

0.1 贝塞尔函数

贝塞尔函数是柱坐标系使用分离变量法后自然产生的函数族。

0.1.1 贝塞尔方程

我们以泊松方程为例：(齐次情形)设有一个半径为 a 的圆柱体，高为 H ，处于热平衡状态，侧面绝热，上下表面温度已知，内部无热源。求温度分布？

首先我们写出定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, 0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq H, 0 \leq \theta < 2\pi \\ u_r|_{x^2+y^2} = 0, 0 \leq z \leq H, 0 \leq \theta < 2\pi \\ u(x, y, 0) = g_1(r, \theta), u(x, y, H) = g_2(r, \theta), 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

我们使用柱坐标系并用分离变量法，在柱坐标系下，齐次泊松方程为

$$\Delta_3 u = \frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u}{\partial z^2} = 0.$$

做分离变量

$$u = ZR\Theta,$$

其中， $Z = Z(z), R = R(r), \Theta = \Theta(\theta)$ 。则有，

$$-\frac{r^2 R'' Z + r R' Z + r^2 R Z''}{RZ} = \frac{\Theta''}{\Theta}.$$

不妨设 $\frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda$ ，则有固有值问题

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi), \Theta'(0) = \Theta'(2\pi). \end{cases}$$

这是周期边界条件的固有值问题， $k = 1, q = 0, \rho = 1$ ，由SL理论， $\lambda_0 = 0, \Theta_0 = 1$ 。其余固有值 $\lambda_n = n^2, n \geq 1$ ，对应固有函数 $\Theta_n^{(1)} = \cos n\theta, \Theta_n^{(2)} = \sin n\theta, n \geq 1$ 。将固有值代入原方程，得

$$\frac{r^2 R'' Z + r R' Z + r^2 R Z''}{RZ} = n^2.$$

即：

$$-\frac{Z''}{Z} = \frac{-n^2 R + r^2 R'' + r R'}{r^2 R}.$$

我们再用一次分离变量，假设上式为常值 $-\mu$ ，则我们得到固有值问题

$$\begin{cases} r^2 R'' + r R' + (\mu r^2 - n^2) R = 0, r \geq 0 \\ |R(0)| < \infty, R'(a) = 0. \end{cases}$$

写成标准形式，有

$$\begin{cases} [rR']' - \frac{n^2}{r} R + \mu r R = 0, 0 \leq x \leq a \\ |R(0)| < \infty, R'(a) = 0. \end{cases}$$

我们根据 n 的不同取值来讨论：

当 $n = 0$ 时, $q = 0$, 两端分别为自然边界条件和II类边界条件。因而0是固有值, 对应固有函数为 $R_0 = 1$ 。其余固有值均大于零, 我们可以设 $x = \sqrt{\mu}r, y(x) = R(x/\sqrt{\mu})$, 我们就得到了

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0, x \geq 0. \\ |y(0)| < \infty. \end{cases}$$

上述方程称为零阶贝塞尔方程。

当 $n \neq 0$ 时, $q \neq 0$, 我们不需要考虑零固有值。所有固有值都大于0, 即 $\mu > 0$ 。我们可以设 $x = \sqrt{\mu}r, y(x) = R(x/\sqrt{\mu})$, 我们就得到了

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, x \geq 0. \\ |y(0)| < \infty. \end{cases}$$

上述方程称为 n 阶贝塞尔方程。一般 ν 阶 ($\nu \geq 0$) 贝塞尔方程的形式为

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, x \geq 0.$$

写成SL的形式为

$$[xy']' - \frac{\nu^2}{x}y + xy = 0, x > 0.$$

我们发现除了在0阶的时候需要考虑零固有值外, 其他形式都是统一的, 因而问题的核心在于解上述常微分方程。

定理. 如果 y_1 和 y_2 是上述常微分方程的两个线性无关解, 其中一个在0点有界, 则另一个必然在零点无界。

实际上, 我们假设 y_1 是定理的有界解, y_2 是无界解, 则常微分方程的所有解可以表示为 $C_1 y_1 + C_2 y_2$ 。可以说明, 所有有界解都是 y_1 的倍数。结合我们的边界条件, y_1 是我们所关心的。其某个特解称为 ν -阶贝塞尔函数, 记为 $J_\nu(x)$ 。

现在假设我们已经知道了 $J_n(x)$, 我们回到了 n -阶贝塞尔固有值问题。 $R(r) = J_n(\sqrt{\mu}r)$ 。边界条件为

$$|R(0)| < \infty, R'(r) = (J_n(\sqrt{\mu}r))'|_{r=a} = \sqrt{\mu}J_n'(x)|_{x=\sqrt{\mu}a} = 0.$$

设 $\omega = \sqrt{\mu}$, 设 $J_n'(\omega a) = 0$ 的所有正解为 $\omega_{n,1} < \omega_{n,2} \dots$ 。则固有值 $\mu_{n,m} = \omega_{n,m}^2$, 固有函数 $R_{n,m} = J(\omega_{n,m}r)$, 当 $n = 0$ 时, 按情况讨论零固有值是否存在。将固有值代入 Z 的方程, 得到

$$Z'' - \omega_{n,m}^2 Z = 0$$

固有值非零时解得

$$Z = C_{n,m,1}e^{\omega_{n,m}z} + C_{n,m,2}e^{-\omega_{n,m}z}.$$

固有值零时解得

$$Z = C + Dz.$$

所以原定解问题的解为

$$u = C + Dz + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (C_{n,m,1}^{(1)} e^{\omega_{n,m}z} + C_{n,m,2}^{(1)} e^{-\omega_{n,m}z}) J_n(\omega_{n,m}r) \Theta_n^{(1)}(\theta) + \dots$$

(非齐次情形) 设有一个半径为 a 的圆柱体, 高为 H , 处于热平衡状态, 侧面有与时间无关的热流流入, 上下表面温度已知, 内部有与时间无关的热源。求温度分布?

首先我们写出定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(r, \theta, z), 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq z \leq H \\ u_r|_{r=a} = \varphi(\theta, z), 0 \leq z \leq H, 0 \leq \theta < 2\pi \\ u(x, y, 0) = g_1(r, \theta), u(x, y, H) = g_2(r, \theta), 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

把边界条件齐次化, 设 $v = \frac{r^2}{2a}\varphi(\theta, z)$, 及 $w = u - v$, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial z^2} = f(r, \theta, z), 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq z \leq H \\ w_r|_{r=a} = 0, 0 \leq z \leq H, 0 \leq \theta < 2\pi \\ w(x, y, 0) = g_1(r, \theta), w(x, y, H) = g_2(r, \theta), 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

这里得 f, g_1, g_2 会有相应改变, 但为了方便我们就不改符号了。设 $\Theta_n, \mu_n, R_{n,m} = J_n(\omega_{n,m})(x)$ 为前面所述。我们要找一个满足泛定方程得特解, 且满足边界条件。不妨假设这个特解为

$$\tilde{v} = \sum_{n,m} Z_{n,m}^{(1)}(z) \Theta_n^{(1)}(\theta) R_{n,m}(r) + \sum_{n,m} Z_{n,m}^{(2)}(z) \Theta_n^{(2)}(\theta) R_{n,m}(r) + \sum_m Z_{0,m} R_{0,m}.$$

为方便起见我们省略部分形式, 反正都是一样的。从而

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z^2} = \sum_{n,m} \left(Z_{n,m} \Theta_n R_{n,m}'' + Z_{n,m} \Theta_n \frac{R_{n,m}'}{r} + Z_{n,m} \Theta_n'' \frac{R_{n,m}}{r^2} + Z_{n,m}'' \Theta_n R_{n,m} \right).$$

带入 $\Theta_n'' + n^2 \Theta_n = 0$, 上式等于

$$\sum_{n,m} \left(Z_{n,m} \Theta_n \frac{r^2 R_{n,m}'' + r R_{n,m}' - n^2 R_{n,m}}{r^2} + Z_{n,m}'' \Theta_n R_{n,m} \right).$$

带入 $\frac{-n^2 R_{n,m} + r^2 R_{n,m}'' + r R_{n,m}'}{r^2 R_{n,m}} = -\omega_{n,m}^2$, 上式等于

$$\sum_{n,m} (-\omega_{n,m}^2 Z_{n,m} \Theta_n R_{n,m} + Z_{n,m}'' \Theta_n R_{n,m}) = \sum_{n,m} (-\omega_{n,m}^2 Z_{n,m} + Z_{n,m}'') \Theta_n R_{n,m}.$$

