量子力学 B
2021 秋季学期
作业 12 *(截止期: 12 月 31 号周五课上)*

1. 自旋 1/2 的三维各相同性谐振子处于基态。求在微扰$V = \lambda\sigma_z x^2$作用下的基态能量，精确到二阶小量。

2. 对于一维谐振子，如果取变分波函数为(其中 a 为变分参数)

$$\psi(x) = \begin{cases} A\cos(\pi x/a), & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0, & |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

用变分法求基态能量，并与精确解比较。

3. 处于基态的一维简谐振子在$t \geq 0$时受到微扰势 $\hat{V} = Ve^{-at}\hat{x}$（$V, a$均为大于零的常数）的作用，利用一阶含时微扰论，求解$t \to +\infty$时体系处于简谐振子第一激发态的几率。

4. 某自旋为 1/2 的粒子在磁场的作用下 Hamiltonian 为

$$\hat{H} = -\mu\left[B_0\hat{\sigma}_z + B_1\cos(2\omega_0 t)\hat{\sigma}_x - B_1\sin(2\omega_0 t)\hat{\sigma}_y\right],$$

其中 $\omega_0 = \mu B_0/\hbar$。设 t=0 时粒子处于 $\hat{S}_z$ 算符本征值为$\dfrac{\hbar}{2}$的本征态上。

a. 用一阶含时微扰论求在时间 t 粒子处于 $\hat{S}_z$ 算符本征值为-$\dfrac{\hbar}{2}$ 的本征态上的几率。

b. 求上一问的精确解。

1. 自旋 1/2 的三维各相同性谐振子处于基态。求在微扰$V=\lambda\sigma_z x^2$作用下的基态能量，精确到二阶小量。

解：$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_x+\hat{a}_x^+)$

$\hat{x}^2=\frac{\hbar}{2m\omega}[\hat{a}_x^2+(\hat{a}_x^+)^2+2\hat{a}_x^+\hat{a}_x+1]$

取 $|\uparrow\rangle$ 与 $|\downarrow\rangle$ 为 x 方向的两个自旋本征态

而 $\hat{\sigma}_z|\uparrow\rangle=|\downarrow\rangle \quad \hat{\sigma}_z|\downarrow\rangle=|\uparrow\rangle$

写出在 $\{|000\uparrow\rangle \ |000\downarrow\rangle \ |200\uparrow\rangle \ |200\downarrow\rangle\}$ 表象中 $\hat{H}_0, \hat{V}$ 对应的矩阵如下：

$$\hat{H}_0\to\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\hbar\omega & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\hbar\omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{7}{2}\hbar\omega & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2}\hbar\omega\end{pmatrix}$$

$$\hat{V}\to\begin{pmatrix}0 & \frac{\hbar\lambda}{2m\omega} & 0 & \frac{\sqrt{2}\hbar\lambda}{2m\omega}\\ \frac{\hbar\lambda}{2m\omega} & 0 & \frac{\sqrt{2}\hbar\lambda}{2m\omega} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}\hbar\lambda}{2m\omega} & 0 & \frac{5\hbar\lambda}{2m\omega}\\ \frac{\sqrt{2}\hbar\lambda}{2m\omega} & 0 & \frac{5\hbar\lambda}{2m\omega} & 0\end{pmatrix}$$

对角化矩阵：$\frac{\hbar\lambda}{2m\omega}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 得到特征值 $\frac{\hbar\lambda}{2m\omega}$ 与 $-\frac{\hbar\lambda}{2m\omega}$，对应归一化特征向量设为 $|\alpha\rangle$ $|\beta\rangle$.

