题有四个答案, 其中只有一个是正确的. 某考生可能知道哪个是正确的, 也可能是乱猜一个. 假设此考生知道正确答案的概率为$p(0<p<1)$, 而在不知答案的情况时会随机地选择一个答案. 若已知该考生答对了这道题, 问其确实知道正确答案的概率是________.

(3) 对任一随机变量X, 下列说法正确的是( ).
A. 若其所有可能的取值范围是区间$(0,1)$, 则它为一个连续型的随机变量
B. 若其分布函数在$(-\infty,\infty)$上处处连续, 则它为一个连续型的随机变量
C. 若其分布函数在$(-\infty,\infty)$上不连续, 则它为一个离散型的随机变量
D. 若X的密度函数$p(x)$存在, 则它的表达式可以不唯一

(4) 设随机变量X服从参数为λ的Poisson分布, 且已知$\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=2)$, 则$\mathrm{P}(X=3)=$________.

(5) 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ ax^2\ln x+bx^2+1, & 1\le x\le \mathrm{c};\\ 1, & x>\mathrm{e},\end{cases}$$

其中a,b为常数, 则它们的积 $ab=$________.

(6) 设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的密度 $p_1(x),p_2(x)$ 是连续函数, 则下列中必为密度函数的是( ).
A. $p_1(x)p_2(x)$ B. $2p_2(x)F_1(x)$
C. $p_1(x)F_2(x)$ D. $p_1(x)F_2(x)+p_2(x)F_1(x)$

(7) 假定一机器的检修时间服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布(单位: 小时). 若已经检修了 2 小时, 则总检修时间会超过 4 小时的概率为________.

(8) 设X_1,X_2,X_3均服从正态分布, 且$X_1\sim N(0,1),X_2\sim N(0,2^2),X_3\sim N(5,3^2)$, $P_i=\mathrm{P}(-2\le X_i\le 2)\ (i=1,2,3)$, 则( ).
A. $P_1>P_2>P_3$ B. $P_2>P_1>P_3$
C. $P_3>P_1>P_2$ D. $P_1>P_3>P_2$

(9) 设$X\sim U(0,1),Y\sim U(0,2)$且它们相互独立, 则$\mathrm{P}(X<Y)=$________.

(10) 设X和Y均为Bernoulli随机变量, 若已知

$$\mathrm{P}(X=Y=0)=0.4,\quad \mathrm{P}(X=Y=1)=0.1,$$

且事件$\{X=0\}$和$\{X+Y=1\}$相互独立, 则$\mathrm{P}(X=0,Y=1)=$________.

二. (10分) 甲乙二人进行网球比赛, 每回合胜者得 1 分, 且每回合甲胜的概率为 $p(0<p<1)$, 乙胜的概率为 $1-p$, 比赛进行到有一人比另外一个人多 2 分就终止, 多 2 分者最终获胜, 试求甲最终获胜的概率.

三. (15分) 设随机变量X的密度函数为$p(x)=\frac{1}{9}x^2, 0<x<3$, 令随机变量

$$Y=\begin{cases}2, & X\le 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & X>2.\end{cases}$$

(1, 2)

$\boxed{1\le y<2}$

(1) 求常数a的值;

$y<1 = 0$

(2) 求随机变量 Y 的分布函数$F(y)$;

$P(Y<y)=P(\cancel{2<y, X\le 1})$

(3) 求概率 $\mathrm{P}(X\le Y)$.

$y\ge 2 = 1$

$+P(X<y, 1<X<2)$

$+P(1<y, X>2)$

四. (15分)设二维随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$1\le y<2$

$$p(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},\quad -\infty<x,y<\infty.$$

$y=1$

(1) 求常数A的值;

$P(Y=1)+P(1<Y\le y)$

(2) 在已知$X=x$的条件下, 求Y的条件密度函数$p_{Y|X}(y|x)$.

五. (20分) 设随机变量X和Y相互独立且均服从参数为$\lambda>0$的指数分布. 记

$$U=\min\{X,Y\},\quad V=\max\{X,Y\}.$$

(1) 分别求 U 和 V 的密度函数;
(2) 问 U 和 $V-U$ 是否相互独立? 证明你的结论.

六. (10分) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是一列独立同分布的标准正态随机变量, 且$a_1,a_2,\cdots,a_n$是一组不全为0的实常数.

(1) 试求$a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$的分布;
(2) (附加题, 10分)当 $n=6$ 时, 试求随机变量

$$Y=\frac{X_1X_2+X_3X_4+X_5X_6}{\sqrt{X_2^2+X_4^2+X_6^2}}$$

的分布.