将 f 分解为

$$f(z, r, \theta) = \sum_{n,m} f_{n,m}(z) \Theta_n(\theta) R_{n,m}(r).$$

对照得

$$-\omega_{n,m}^2 Z_{n,m} + Z_{n,m}'' = f_{n,m}(z).$$

既然是找特解, 不妨假设 $Z_{n,m}(0) = Z_{n,m}'(0) = 0$ 。由拉式变换:

$$-\omega_{n,m}^2 \bar{Z}_{n,m} + p^2 \bar{Z}_{n,m} = \bar{f}_{n,m}(z).$$

得到

$$\bar{Z}_{n,m} = \frac{1}{p^2 - \omega_{n,m}^2} \bar{f}_{n,m}(z).$$

从而

$$Z_{n,m} = \frac{e^{\omega_{n,m}z} - e^{-\omega_{n,m}z}}{2\omega_{n,m}} * f_{n,m}.$$

$$Z_{0,0} = z * f_{0,0}.$$

这样我们就得到了所要的特解

$$\tilde{v} = \sum_{n,m} Z_{n,m}^{(1)} \Theta_n^{(1)} R_{n,m} + \sum_{n,m} Z_{n,m}^{(2)} \Theta_n^{(2)} R_{n,m} + \sum_m Z_{0,m} R_{0,m}.$$

设 $\tilde{w} = w - \tilde{v}$, 就得到了

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z^2} = 0, 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq z \leq H \\ \tilde{w}_r|_{r=a} = 0, 0 \leq z \leq H, 0 \leq \theta < 2\pi \\ \tilde{w}(x, y, 0) = g_1(r, \theta), \tilde{w}(x, y, H) = g_2(r, \theta), 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

这里 g_1, g_2 有相应改变, 图方便就不写了。这样我们就化成了一般齐次情形。

0.2 贝塞尔函数

我们来解 ν 阶 ($\nu > 0$) 贝塞尔方程

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, x \geq 0.$$

这是一个2阶常微分方程, 其解有形式 $C_1 J_\nu + C_2 N_\nu$, 其中 J_ν 和 N_ν 是定义在 $(0, +\infty)$ 上线性无关的特解, 其中, J_ν 在0点有界, N_ν 在0点无界。现在我们找这两特解: 不妨设

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\nu}.$$

代入贝塞尔方程, 得到

$$(1 + 2\nu)a_1 = 0, n(n + 2\nu)a_n + a_{n-2} = 0.$$

我们只要特解, 因而并不关心奇数项。我们有

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (k + \nu) \cdot (k + \nu - 1) \cdots (\nu + 1)}.$$

我们介绍一个函数 Γ 函数:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

该函数在 $x \geq 1$ 都有定义, 并且有

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}|_0^\infty = 1.$$

当 $x \geq 1$ 时,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = - \int_0^\infty t^x de^{-t} = -t^x e^{-t}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt^x = x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dx = x\Gamma(x).$$

用上述递推公式，我们可以说明 $\Gamma(n+1) = n!$ ，还可以将 Γ 函数的定义推广到全体实数去掉非正整数上。例如

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2})/(-\frac{1}{2}) = -4\Gamma(\frac{3}{2}).$$

实际上

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^{\infty} e^{-s^2} s^{-\frac{1}{2}} ds^2 = 2 \int_0^{\infty} e^{-s^2} s^{-1} ds = \sqrt{\pi}.$$

但是

$$\Gamma(0) = \Gamma(1)/0 = \infty \text{ 以及 } \Gamma(-n) = \infty, n \in \mathbb{N},$$

在此不做展开。

有了 Γ 函数，我们可以将 a_{2k} 记为

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1) a_0}{2^{2k} k! \Gamma(k+\nu+1)}.$$

取 $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ ，我们得到了贝塞尔方程的第一个特解也是我们最关心的特解：

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

J_ν 一般没有显式表达式，但我们有

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

实际上，当 k 为正整数时。

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{2k-1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}(2k-1)!!}{2^k}.$$

从而

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \frac{1}{2} + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \frac{\sqrt{\pi}(2k+1)!!}{2^{k+1}}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}.$$

整理得

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \frac{\sqrt{\pi}(2k+1)!!}{2^{k+1}}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

为了求另一个特解，我们不妨假设另一个特解为

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n-\nu}.$$

带入贝塞尔方程，得到

$$n(n-2\nu)a_n + a_{n-2} = 0.$$

我们可以将 a_{2k} 记为

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k \Gamma(-\nu+1) a_0}{2^{2k} k! \Gamma(k-\nu+1)}.$$

取 $a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$, 我们得到了贝塞尔方程的另一个特解:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-\nu}}{2^{2k-\nu} k! \Gamma(k-\nu+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

当 ν 不是整数时,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} J_{-\nu}(x) = \infty. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} J_{\nu}(x) = 0$$

因而 J_{ν} 与 $J_{-\nu}$ 线性无关。但是当 $\nu = n$ 为非负整数的时候

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+n+1)k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

J_n 与 J_{-n} 线性相关。为了解决这个问题。当 ν 不是整数时, 我们令

$$N_{\nu}(x) = \frac{J_{\nu}(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

ν -阶贝塞尔方程的所有解可以表示为 $C_1 J_{\nu} + C_2 N_{\nu}$ 。对于非负整数

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} N_{\nu}(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_{\nu}(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

这个极限是 $\frac{0}{0}$ 的形式, 可以用洛必达法则, 得

$$N_n(x) = \frac{\cos(\nu\pi) \frac{\partial J_{\nu}}{\partial \nu}(x) - \pi J_{\nu}(x) \sin(\nu\pi) - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(x)}{\pi \cos(\pi\nu)} \Big|_{\nu=n} = \frac{\frac{\partial J_{\nu}}{\partial \nu}(x) - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(x)}{\pi} \Big|_{\nu=n}.$$

J_{ν} 称为第一类 ν -阶贝塞尔函数; N_{ν} 称为第二类 ν -阶贝塞尔函数或者诺伊曼函数。在这本书中我们重点关注 J_n 特别是 J_0 。

0.3 贝塞尔函数的性质

0.3.1 母函数

$\exp(\frac{x}{2}(\xi - \frac{1}{\xi}))$ 称为贝塞尔函数的母函数。我们有

$$\exp(\frac{x}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})) = \exp(\frac{x}{2}\xi) \exp(-\frac{x}{2}\frac{1}{\xi}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x\xi}{2}\right)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2\xi}\right)^n \right)$$

依 ξ 的次数展开得:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{x}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{x\xi}{2}\right)^{n+k} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2\xi}\right)^k + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x\xi}{2}\right)^k \frac{(-1)^{n+k}}{(n+k)!} \left(\frac{x}{2\xi}\right)^{n+k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \right) \xi^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \right) \xi^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) \xi^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(x) \xi^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) \xi^n + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(x) \xi^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \xi^n. \end{aligned}$$

注意到如果将母函数看成一个 ξ 的复函数, 则母函数在 $\xi \neq 0$ 解析, 并且 $\xi = 0$ 是母函数的孤立奇点, 可以洛朗展开:

$$\exp\left(\frac{x}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \xi^n$$

用洛朗展开的公式

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

其中 C 是围绕孤立奇点 a 的闭路 (见书本86页)。在这里取 $f(\xi) = \exp(\frac{x}{2}(\xi - \frac{1}{\xi}))$, 取 C 为单位圆, 即 $\xi = e^{\theta i}, 0 \leq \theta < 2\pi$, 取 $a = 0$ 。则有

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(\frac{x}{2}(e^{\theta i} - \frac{1}{e^{\theta i}}))}{(e^{\theta i} - 0)^{n+1}} de^{\theta i} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(x \sin \theta i)}{e^{n\theta i}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp((x \sin \theta - n\theta)i) d\theta.$$

注意到 $\exp((x \sin \theta - n\theta)i) = \cos(x \sin \theta - n\theta) + i \sin(x \sin \theta - n\theta)$ 以及 $\sin(x \sin \theta - n\theta)$ 为 θ 的奇函数和周期 2π 的函数, 我们有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta = 0.$$

所以

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta = J_n(x).$$

称之为整阶贝塞尔函数的积分表示。

利用母函数可以证明很多贝塞尔函数的性质。

$$J_0(0) = 1, J_n(0) = 0, n \neq 0.$$

又例如

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(x) J_{-k}(y).$$

实际上一方面

$$\exp\left(\frac{x+y}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) \xi^n.$$