$|\alpha\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}(|000\uparrow\rangle+|000\downarrow\rangle)$

$|\beta\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}(|000\uparrow\rangle-|000\downarrow\rangle)$

之后 $V_{13}=\langle\alpha|\hat{V}'|200\uparrow\rangle=\frac{\hbar\lambda}{2m\omega}=V_{31}$

$V_{14}=\langle\alpha|\hat{V}'|200\downarrow\rangle=\frac{\hbar\lambda}{2m\omega}=V_{41}$

$V_{23}=\langle\beta|\hat{V}'|200\uparrow\rangle=-\frac{\hbar\lambda}{2m\omega}=V_{32}$

$V_{24}=\langle\beta|\hat{V}'|200\downarrow\rangle=\frac{\hbar\lambda}{2m\omega}=V_{42}$

二阶修正为

$$2\times\left(\frac{\hbar\lambda}{2m\omega}\right)^2 \Big/ -2\hbar\omega = -\frac{\hbar\lambda^2}{4m^2\omega^3}$$

则基态能量的修正到λ二阶的值为

$$\frac{3}{2}\hbar\omega \pm \frac{\hbar\lambda}{2m\omega} - \frac{\hbar\lambda^2}{4m^2\omega^3}$$

2. 对于一维谐振子，如果取变分波函数为(其中 a 为变分参数)

$$\psi(x) = \begin{cases} A\cos(\pi x/a), & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0, & |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$$

用变分法求基态能量，并与精确解比较。

解 在坐标表象下，$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

由归一化条件：

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\langle H\rangle = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{2}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx$$

$$= \frac{2}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right)dx$$

$$= \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \frac{m\omega^2a^2(-6+\pi^2)}{24\pi^2}$$

令 $\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial a} = 0 \Rightarrow a = \pi\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\left(\frac{3}{-6+\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}}$

代入得

$$\langle H\rangle_{min} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-6+\pi^2}{3}}\hbar\omega \approx 1.13572\times\frac{1}{2}\hbar\omega = 1.13572 E_0$$

3. 处于基态的一维简谐振子在$t \geq 0$时受到微扰势 $\hat{V} = Ve^{-at}\hat{x}$（$V, a$均为大于零的常数）的作用，利用一阶含时微扰论，求解$t \to +\infty$时体系处于简谐振子第一激发态的几率。

解：考察 $\langle 1|\hat{V}|0\rangle = Ve^{-at}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 1|\hat{a}^+ + \hat{a}|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}Ve^{-at}$

$$\omega_{10} = \frac{\hbar\omega}{\hbar} = \omega$$

则 $\tilde{C}_1(t) \approx -\frac{i}{\hbar}\int_0^t V_{10}(t') e^{i\omega t'} dt'$

$$= -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, V e^{(i\omega - a)t'} dt'$$

$$= \frac{-iV}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \frac{e^{(i\omega-a)t}-1}{i\omega - a}$$

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{C}_1(t) = \frac{iV}{(i\omega-a)\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

则 $\lim_{t\to\infty} P_{0\to 1}(t) = \frac{V^2}{2m\omega\hbar(a^2+\omega^2)}$

4. 某自旋为 1/2 的粒子在磁场的作用下 Hamiltonian 为

$$\hat{H} = -\mu\left[B_0\hat{\sigma}_z + B_1\cos(2\omega_0 t)\hat{\sigma}_x - B_1\sin(2\omega_0 t)\hat{\sigma}_y\right],$$

其中 $\omega_0 = \mu B_0/\hbar$。设 t=0 时粒子处于 $\hat{S}_z$ 算符本征值为 $\frac{\hbar}{2}$ 的本征态上。

a. 用一阶含时微扰论求在时间 t 粒子处于 $\hat{S}_z$ 算符本征值为-$\frac{\hbar}{2}$ 的本征态上的几率。

b. 求上一问的精确解。

解：在 $\{|\uparrow\rangle\ |\downarrow\rangle\}$ 表象下 $\sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$