另一方面

$$\exp\left(\frac{x+y}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\right) \exp\left(\frac{y}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\right) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\xi^n\right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(y)\xi^n\right).$$

依 ξ 的阶数展开得

$$\exp\left(\frac{x+y}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(x)\xi^{n+k} J_{-k}(y)\xi^{-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(x)J_{-k}(y)\xi^n.$$

对照得:

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n+k}(x)J_{-k}(y).$$

0.3.2 微分关系与递推公式

贝塞尔函数 J_ν 满足以下性质:

$$(1) (x^\nu J_\nu)' = x^\nu J_{\nu-1} = x^\nu J_\nu' + \nu x^{\nu-1} J_\nu;$$

$$(2) \left(\frac{J_\nu}{x^\nu}\right)' = -\frac{J_{\nu+1}}{x^\nu} = \frac{J_\nu'}{x^\nu} - \frac{\nu J_\nu}{x^{\nu+1}}.$$

整理得

$$(1) J_{\nu-1} = J_\nu' + \nu x^{-1} J_\nu;$$

$$(2) J_{\nu+1} = -J_\nu' + \nu x^{-1} J_\nu.$$

我们证明之:

证明. (1). 首先

$$x^\nu J_\nu(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k!\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k+2\nu}.$$

对 x 求导得

$$(x^\nu J_\nu(x))' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+2\nu)}{2^{2k+\nu} k!\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k+2\nu-1} = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu-1} k!\Gamma(k+\nu)} x^{2k+\nu-1} = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

(2). 同理

$$\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k!\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k}.$$

需要注意得是 $k=0$ 项为常数项, 求导后为0, 为了避免误导造成错误, 我们单独提出来考虑, 当然如果 $k!$ 写成 $\Gamma(k+1)$ 那么就没什么必要啰嗦了. 求导得

$$\begin{aligned} \left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)' &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{2^{2k+\nu} k!\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu-1} (k-1)!\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+\nu+1} k!\Gamma(k+\nu+2)} x^{2k+1} = -x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu+1} k!\Gamma(k+\nu+2)} x^{2k+\nu+1} \\ &= -x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+(\nu+1)+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu+1)} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

由微分关系，我们可以得到递推公式

$$(1) J'_\nu = \frac{1}{2}(J_{\nu-1} - J_{\nu+1});$$

$$(2) \frac{2\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}.$$

以及

$$J'_0(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x).$$

因而，整阶贝塞尔函数包括其导数总能用 J_0, J_1 表出。这也是作业和考试答案的要求，尽量用 J_0, J_1 表示。例如

$$J'_1 = \frac{1}{2}(J_0 - J_2) = \frac{1}{2}J_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}J_1 - J_0\right) = J_0 - \frac{1}{x}J_1.$$

当然我们也可以用微分关系求 J'_1

$$(xJ_1)' = xJ_0 = J_1 + xJ'_1.$$

得到

$$J'_1 = J_0 - \frac{1}{x}J_1.$$

两者是一致的。又例如

$$J_3 = \frac{4}{x}J_2 - J_1 = \frac{4}{x}\left(\frac{2}{x}J_1 - J_0\right) - J_1 = \left(\frac{8}{x^2} - 1\right)J_1 - \frac{4}{x}J_0$$

例子1. 计算积分 $\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx, a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$. 并计算 $L[J_0(t)], L[J_1(t)]$.

解. 用贝塞尔函数的积分表达式。

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos(bx \sin \theta) d\theta dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-ax} e^{ibx \sin \theta} d\theta dx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{x(-a+ib \sin \theta)} dx d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{-a+ib \sin \theta} e^{x(-a+ib \sin \theta)} \Big|_0^\infty d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-1}{-a+ib \sin \theta} d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a+ib \sin \theta}{a^2+b^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a}{a^2+b^2 \sin^2 \theta} d\theta. \end{aligned}$$

设 $t = \tan \theta$, 则 $dt = d(\tan \theta) = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$, 带入得

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a}{a^2+b^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \cos^2 \theta}{a^2+b^2 \sin^2 \theta} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+(a^2+b^2)t^2} dt.$$

设 $s = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}t$, 带入上式, 得到

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a}{a^2 + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \arctan s \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

从而

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

如果用留数定理, 可以说明

$$L[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \operatorname{Re}(p) > 0.$$

实际上当 $\operatorname{Re} p > 0$ 时

$$L[J_0(t)](p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} J_0(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-pt} \cos(t \sin \theta) d\theta dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{p^2 + (p^2 + 1)t^2} dt.$$

$\frac{p}{p^2 + (p^2 + 1)t^2}$ 作为复函数有两个一阶极点 $t_1, t_2 = \pm \frac{pi}{\sqrt{p^2 + 1}}$, 一个在上半平面 (t_1), 一个在下半平面 (t_2).

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{p^2 + (p^2 + 1)t^2}, t_1\right) = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{p}{p^2 + (p^2 + 1)t^2} \times (t - t_1) = \frac{p}{(p^2 + 1)(t - t_2)} \Big|_{t=t_1} = \frac{p}{(p^2 + 1)(t_1 - t_2)}.$$

$$L[J_0(t)](p) = \frac{1}{\pi} \times 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{p^2 + (p^2 + 1)t^2}, t_1\right) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

另当 $\operatorname{Re} p > 0$ 时

$$L[J_1(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} J_1(t) dt = - \int_0^{\infty} e^{-pt} J_0'(t) dt = -e^{-pt} J_0(t) \Big|_0^{\infty} - p \int_0^{\infty} e^{-pt} J_0(t) dt = 1 - pL[J_0(t)].$$

即

$$L[J_1(t)] = \frac{\sqrt{1+p^2} - p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

例子2. $n \geq 2$, 证明

$$\int_0^x x^n J_0(x) dx = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1} J_0(x) - (n-1)^2 x^2 \int_0^x x^{n-2} J_0(x) dx.$$

证明. 这是书后面的作业。

$$\int_0^x x^n J_0(x) dx = \int_0^x x^{n-1} x J_0(x) dx = \int_0^x x^{n-1} (x J_1(x))' dx = x^n J_1(x) - (n-1) \int_0^x x^{n-1} J_1(x) dx.$$

用微分关系 $J_1(x) = -(J_0(x))'$, 得

$$\int_0^x x^{n-1} J_1(x) dx = - \int_0^x x^{n-1} J_0'(x) dx = x^{n-1} J_0(x) + (n-1) \int_0^x x^{n-2} J_0(x) dx.$$

综合以上所述, 证明结论。

实际上, 对任意整数 m, n :

$$\begin{aligned}\int x^m J_n(x) dx &= \int x^{m-n} x^n J_n(x) dx = \int x^{m-n-1} (x^{n+1} J_{n+1}(x))' dx \\ &= x^m J_{n+1}(x) - (m-n-1) \int x^{m-1} J_{n+1}(x) dx.\end{aligned}$$

结合例子2, 可以说明最终 $\int x^m J_n(x) dx$ 总能表示成, $J_0, J_1, \int J_0$ 的组合。当 $m+n$ 为奇数时候, 尾巴项为

$$\int x J_0 dx = \int (x J_1)' dx = x J_1.$$

当 $m+n$ 为偶数的时候, 尾巴项 $\int J_0 dx$ 没法消掉。

0.3.3 渐近公式与零点

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, x \geq 0.$$

设 $u = \sqrt{x} y$, 得

$$y' = \frac{u'}{x^{1/2}} - \frac{u}{2x^{3/2}}, y'' = \frac{u''}{x^{1/2}} - \frac{u'}{x^{3/2}} + \frac{3u}{4x^{5/2}}.$$

得到

$$u'' + \left(1 + \frac{1/4 - \nu^2}{x^2}\right) u = 0.$$

当 $|x|$ 非常大得时候, 可以近似得认为

$$u'' + u = 0.$$

其通解为

$$u = C_1 \cos x + C_2 \sin x = A \cos(x + \theta).$$

实际上, 进一步地推导可以证明 (略)

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$N_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

从而可以发现 $J_\nu, J'_\nu, J_\nu + hJ'_\nu$ 都有无穷多正零点。这说明我们选取的边界条件总有可数无限个固有值。

0.4 贝塞尔方程的固有值问题

现在我们考虑贝塞尔方程的固有值问题,

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' + (\mu x^2 - \nu^2) y = 0, 0 \leq x \leq a \\ |y(0)| < \infty, \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0. \end{cases}$$

SL型为,

$$[xy']' - \frac{\nu^2}{x} + \mu xy = 0.$$

需要注意的是 $\rho = x$ ，因而内积为 $\langle f, g \rangle = \int_0^a f(x)g(x)x dx$ 。

由上节讨论可得，该方程的解为

$$y = C_1 J_\nu(\sqrt{\mu}x) + C_2 N_\nu(\sqrt{\mu}x).$$

代入边界条件， $C_2 = 0$ 。设 $\omega = \sqrt{\mu}$ ，则边界条件为

$$\alpha J_\nu(\omega a) + \beta \omega J'_\nu(\omega a) = 0.$$

上述方程有无数解，我们假设所有解为 $(0 = \omega_0 <) \omega_1 < \dots$ 。

(固有值 $\mu_0 = 0$ ，对应固有函数 $Y_0 = 1$)

固有值 $\mu_n = \omega_n^2$ ，对应固有函数 $Y_n = J_\nu(\omega_n x)$ 。

需要注意的是只有当 $\alpha = 0, \nu = 0$ 时， $\omega_0 = 0$ 存在。

我们需要以 $\{J_\nu(\omega_n x)\}_n$ 为正交基做傅里叶展开， $(0, a)$ 的函数 $f(x)$ 展开为

$$f = \text{可能的常数项} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_\nu(\omega_n x).$$

为了计算系数，我们需要计算 $\int_0^a x J_\nu^2(\omega_n) dx$ ，为此对下式乘以 $2y'$

$$x[xy']' + (\omega^2 x^2 - \nu^2)y = 0.$$

得到

$$2[xy'] [xy']' + (\omega^2 x^2 - \nu^2)2yy' = 0.$$

即

$$([xy']^2)' + (\omega^2 x^2 - \nu^2)(y^2)' = 0.$$

从0到a做积分，得到：

$$\int_0^a ([xy']^2)' dx = - \int_0^a (\omega^2 x^2 - \nu^2)(y^2)' dx = -(\omega^2 x^2 - \nu^2)y^2|_0^a + \int_0^a 2\omega^2 xy^2 dx.$$

上式左边 $= [xy']^2|_0^a = (ay'(a))^2$ ，从而

$$\int_0^a xy^2 dx = \frac{(ay'(a))^2 + (\omega^2 a^2 - \nu^2)y(a)^2 + \nu^2 y(0)^2}{2\omega^2}.$$

带入 $y = J_\nu(\omega x)$ 及 $\nu^2 J_\nu(0)^2 = 0$ ，得

$$\int_0^a xy^2 dx = \frac{a^2 \omega^2 J_\nu'^2(\omega a) + (\omega^2 a^2 - \nu^2) J_\nu^2(\omega a)}{2\omega^2}.$$

$\mathcal{N}_\nu^2 = \langle J_\nu(\omega x), J_\nu(\omega x) \rangle = \int_0^a x J_\nu^2(\omega x) dx$:

($\alpha \neq 0, \beta = 0$): 此时 $J_\nu(\omega a) = 0$ ，得到 $\mathcal{N}_\nu^2 = \frac{a^2}{2} J_\nu'^2(\omega a) = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(\omega a)$;

($\beta \neq 0, \alpha = 0$): 此时 $J'_\nu(\omega a) = 0$ ，得到 $\mathcal{N}_\nu^2 = \frac{(\omega^2 a^2 - \nu^2) J_\nu^2(\omega a)}{2\omega^2} = \frac{1}{2} (a^2 - \frac{\nu^2}{\omega^2}) J_\nu^2(\omega a)$;

(γ) $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$: 此时, 设 $h = \frac{\beta}{\alpha}$, 有 $J_\nu(\omega a) + h\omega J'_\nu(\omega a) = 0$, 得到 $\mathcal{N}_\nu^2 = \frac{1}{2}(\frac{a^2}{h^2\omega^2} + a^2 - \frac{v^2}{\omega^2})J_\nu^2(\omega a)$ 。

特别地, 当 $\nu = 0$ 时候:

$$(\alpha) \alpha \neq 0, \beta = 0: \mathcal{N}_0^2 = \frac{a^2}{2} J_1^2(\omega a);$$

$$(\beta) \alpha = 0, \beta \neq 0: \mathcal{N}_0^2 = \frac{a^2}{2} J_0^2(\omega a);$$

$$(\gamma) \alpha \neq 0, \beta \neq 0: \mathcal{N}_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{a^2}{h^2\omega^2} + a^2)J_0^2(\omega a)。$$

例子3. 设 $J_0(x) = 0$ 得所有正根为 $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$, 分别将 $(0, 1)$ 上得函数 $1, x^2$ 分解为 $J_0(\omega_i x)$ 的级数。

解. ω_i^2 以及 $J_0(\omega_i)$ 为对应如下零阶贝塞尔固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + \mu x^2 y = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ |y(0)| < \infty, y(1) = 0. \end{cases}$$

边界条件为 I 类边界条件, 所以 $\mathcal{N}_{0,i}^2 = \frac{1}{2} J_1^2(\omega_i)$ 。

首先对 1 分解:

$$\langle 1, J_0(\omega_i x) \rangle = \int_0^1 1 J_0(\omega_i x) x dx = \frac{1}{\omega_i^2} \int_0^{\omega_i} J_0(x) x dx = \frac{1}{\omega_i^2} \int_0^{\omega_i} (x J_1(x))' dx = \frac{J_1(\omega_i)}{\omega_i}.$$

从而

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle 1, J_0(\omega_i x) \rangle}{\mathcal{N}_{0,i}^2} J_0(\omega_i x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\omega_i J_1(\omega_i)} J_0(\omega_i x).$$

再对 x^2 做分解:

$$\langle x^2, J_0(\omega_i x) \rangle = \int_0^1 x^3 J_0(\omega_i x) dx = \frac{1}{\omega_i^4} \int_0^{\omega_i} J_0(x) x^3 dx.$$

我们用例子2的结果, 取 $n = 3$:

$$\int_0^x x^3 J_0(x) dx = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4 \int_0^x x J_0(x) dx = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4x J_1(x).$$

由牛顿莱布尼兹公式:

$$\begin{aligned} \langle x^2, J_0(\omega_i x) \rangle &= \frac{1}{\omega_i^4} (x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4x J_1(x)) \Big|_0^{\omega_i} \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} (\omega_i^3 J_1(\omega_i) + 2\omega_i^2 J_0(\omega_i) - 4\omega_i J_1(\omega_i)) \\ &= \frac{J_1(\omega_i)}{\omega_i} - \frac{4J_1(\omega_i)}{\omega_i^3}. \end{aligned}$$

从而

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x^2, J_0(\omega_i x) \rangle}{\mathcal{N}_{0,i}^2} J_0(\omega_i x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\omega_i J_1(\omega_i)} - \frac{8}{\omega_i^3 J_1(\omega_i)} \right) J_0(\omega_i x).$$

例子4. 设 $J'_0(x) = 0$ 得所有正根为 $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$, 将 $(0, 1)$ 上的函数 $1, x^2$ 分解为 $J_0(\omega_i x)$ 的级数。

解. $0, \omega_i^2$ 和其对应的 $1, J_0(\omega_i)$ 为如下零阶贝塞尔固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + \mu x^2 y = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ |y(0)| < \infty, y'(1) = 0. \end{cases}$$

边界条件为 II 类边界条件, 所以 $N_{0,i}^2 = \frac{1}{2} J_0^2(\omega_i)$.

首先对 1 分解: 就是 1.

再对 x^2 做分解: 首先求常数固有函数 1 的系数

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1^2 x dx = \frac{1}{2}.$$

$$\langle x^2, 1 \rangle = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

所以常数项系数 = $\frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{2}$.

齐次, 对其他项系数:

$$\langle x^2, J_0(\omega_i x) \rangle = \int_0^1 x^3 J_0(\omega_i x) dx = \frac{1}{\omega_i^4} \int_0^{\omega_i} J_0(x) x^3 dx.$$

我们用例子 2 的结果, 取 $n = 3$:

$$\int x^3 J_0(x) dx = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4 \int_0^x x J_0(x) dx = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4x J_1(x).$$

由牛顿莱布尼兹公式以及 $J_0'(\omega_i) = -J_1(\omega_i) = 0$:

$$\begin{aligned} \langle x^2, J_0(\omega_i x) \rangle &= \frac{1}{\omega_i^4} (x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4x J_1(x)) \Big|_0^{\omega_i} \\ &= \frac{1}{\omega_i^4} (\omega_i^3 J_1(\omega_i) + 2\omega_i^2 J_0(\omega_i) - 4\omega_i J_1(\omega_i)) \\ &= \frac{2J_0(\omega_i)}{\omega_i^2}. \end{aligned}$$

从而

$$x^2 = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x^2, J_0(\omega_i x) \rangle}{N_{0,i}^2} J_0(\omega_i x) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\omega_i^2 J_0(\omega_i)} J_0(\omega_i x).$$

例子 5 (零阶贝塞尔固有值问题). 有一个处于热平衡的理想金属圆柱, 半径高均为 1, 上下底温度分别为 $1 - r^2, 0$, 侧面温度为 0, 无热源, 求圆柱体内的温度分布.