则 $\hat{H}$ 对应的矩阵

$$H = -\mu\left[B_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + B_1\cos(2\omega_0 t)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + B_1\sin(2\omega_0 t)\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$= -\mu\begin{pmatrix}B_0 & B_1 e^{2i\omega_0 t}\\ B_1 e^{-2i\omega_0 t} & -B_0\end{pmatrix}$$

a. 利用一阶含时微扰论，认为

$$\hat{H}_0 = -\mu\begin{pmatrix}B_0 & 0\\ 0 & -B_0\end{pmatrix} \qquad \hat{V}(t) = -\mu\begin{pmatrix}0 & B_1 e^{2i\omega_0 t}\\ B_1 e^{-2i\omega_0 t} & 0\end{pmatrix}$$

则 $E_{(\downarrow)} = \langle\downarrow|\hat{H}_0|\downarrow\rangle = \mu B_0$ $E_{(\uparrow)} = \langle\uparrow|\hat{H}_0|\uparrow\rangle = -\mu B_0$

$\omega_{\downarrow\uparrow} = 2\omega_0$

$$\langle\downarrow|\hat{V}(t)|\uparrow\rangle = -\mu B_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\omega_0 t} \\ e^{-2i\omega_0 t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\mu B_1 e^{-2i\omega_0 t}$$

则 $\tilde{C}_\downarrow(t) \simeq \frac{i}{\hbar}\int_0^t \mu B_1 e^{-2i\omega_0 t'} e^{2i\omega_0 t'} dt'$

$$= \frac{i\mu B_1}{\hbar} t$$

则 $P_{\uparrow\to\downarrow}(t) \approx \left(\frac{\mu B_1}{\hbar} t\right)^2$

即在一阶近似下粒子处于 $|\downarrow\rangle$ 的概率为 $\left(\frac{\mu B_1}{\hbar} t\right)^2$

b. 令 $\frac{\mu B_1}{\hbar} = \omega_1$

$$H = -\hbar \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{2i\omega_0 t} \\ \omega_1 e^{-2i\omega_0 t} & -\omega_0 \end{pmatrix}$$ 设 t 时刻 $|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$

代入薛定谔方程可得

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{p}(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} = -\hbar \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{2i\omega_0 t} \\ \omega_1 e^{-2i\omega_0 t} & -\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

得到 $$\begin{cases} \dot{p}(t) = i\omega_0 p(t) + i\omega_1 e^{2i\omega_0 t} q(t) \\ \dot{q}(t) = i\omega_1 e^{-2i\omega_0 t} p(t) - i\omega_0 q(t) \end{cases}$$

利用 Mathematica 可以得到

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{i\omega_0 t}(e^{-i\omega_1 t} + e^{i\omega_1 t}) \\ \frac{1}{2} e^{-i\omega_0 t}(e^{i\omega_1 t} - e^{i\omega_1 t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t}\cos\omega_1 t \\ i e^{-i\omega_0 t}\sin\omega_1 t \end{pmatrix}$$

则 $P_\downarrow(t) = |\langle\downarrow|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2(\omega_1 t) = \sin^2\left(\frac{\mu B_1}{\hbar} t\right)$

(注意到 $t\to 0$ 时 $P_\downarrow(t) = \left(\frac{\mu B_1}{\hbar} t\right)^2$，与 a 中结论自洽)

习题课四 2022/1/3

$\boxed{\text{非简并微扰}}$

- 能量的零级近似: $E_k^{(0)}$
- 能量的一级近似: $E_k \approx E_k^{(0)} + H'_{kk}$
- 波函数零级近似: $|\psi_k\rangle \approx |\psi_k^{(0)}\rangle$
- 能量的二级近似: $E_k \approx E_k^{(0)} + H'_{kk} + \sum_{n\neq k} \frac{|H'_{nk}|^2}{E_k^{(0)}-E_n^{(0)}}$
- 波函数一级近似: $|\psi_k\rangle \approx |\psi_k^{(0)}\rangle + \sum_{n\neq k} \frac{H'_{nk}}{E_k^{(0)}-E_n^{(0)}} |\psi_n^{(0)}\rangle$