解. 由对称性, 容易知道温度分布与角度无关, 不妨设温度 $u = u(r, z)$. 因而可以写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = \frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z^2} = 0, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \\ u|_{r=1} = 0. \\ u(0, z) = 0, u(1, z) = 1 - r^2. \end{cases}$$

分离变量, $u(r, z) = R(r)Z(z)$, 有

$$-\frac{Z''}{Z} = \frac{rR'' + R'}{rR}.$$

设上式为常值 $-\mu$, 得到固有值问题

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + \mu r^2 R = 0, 0 \leq r \leq 1 \\ |R(0)| < \infty, R(1) = 0. \end{cases}$$

这是零阶的贝塞尔固有值问题, 因为有一个边界条件是I类边界条件。因而零不是固有值, 设

$$J_0(\omega)$$

的所有正解为 $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots$ 。则对应固有值 ω_n^2 , 固有函数 $J_0(\omega_n r)$, 将固有值带入 Z_n 的方程, 得到:

$$Z_n'' - \omega_n^2 Z_n = 0.$$

$Z_n = A_n e^{\omega_n z} + B_n e^{-\omega_n z}$ 。从而

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\omega_n z} + B_n e^{-\omega_n z}) J_0(\omega_n r).$$

求系数,

$$u(r, 1) = 1 - r^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{\omega_i^3 J_1(\omega_i)} J_0(\omega_i r), u(r, 0) = 0.$$

对照得

$$\begin{cases} A_n + B_n = 0 \\ A_n e^{\omega_n} + B_n e^{-\omega_n} = \frac{\langle 1-r^2, J_0(\omega_n r) \rangle}{\langle J_0(\omega_n r), J_0(\omega_n r) \rangle} = \frac{8}{\omega_n^3 J_1(\omega_n)} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_n = \frac{8}{(e^{\omega_n} - e^{-\omega_n}) \omega_n^3 J_1(\omega_n)} \\ B_n = -\frac{8}{(e^{\omega_n} - e^{-\omega_n}) \omega_n^3 J_1(\omega_n)}. \end{cases}$$

从而

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(e^{\omega_n} - e^{-\omega_n}) \omega_n^3 J_1(\omega_n)} (e^{\omega_n z} - e^{-\omega_n z}) J_0(\omega_n r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{sh(\omega_n) \omega_n^3 J_1(\omega_n)} sh(\omega_n z) J_0(\omega_n r).$$

例子6. 有一半径为1的无限长金属圆柱, 初始温度为 $1 - r^2$, 热传导系数/密度/比热都是1, 侧面绝热, 无热源, 求圆柱体的温度变化。

解. 容易知道温度分布与角度无关与 z 无关, 不妨设温度 $u = u(t, r)$ 。因而可以写出定解问题

$$\begin{cases} u_t = \frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, 0 \leq r \leq 1, t > 0 \\ u_r|_{r=1} = 0, t > 0. \\ u(0, r) = 1 - r^2. \end{cases}$$

分离变量, 设 $u = T(t)R(r)$, 得

$$\frac{T'}{T} = \frac{rR'' + R'}{rR}.$$

左边为 t 得函数, 右边为 r 得函数, 因而为常数, 设为 $-\lambda$, 得到零阶固有值问题

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0, 0 \leq r \leq 1 \\ |R(0)| < \infty, R'(1) = 0. \end{cases}$$

和

$$T' + \lambda T = 0.$$

边界条件分别为自然边界条件和II类边界条件, 因为 $\lambda_0 = 0$ 为固有值, 对应固有函数为 $R_0 = 1$ 。设

$$J_0'(\omega) = 0$$

得所有正解为 $\omega_1 < \omega_2 < \dots$, 则固有值为 ω_n^2 , 对用固有函数为 $R_n = J_0(\omega_n r)$ 。代入固有值, 解 T_n 的微分方程

$$T_n' + \omega_n^2 T_n = 0$$

得 $T_0 = A_0$ 和 $T_n = A_n e^{-\omega_n^2 t}$, $n \geq 1$ 。所以定解问题得解为

$$u(t, r) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\omega_n^2 t} J_0(\omega_n r).$$

将 $1 - r^2$ 做展开

$$1 - r^2 = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\omega_n^2 J_0(\omega_n)} J_0(\omega_n r).$$

对照得:

$$A_0 = \frac{1}{2}, A_n = -\frac{4}{\omega_n^2 J_0(\omega_n)}, n \geq 1.$$

所以

$$u(t, r) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\omega_n^2 J_0(\omega_n)} e^{-\omega_n^2 t} J_0(\omega_n r).$$

0.5 勒让德固有值问题

在球坐标系, 尤其是存在轴对称性的时候做变量分离, 我们会碰到勒让德函数。

设有一个半径为 a 的金属球, 内部无热源, 表面的温度已知, 为 $f(\cos(\theta))$, $(r, \theta, \varphi), r \in [0, R], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)$ 为球极坐标系, $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ 。内部无热源, 金属球处于热平衡, 求温度分布?

在球极坐标下, 拉普拉斯有如下形式:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

很多物理问题, 特别是静电场中的问题, 都有轴对称性, 这时候, 解不依赖于 φ , 拉普拉斯可以化简为:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right),$$

其中 $u = u(r, \theta)$ 。

例如上述例子, 设 $u = u(r, \theta)$ 为温度分布, 首先写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(a, \theta) = f(\cos \theta) \end{cases}$$

分离变量, 设 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, 则有

$$\frac{1}{r^2}[r^2R']'\Theta + \frac{R}{r^2\sin\theta}[\sin\theta\Theta']' = 0.$$

即

$$-\frac{[r^2R']'}{R} = \frac{[\sin\theta\Theta']'}{\sin\theta\Theta}.$$

为常值, 设为 $-\lambda$. 得到固有值问题

$$(I) \quad \begin{cases} [\sin\theta\Theta']' + \lambda\sin\theta\Theta = 0 \\ |\Theta(0)| < \infty, |\Theta(\pi)| < \infty. \end{cases}$$

以及微分方程

$$-\frac{[r^2R']'}{R} = -\lambda.$$

做变量替换 $x = \cos\theta$, 则 $x \in [-1, 1]$, $\theta = \arccos x$.

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{d\arccos x} = -\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}, \sin\theta = \sqrt{1-x^2}.$$

所以

$$[\sin\theta\Theta']' = \frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\Theta) = -\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}(-(1-x^2)\frac{d}{dx}\Theta) = \sqrt{1-x^2}(-2x\frac{d\Theta}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}).$$

令 $y(x) = \Theta(\arccos x)$, 则 $\Theta(\theta) = y(\cos\theta)$, 得到固有值问题

$$(II) \quad \begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \\ |y(\pm 1)| < \infty. \end{cases}$$

这是勒让德方程得固有值问题。其SL型为

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0.$$

$k = 1 - x^2$, $q = 0$, $\rho = 1$, 两个边界条件都是自然边界条件, 因而零是固有值, 其他固有值都大于零。所有固有值都可以表示成 $n(n+1)$, 实际上只有当 n 是非负整数的时候才有有界解, 为了说明这件事情, 我们还是像贝塞尔函数那样找两个线性无关的特解, 假设解具有形式

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

带入固有值问题得

$$\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)a_i x^{i-2} - \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)a_i x^i - \sum_{i=0}^{\infty} 2ia_i x^i + n(n+1)\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 0.$$

从而

$$(i+2)(i+1)a_{i+2} - i(i-1)a_i - 2ia_i + n(n+1)a_i = 0.$$

即

$$a_{i+2} = \frac{(i-n)(i+n+1)}{(i+2)(i+1)}a_i.$$

令 $a_0 = a_1 = 1$, 奇偶项分离, 我们可以得到两个特解

$$y_1(x) = \sum_i a_{2i} x^{2i},$$

$$y_2(x) = \sum_i a_{2i+1} x^{2i+1}.$$

由递推公式:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2i}}{a_{2i-2}} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2i+1}}{a_{2i-1}} \right| = 1.$$

所以 y_1 与 y_2 得收敛半径至少都是1. 并且 y_1 为非零偶函数, y_2 为非零奇函数, y_1 和 y_2 线性无关. 即勒让德方程得所有解可以表示为

$$C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

当 n 为非负整数得时候, 我们按照奇偶性来讨论, 1). $n = 2k$ 为偶数, 此时

$$a_{2k+2} = \frac{(2k-n)(2k+n+1)}{(2k+2)(2k+1)} a_{2k} = 0.$$

顺带可以说明 $a_{2i} = 0, i = k+1, \dots$. 即 y_1 为多项式, 因而 $|y_1(\pm 1)| < \infty$. 2) 当 n 为奇数得时候, 也有类似讨论, 在此略去.