$\boxed{\text{简并}} \longrightarrow \boxed{\text{一阶破除}} \xrightarrow{\text{失效}} \boxed{\text{二阶破除}} \xrightarrow{\text{失效}} \boxed{\text{Let it go...}}$

一阶破除 $\xrightarrow{\text{成功}}$ 非简并微扰

二阶破除 $\xrightarrow{\text{成功}}$ 非简并微扰

一阶破除: 解 H' 得本征值为 $E_m^{(1)}$，本征态为新的 $|\psi_k^{(0)}\rangle$

二阶破除: 解 $\left(\sum_{n\neq m\mu} \frac{H'_{m\nu,n} H'_{n,m\mu}}{E_m^{(0)}-E_n^{(0)}}\right)$ 得本征值 $E_m^{(2)}$

1. 自旋 1/2 的三维各相同性谐振子处于基态。求在微扰$V = \lambda\sigma_z x^2$作用下的基态能量，精确到二阶小量。

解: $E_{\{n\}}^{(0)} = (n+\frac{3}{2})\hbar\omega$, $n = n_x + n_y + n_z$

本征态: $\{|n_x n_y n_z \uparrow_z\rangle, |n_x n_y n_z \downarrow_z\rangle\}$

$$\hat{V} = \lambda\sigma_z x^2 = \lambda\sigma_z \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a_x^{\dagger 2} + \cancel{a_x^2} + \cancel{a_x^\dagger a_x} + a_x a_x^\dagger\right)$$

$$\hat{V}|000\uparrow\rangle = \frac{\lambda\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{2}|200\uparrow\rangle + |000\uparrow\rangle\right)$$

$$\hat{V}|000\downarrow\rangle = \frac{\lambda\hbar}{2m\omega}\left(-\sqrt{2}|200\downarrow\rangle - |000\downarrow\rangle\right)$$

故与基态耦合的只有

$$\begin{cases} \langle 200\uparrow|\hat{V}|000\uparrow\rangle = \frac{\sqrt{2}\lambda\hbar}{2m\omega} \\ \langle 000\uparrow|\hat{V}|000\uparrow\rangle = \frac{\lambda\hbar}{2m\omega} \end{cases};\quad \begin{cases} \langle 200\downarrow|\hat{V}|000\downarrow\rangle = -\frac{\sqrt{2}\lambda\hbar}{2m\omega} \\ \langle 000\downarrow|\hat{V}|000\downarrow\rangle = -\frac{\lambda\hbar}{2m\omega} \end{cases}$$

见到二阶, 有

$$E_{|000\uparrow\rangle} = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\lambda\hbar}{2m\omega} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}\lambda\hbar}{2m\omega}\right)^2}{\frac{3}{2}\hbar\omega - (\frac{3}{2}+2)\hbar\omega} = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\lambda\hbar}{2m\omega} - \frac{\lambda^2\hbar}{4m^2\omega^3}$$

$$E_{|000\downarrow\rangle} = \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{\lambda\hbar}{2m\omega} - \frac{\lambda^2\hbar}{4m^2\omega^3}$$

2. 对于一维谐振子，如果取变分波函数为(其中 a 为变分参数)

$$\psi(x)=\begin{cases}A\cos(\pi x/a), & -\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2}\\ 0, & |x|>\frac{a}{2}\end{cases}$$

用变分法求基态能量，并与精确解比较。

解：归一化 $\int|\psi(x)|^2dx=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}A^2\cos^2(\frac{\pi x}{a})dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a}{\pi}A^2\cos^2t\,dt=\frac{A^2a}{2}=1 \Rightarrow A=\sqrt{\frac{2}{a}}$

$$E=\langle H\rangle=\int\psi^*(x)H\psi(x)dx=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{2}{a}\cos(\frac{\pi x}{a})\cdot\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\cos(\frac{\pi x}{a})dx$$

$$=\cdots=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}+\frac{m\omega^2a^2}{24\pi^2}(\pi^2-6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a}=-\frac{\hbar^2\pi^2}{ma^3}+\frac{m\omega^2a}{12\pi^2}(\pi^2-6)\overset{令}{=}0 \Rightarrow a^2=\frac{\hbar\pi^2}{m\omega}\sqrt{\frac{12}{\pi^2-6}}$$