当 n 不是整数的时候, 可以证明

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_{2i} = c_1 \neq 0, \lim_{i \rightarrow \infty} a_{2i+1} = c_2 \neq 0.$$

$y_1(1)$ 收敛性与 $c_1 \sum_i 1^{2i}$ 一致, 极限趋向于 $+\infty$ 或者 $-\infty$. 因为是偶函数, 因而 $y_1(1) = y_1(-1) = +\infty$ 或者 $-\infty$. 反之, y_2 的 ± 1 的取值也是 $\pm\infty$ 但符号相反. 所以此时, y_1 和 y_2 无论怎么线性组合, 在 ± 1 的取值都不可能同时有界, 所以此时 $n(n+1)$ 不是固有值.

所以 (II) 的固有值为

$$\lambda_n = n(n+1), n = 0, 1, 2, \dots$$

λ_n 对应的固有函数为

$$y_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

证明. 设 $Y = (x^2 - 1)^n$, 则

$$(x^2 - 1)Y' = 2nx(x^2 - 1)^n = 2nxY.$$

两边求 $n+1$ 阶求导, 用莱布尼兹求导公式得

$$\begin{aligned} [(x^2 - 1)Y']^{(n+1)} &= C_{n+1}^0 (x^2 - 1)Y^{(n+2)} + C_{n+1}^1 2xY^{(n+1)} + C_{n+1}^2 2Y^{(n)} \\ &= (x^2 - 1)Y^{(n+2)} + 2(n+1)xY^{(n+1)} + n(n+1)Y^{(n)}. \end{aligned}$$

以及

$$[2nxY]^{(n+1)} = 2nxY^{(n+1)} + 2n(n+1)Y^{(n)}.$$

对照得并用 $y_n = Y^{(n)}$ 替换得到

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda_n y = 0.$$

我们一般在 y_n 前添加一个常数因子。

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} y_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

$p_n(x)$ 称为勒让德多项式, 如果把 $(x^2 - 1)^n$ 展开

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} x^{2n-2i}$$

得到

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \frac{(2n-2i)!}{2^n i!(n-i)!(2-2i)!} x^{2n-2i}.$$

称为级数表示, $[\cdot]$ 取整符号。

简单计算容易得到

$$p_0(x) = 1,$$

$$p_1(x) = x,$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

$p_n(x)$ 为 n 次多项式, 当 n 为偶数的时候为偶函数, 当 n 为奇数的时候为奇函数, $p_n(x)$ 的首项系数为 $\frac{(2n)!}{2^n n! n!}$ 。

现在我们已经有了 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ 以及固有值 $\lambda_n = n(n+1)$,

固有值问题(I) 的固有值同样为 $\lambda_n = n(n+1)$, 固有函数为 $\Theta_n = p_n(\cos \theta)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. 将固有值带到 R_n 的函数, 有

$$-\frac{[r^2 R_n']'}{R_n} = -\lambda_n.$$

即

$$r^2 R_n'' + 2r R_n' - n(n+1)R_n = 0.$$

这是一个欧拉方程, 做变量替换 $r = e^t$, 得到

$$\frac{d^2 R_n}{dt^2} + \frac{dR_n}{dt} - n(n+1)R_n = 0.$$

解之,

$$R_n(r) = A_n e^{nt} + B_n e^{-(n+1)t} = A_n r^n + B_n r^{-n-1}.$$

所以

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos \theta).$$

在本例子中, $B_n = 0$. 令 $r = a$, 得到

$$f(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n p_n(\cos \theta).$$

需要将 $f(\cos \theta)$ 做类似傅里叶分解:

$$f(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n p_n(\cos \theta).$$

其中

$$f_n = \frac{\int_0^\pi f(\cos \theta) p_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi p_n^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta} = \frac{\int_{-1}^1 f(x) p_n(x) dx}{\int_{-1}^1 p_n^2(x) dx}.$$

对照得, $A_n = \frac{f_n}{a^n}$ 以及

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{r}{a}\right)^n p_n(\cos \theta).$$

为了求系数, 我们需要将连续函数沿着 p_n 做傅里叶分解. 由SL理论, $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ 是一组完备正交基, 从而可以把 $[-1, 1]$ 上的符合边界条件的连续函数分解为 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ 的线性组合, 且一致收敛, 不符合的也能分解, 除了可能边界上不收敛/整体不一致收敛其他都对. 从而可以得到几个简单的事实:

- (1) 当 $m \neq n$ 时候 $\int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) dx = 0$;
- (2) 设 $P_n(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ 为 n 次多项式, 则 $P_n(x)$ 可以由 p_0, p_1, \dots, p_n 线性组合, 系数可以用待定系数法确定, 且 p_n 前面的系数等于 $a_n \frac{2^n n! n!}{(2n)!}$;
- (3) 如果 $m \leq n$, 则 $\int_{-1}^1 P_m(x) p_n(x) dx = 0$;
- (4) 如果多项式 $P_n(x)$ 只有奇次项, 则展开成 $\{p_{2n+1}\}$ 的线性组合; 如果多项式 $P_n(x)$ 只有偶次项, 则展开成 $\{p_{2n}\}$ 的线性组合.

例子7. 设有一个半径为 a 的金属球, 球表面的温度已知, 为 $f(\cos \theta) = \cos^2(\theta)$, 内部无热源, 金属球处于热平衡, 求温度分布?

解. 取极坐标 (r, θ, φ) , $r \in [0, a]$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ 表面温度与 φ 无关, 由对称性, 球内的温度分布也与 φ 无关, 因而可以假设 $u = u(r, \theta)$. 写出定解问题为:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \leq r \leq a, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u|_{r=a} = \cos^2(\theta), \theta \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

由以上讨论可知,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos \theta).$$

球心温度有限, 因而 $B_n = 0$, 所以

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n p_n(\cos \theta).$$

令 $r = a$ 得到

$$\cos^2 \theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n p_n(\cos \theta).$$

对照可得, 除了 p_0, p_2 项之外, 其余全部为0. 所以

$$\cos^2 \theta = A_0 + A_2 a^2 \left(\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \right).$$

解得 $A_0 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{2}{3a^2}$. 所以

$$u(r, \theta) = \frac{1}{3} + \frac{2r^2}{3a^2} p_2(\cos \theta) = \frac{r^2}{a^2} \cos^2 \theta + \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{3a^2} \right).$$

例子8. 设有一个半径为 R 厚度为 $R/2$ 的空心球, 外表面的温度为 $\cos^2(\theta)$, 内表面的温度为 $\cos(\theta)$, 空心球处于热平衡, 求温度分布?

解. 取极坐标 $(r, \theta, \varphi), r \in [0, a], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$ 表面温度与 φ 无关, 由对称性, 空心球内的温度分布也与 φ 无关, 因而可以假设 $u = u(r, \theta)$. 写出定解问题为:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \leq r \leq a, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u|_{r=R} = \cos^2(\theta), \theta \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

由以上讨论可知,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos \theta).$$

注意到

$$\begin{aligned} \cos \theta &= p_1(\cos \theta), \\ \cos^2 \theta &= \frac{1}{3} p_0(\cos \theta) + \frac{2}{3} p_2(\cos \theta). \end{aligned}$$

分别带入 R 和 $R/2$ 得 $A_n = B_n = 0, n \geq 3$ 以及

$$\begin{cases} A_0 + \frac{B_0}{R} = \frac{1}{3} \\ A_0 + \frac{2B_0}{R} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 R + \frac{B_1}{R^2} = 0 \\ \frac{A_1 R}{2} + \frac{4B_1}{R^2} = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 R^2 + \frac{B_2}{R^3} = \frac{2}{3} \\ \frac{A_2 R^2}{4} + \frac{8B_2}{R^3} = 0. \end{cases}$$

解得 $A_0 = \frac{2}{3}, B_0 = -\frac{R}{3}, A_1 = -\frac{2}{7R}, B_1 = \frac{2}{7}R^2, A_2 = \frac{64}{93R^2}, B_2 = -\frac{2}{93}R^3$. 最终结果我们就直接省略了。

关于半球问题: 第一类边界条件奇展开, 且只有奇数次项; 第二类边界条件偶展开, 且只有偶次项。

例子9. 设有一个半径为 a 的金属半球, 球表面的温度已知, 为 $\cos^2(\theta)$, 内部无热源, 金属半球处于热平衡, 根据以下情况分别求温度分布?