代入 E 得 $E_{min}=\sqrt{\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}}\,\hbar\omega=0.568\hbar\omega>E_{精确}=\frac{1}{2}\hbar\omega$

3. 处于基态的一维简谐振子在$t\geq0$时受到微扰势 $\hat{V}=Ve^{-at}\hat{x}$ (V,a均为大于零的常数) 的作用，利用一阶含时微扰论，求解$t\to+\infty$时体系处于简谐振子第一激发态的几率。

$$\tilde{C}_m(t)=e^{iE_mt/\hbar}C_m(t), \quad \omega_{mn}=(E_m-E_n)/\hbar$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{C}_m(t)=\sum_n V_{mn}\tilde{C}_ne^{i\omega_{mn}t}$$

解：$\tilde{C}_m(0)=\delta_{m0} \Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{C}_1(t)=V_{10}e^{i\omega t}$

$$V_{10}=\langle1|Ve^{-at}\hat{x}|0\rangle=Ve^{-at}\cdot\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle1|a^++\cancel{a}|0\rangle=Ve^{-at}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_1(t)=-\frac{i}{\hbar}\int_0^tV\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}e^{-at+i\omega t}dt=-\frac{i}{\hbar}V\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{e^{(i\omega-a)t}-1}{i\omega-a}$$

$$P_{0\to1}(t)=|\tilde{C}_1(t)|^2=\frac{V^2}{2m\hbar\omega}\left|\frac{e^{-at}e^{i\omega t}-1}{i\omega-a}\right|^2$$

$$=\frac{V^2}{2m\hbar\omega}\cdot\frac{e^{-2at}+1-e^{-at}\cdot2\cos\omega t}{\omega^2+a^2}\xrightarrow{t\to\infty}\frac{V^2}{2m\hbar\omega(\omega^2+a^2)}$$

4. 某自旋为 1/2 的粒子在磁场的作用下 Hamiltonian 为

$$\hat{H} = -\mu\left[B_0\hat{\sigma}_z + B_1\cos(2\omega_0 t)\hat{\sigma}_x - B_1\sin(2\omega_0 t)\hat{\sigma}_y\right],$$

其中 $\boxed{\omega_0 = \mu B_0/\hbar}$。设 t=0 时粒子处于 $\widehat{S}_z$ 算符本征值为 $\frac{\hbar}{2}$ 的本征态上。

key：共振

a. 用一阶含时微扰论求在时间 t 粒子处于 $\widehat{S}_z$ 算符本征值为-$\frac{\hbar}{2}$ 的本征态上的几率。

b. 求上一问的精确解。

解：a. $\hat{H}_0 = -\mu B_0\hat{\sigma}_z$，$\hat{V} = -\mu B_1\left[\cos(2\omega_0 t)\hat{\sigma}_x - \sin(2\omega_0 t)\hat{\sigma}_y\right]$

在 $\hat{\sigma}_z$ 的本征态 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ 中，有 $|\psi(t)\rangle = C_\uparrow(t)|\uparrow\rangle + C_\downarrow(t)|\downarrow\rangle$

$\tilde{C}_\uparrow(0) = 1$，$\tilde{C}_\downarrow(0) = 0 \Longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{C}_\downarrow(t) = V_{\downarrow\uparrow}e^{-i2\mu B_0 t/\hbar} = V_{\downarrow\uparrow}e^{-i2\omega_0 t}$