(1) 底部绝热;

(2) 底部恒温 = 0.

解. (1)把半球补成一个完整得球, 要使得底部绝热, 仅需让球得表面温度上下对称即可, 即

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \leq r \leq a, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u|_{r=R} = \cos^2(\theta). \end{cases}$$

就是上上例子.

(2)把半球补成一个完整得球, 要使得底部恒温0, 仅需让球得表面温度上下反对称即可, 即

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \leq r \leq a, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u|_{r=R} = \cos^2(\theta), \theta \in [-\pi, 0] \\ u|_{r=R} = -\cos^2(\theta), \theta \in [0, \pi]. \end{cases}$$

我们暂时没法求系数.

0.5.1 勒让德函数的母函数与递推公式

勒让德函数的母函数为

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, x \in [-1, 1], -1 < t < +1.$$

我们尝试对 t 在0点Tayler展开.

$$(1+s)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})!}{k!(-\frac{1}{2}-k)!} s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} s^k.$$

回忆 Γ 函数, $\Gamma(x+1) = x!$. 所以

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} (t^2-2xt)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} t^k (t-2x)^k.$$

t^n 前面的系数

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} C_k^{n-k} (-2x)^{2k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(2k-n+1)} (-2x)^{2k-n}.$$

注意到

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

所以

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-k)} = \left(\frac{1}{2}-k\right) \times \left(\frac{1}{2}-(k-1)\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} k!}.$$

所以 t^n 前系数为

$$= \sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^n \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} k!} \frac{1}{(n-k)!(2k-n)!} (-2x)^{2k-n}.$$

其中 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 为不小于 $\frac{n}{2}$ 的最小整数。替换 $l = n - k$ 则有上式等于

$$\sum_{l=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \frac{(-1)^{n-l}(2n-2l)!}{2^{2n-2l}(n-l)!} \frac{1}{l!(n-2l)!} (-2x)^{n-2l} = \sum_{l=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \frac{(-1)^l(2n-2l)!}{2^n(n-l)!l!(n-2l)!} x^{n-2l} = p_n(x).$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^n.$$

令 $x = 1$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

对照得

$$p_n(1) = 1.$$

令 $x = -1$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(-1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

对照得

$$p_n(-1) = (-1)^n.$$

令 $x = 0$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(0)t^n = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!k!} t^{2k}.$$

对照得: n 为奇数, 则 $p_n(0) = 0$; $n = 2k$ 为偶数, 则 $p_n(0) = \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!k!}$ 。利用母函数可以导出勒让德多项式的递推公式($n \geq 1$)。

$$(1) (n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x) = 0;$$

$$(2) np_n(x) - xp'_n(x) + p'_{n-1}(x) = 0;$$

$$(3) np_{n-1}(x) - p'_n(x) + xp'_{n-1}(x) = 0;$$

$$(4) p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x).$$

证明. 记 $\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$, 则

$$\varphi_t = (x-t)\varphi^3,$$

$$\varphi_x = t\varphi^3.$$

先证明(1)

$$\varphi_t = \sum_{n=1}^{\infty} np_n(x)t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)p_{n+1}(x)t^n,$$

$$2t\varphi_t + \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)p_n(x)t^n,$$

$$t\varphi + t^2\varphi_t = \sum_{n=0}^{\infty} np_{n-1}(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} np_{n-1}(x)t^n.$$

所以

$$\sum_{n \geq 0} ((n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x))t^n = \varphi_t - 2xt\varphi_t - x\varphi + t\varphi + t^2\varphi_t.$$

注意到

$$\varphi_t - 2xt\varphi_t + t^2\varphi_t = [1 - 2xt + t^2](x-t)\varphi^3 = (x-t)\varphi.$$

所以 $(n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x) = 0, n \geq 1$.

再证明(2).

$$\varphi_x = \sum_{n=0}^{\infty} p'_n(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} p'_n(x)t^n.$$

所以

$$t\varphi_t - x\varphi_x + t\varphi_x = \sum_{n \geq 1} (np_n(x) - xp'_n(x) + p'_{n-1}(x))t^n.$$

注意到

$$t\varphi_t - x\varphi_x + t\varphi_x = [t(x-t) - xt + t^2]\varphi^3 = 0.$$

所以 $np_n(x) - xp'_n(x) + p'_{n-1}(x) = 0, n \geq 1$.

再证明(3).

$$(t\varphi + t^2\varphi_t) - \varphi_x + tx\varphi_x = \sum_{n \geq 1} (np_{n-1}(x) - p'_n(x) + xp'_{n-1}(x))t^n.$$

注意到

$$(t\varphi + t^2\varphi_t) - \varphi_x + tx\varphi_x = t\varphi + [t^2(x-t) - t + t^2x]\varphi^3 = t\varphi - t[1 - 2xt + t^2]\varphi^3 = 0.$$

所以 $np_{n-1}(x) - p'_n(x) + xp'_{n-1}(x), n \geq 1$.

最后证明(4).

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_x}{t} - t\varphi_x - (2t\varphi_t + \varphi) &= p'_1(x) - p_0(x) + \sum_{n \geq 1} (p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) - (2n+1)p_n(x))t^n \\ &= \sum_{n \geq 1} (p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) - (2n+1)p_n(x))t^n. \end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\varphi_x}{t} - t\varphi_x - (2t\varphi_t + \varphi) = -\varphi + [1 - t^2 - 2t(x-t)]\varphi^3 = \varphi + \varphi = 0.$$

所以 $p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x)$.

例子10. $m, n \geq 0$ 正整数, 求积分

$$\int_0^1 x^m p_n(x) dx.$$

解. 我们先处理两种简单情形。

$$n = 0 \text{ 时候, 化为 } \int_0^1 x^m p_0(x) dx = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}.$$

$m = 0, n \geq 1$ 的时候,

$$\int_0^1 p_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} \int_0^1 p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) dx = \frac{-p_{n+1}(0) + p_{n-1}(0)}{2n+1}.$$

特别地, 当 n 为非零偶数的时候为 0。

当 $m, n \geq 1$ 的时候,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^m p_n(x) dx &= \frac{1}{n} \int_0^1 x^m (x p'_n(x) - p'_{n-1}(x)) dx \\ &= \frac{1}{n} \left((x^{m+1} p_n(x) - x^m p_{n-1}(x)) \Big|_0^1 - \int_0^1 (m+1)x^m p_n(x) - m x^{m-1} p_{n-1}(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(- \int_0^1 (m+1)x^m p_n(x) - m x^{m-1} p_{n-1}(x) dx \right). \end{aligned}$$

整理得

$$\int_0^1 x^m p_n(x) dx = \frac{m}{m+n+1} \int_0^1 x^{m-1} p_{n-1}(x) dx.$$

$(m, n) \rightarrow (m-1, n-1)$ 重复上述过程最终可以化成简单情形。而且容易看出把积分区域换成 $[-1, 0]$ 或者 $[-1, 1]$, 这种流程依然成立。例如

$$\int_{-1}^1 p_4(x) x^4 dx = \frac{4}{9} \int_{-1}^1 p_3(x) x^3 dx = \frac{4}{21} \int_{-1}^1 p_2(x) x^2 dx = \frac{8}{105} \int_{-1}^1 p_1(x) x^1 dx = \frac{8}{315} \int_{-1}^1 p_0(x) x^0 dx = \frac{16}{315}.$$

0.5.2 勒让德傅里叶展开

在处理勒让德固有值问题的时候, 我们需要求

$$\int_{-1}^1 p_n^2(x) dx.$$

为此, 我们将母函数平方后从 -1 到 1 做积分。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-2xt+t^2} dx = \sum_n \sum_m \int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) t^{m+n} dx.$$

左边原函数 $\frac{\ln(1-2xt+t^2)}{-2t}$, 所以

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-2xt+t^2} dx = \frac{\ln(1-2xt+t^2)}{-2t} \Big|_{-1}^1 = \frac{\ln(1+t) - \ln(1-t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}.$$

右边由 SL 理论, 当 $m \neq n$ 的时候 $\int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) dx = 0$ 。所以右边等于

$$\sum_n \left(\int_{-1}^1 p_n^2(x) dx \right) t^{2n}.$$

对照得

$$\int_{-1}^1 p_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

例子11. 求积分

$$\int_{-1}^1 p_4(x)(1+x+2x^2+3x^3+4x^4)dx.$$

解. 可以将 $1+x+2x^2+3x^3+4x^4$ 展开为

$$1+x+2x^2+3x^3+4x^4 = C_0p_0 + C_1p_1 + C_2p_2 + C_3p_3 + C_4p_4.$$

我们只需要关心 C_4 , 因为

$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

所以 $C_4 = \frac{32}{35}$. 所以

$$\int_{-1}^1 p_4(x)(1+x+2x^2+3x^3+4x^4)dx = \frac{32}{35} \int_{-1}^1 p_4^2(x)dx = \frac{32}{35} \times \frac{2}{9} = \frac{64}{315}.$$

至此, 由SL理论, 任何 $(-1, 1)$ 上得连续有界函数都可以用勒让德多项式展开.

例子12. 将

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < \alpha \\ 1/2 & x = \alpha \\ 1 & \alpha < x < 1. \end{cases}$$

按勒让德多项式展开.

解.

$$\int_{-1}^1 f(x)p_0(x)dx = \int_{\alpha}^1 p_0(x)dx = 1 - \alpha.$$

当 $n \geq 1$,

$$\int_{-1}^1 f(x)p_n(x)dx = \frac{1}{2n+1} \int_{\alpha}^1 p_n(x)dx = \frac{1}{2n+1} \int_{\alpha}^1 p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x)dx = \frac{p_{n-1}(\alpha) - p_{n+1}(\alpha)}{2n+1}.$$

所以

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{2}p_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n-1}(\alpha) - p_{n+1}(\alpha)}{2}p_n(x).$$

现在我们可以处理上节的半球问题.

例子13.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \leq r \leq a, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u|_{r=R} = \cos^2(\theta), \theta \in [-\pi, 0] \\ u|_{r=R} = -\cos^2(\theta), \theta \in [0, \pi]. \end{cases}$$

解. 由前面的讨论可知, 定解问题的解可以表示为

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1})p_n(\cos \theta).$$

因为 $|u(0, \theta)| < \infty$, 所以 $B_n = 0$ 。所以

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n p_n(\cos \theta).$$

令 $r = R$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n p_n(\cos \theta) = \begin{cases} \cos^2(\theta), \theta \in [-\pi, 0] \\ -\cos^2(\theta), \theta \in [0, \pi]. \end{cases}$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n p_n(x) = f(x) = \begin{cases} x^2, x \in [0, 1] \\ -x^2, x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

我们将 $f(x)$ 按勒让德多项式分解

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x).$$

其中

$$C_n = \frac{\langle f(x), p_n(x) \rangle}{\langle p_n(x), p_n(x) \rangle}.$$

注意到 $f(x)$ 为奇函数, 所以当 n 为偶数得时候,

$$\langle f(x), p_n(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) p_n(x) dx = 0.$$

当 n 为奇数得时候, 如果 $n = 1$

$$\langle f(x), p_1(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x) p_1(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 p_1(x) dx = \int_0^1 x p_0(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

当 n 为奇数且 $n \geq 3$ 时

$$\begin{aligned} \langle f(x), p_n(x) \rangle &= \int_{-1}^1 f(x) p_n(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 p_n(x) dx = \frac{4}{n+3} \int_0^1 x p_{n-1}(x) dx = \frac{4}{(n+3)(n+1)} \int_0^1 p_{n-2}(x) dx \\ &= \frac{4(p_{n-3}(0) - p_{n-1}(0))}{(n+3)(n+1)(2n-3)}. \end{aligned}$$

所以

$$u = \frac{r}{2R} p_1(\cos \theta) + \sum_{n \text{ 为奇数}, n \geq 3} \frac{4(p_{n-3}(0) - p_{n-1}(0))}{(n+3)(n+1)(2n-3)} \left(\frac{r}{R}\right)^n p_n(\cos \theta).$$

例子14. 一个半径为 a 的空心金属球壳内部有一个点电荷 $4\pi\epsilon_0 q$ (ϵ_0 是真空介电常数), 它与球心的距离为 b , 求球内电势分布。

解. 假设点电荷处于 z 正轴上, 则由轴对称性, 电势与 φ 无关。我们可以把电势分成两部分, 一部分是由点电荷产生的电势为

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{q}{\rho(x, y, z)}$$

其中

$$\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - b)^2} = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta - b)^2} = \sqrt{r^2 - 2br \cos \theta + b^2}.$$

另一部分是由球壳上的感应电荷产生的电势, 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 + z^2 < a^2 \\ u|_{r=a} = -\frac{q}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + (a \cos \theta - b)^2}}, \theta \in [0, \pi]. \end{cases}$$

上述定解问题的解可以表示为

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos \theta).$$

球壳上的感应电荷在球心的电势有界, 所以 $B_n = 0$. 所以

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n p_n(\cos \theta).$$

我们将边界电势按勒让德多项式进行分解

$$-\frac{q}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + (a \cos \theta - b)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(\cos \theta).$$

其中

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \times \int_0^\pi -\frac{q}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + (a \cos \theta - b)^2}} p_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = -\frac{(2n+1)q}{2a} \int_{-1}^1 \frac{p_n(x)}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2 - 2\frac{b}{a}x}} dx.$$

由母函数公式

$$\int_{-1}^1 \frac{p_n(x)}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2 - 2\frac{b}{a}x}} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-1}^1 p_n(x) p_k(x) \left(\frac{b}{a}\right)^k dx = \left(\frac{b}{a}\right)^n \times \frac{2}{2n+1}.$$

所以,

$$C_n = -\frac{b^n q}{a^{n+1}} = A_n a^n \Rightarrow A_n = -\frac{b^n q}{a^{2n+1}}.$$

所以

$$u = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n q}{a^{2n+1}} r^n p_n(\cos \theta) = -\frac{q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{br}{a^2}\right)^n p_n(\cos \theta).$$

再次用母函数公式.

$$u = -\frac{q}{a} \times \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{br}{a^2} \cos \theta + (\frac{br}{a^2})^2}} = -\frac{q}{\sqrt{a^2 - 2br \cos \theta + (\frac{br}{a})^2}}.$$

所以电势

$$\varphi = \varphi_1 + u = \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2br \cos \theta + b^2}} - \frac{q}{\sqrt{a^2 - 2br \cos \theta + (\frac{br}{a})^2}}$$

作业

24 把下列函数按勒让德多项式展开:

(1) x^3

(2) x^4

(3) $|x|$

28 半球的球面保持温度 u_0 , 分别再下列条件下求稳定温度分布:

(1) 底面保持零度;

(2) 底面绝热。

29 半径为 R 厚度为 $R/2$ 的空心半球, 内外球面的温度保持为

$$A \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \theta \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

底面温度为 $A/2$, 求半空心球温度分布?

作业: 12, 13, 16, 18(1), 26.

12. 设 ω_n 是 $J_0(2\omega) = 0$ 的正实根, 把函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0.5, & x = 1 \\ 0, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

展开成 $J_0(\omega_n x)$ 的级数。

13. 设 ω_n 是 $J_1(\omega) = 0$ 的正实根, 把函数 $f(x) = x, 0 < x < 1$ 展开成 $J_1(\omega_n x)$ 的级数。

16. 半径为 R 的无限长圆柱的侧表面保持一定的温度 u_0 , 柱子内的初始温度为 0, 内部无热源, 求柱子内的温度分布变化?

18(1). 解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + u_{zz} = 0, & 0 \leq r \leq a, 0 < z < l \\ u(a, z) = 0, \\ u(r, 0) = 0, u(r, l) = T_0(\text{常数}). \end{cases}$$

26 在半径为 1 的球内求调和函数 ($\Delta u = 0$), 使得

$$u|_{r=1} = 3 \cos(2\theta) + 1.$$