其中 $V_{\downarrow\uparrow} = \langle\downarrow|\hat{V}|\uparrow\rangle = -\mu B_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^\dagger\left[\cos(2\omega_0 t)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} - \sin(2\omega_0 t)\begin{pmatrix}&-i\\i&\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$= -\mu B_1(0,1)\begin{pmatrix}0\\e^{i2\omega_0 t}\end{pmatrix} = -\mu B_1 e^{i2\omega_0 t}$

$\Longrightarrow \tilde{C}_\downarrow(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t -\mu B_1\,dt = i\mu B_1 t/\hbar$

$P(t) = |\tilde{C}_\downarrow(t)|^2 = \mu^2 B_1^2 t^2/\hbar^2$

当 $|B_1| \ll |B_0|$，$0 < t \ll 1$ 时一阶含时微扰成立。

b. $\hat{H} = -\mu\begin{pmatrix}B_0 & B_1 e^{i2\omega_0 t}\\ B_1 e^{-i2\omega_0 t} & -B_0\end{pmatrix}$

$\hat{H}$ 含时，不能用 $\hat{U} = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$

由 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$ 得 $\begin{pmatrix}\dot{c}_1(t)\\ \dot{c}_2(t)\end{pmatrix} = \frac{i}{\hbar}\mu\begin{pmatrix}B_0 & B_1 e^{i2\omega_0 t}\\ B_1 e^{-i2\omega_0 t} & -B_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}$，$\omega_1 \equiv \frac{\mu B_1}{\hbar}$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\dot{c}_1(t) = i\omega_0 c_1 + i\omega_1 e^{i2\omega_0 t}c_2\\ \dot{c}_2(t) = -i\omega_0 c_2 + i\omega_1 e^{-i2\omega_0 t}c_1\end{cases}$$

$|\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}|\psi(t)\rangle_S$

令 $\begin{cases}\tilde{c}_1(t) = c_1(t)e^{-i\omega_0 t}\\ \tilde{c}_2(t) = c_2(t)e^{i\omega_0 t}\end{cases}$

(tip：这个构造其实就是相互作用绘景。)

$$\Rightarrow \begin{cases}\dot{\tilde{c}}_1(t) = \dot{c}_1(t)e^{-i\omega_0 t} - i\omega_0 c_1(t)e^{-i\omega_0 t} = i\omega_1 e^{i\omega_0 t}c_2 = i\omega_1\tilde{c}_2\\ \dot{\tilde{c}}_2(t) = \dot{c}_2(t)e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 c_2(t)e^{i\omega_0 t} = i\omega_1 e^{-i\omega_0 t}c_1 = i\omega_1\tilde{c}_1\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{c}}_1(t) = \dot{c}_1(t)\, e^{-i\omega_0 t} - i\omega_0 c_1(t)\, e^{-i\omega_0 t} = i\omega_1 e^{i\omega_0 t} c_2 = i\omega_1 \tilde{c}_2 \\ \dot{\tilde{c}}_2(t) = \dot{c}_2(t)\, e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 c_2(t)\, e^{i\omega_0 t} = i\omega_1 e^{-i\omega_0 t} c_1 = i\omega_1 \tilde{c}_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{\tilde{c}}_1(t) = i\omega_1 \dot{\tilde{c}}_2 = -\omega_1^2 \tilde{c}_1 , \quad \tilde{c}_1(0) = 1$$

解得 $\tilde{c}_1(t) = \cos(\omega_1 t)$ （总可忽略初始相位）

同理，$\tilde{c}_2(0) = 0$，对称地有 $\tilde{c}_2(t) = i\sin(\omega_1 t)$

$$P(t) = |\tilde{c}_2(t)|^2 = \sin^2(\omega_1 t) \longrightarrow \omega_1^2 t^2 \quad (\text{当 } t \to 0 \text{ 时})$$

法二：在相互作用绘景中，有

$$\begin{cases} |\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} e^{-i\hat{H} t/\hbar} |\psi(0)\rangle_S \\ \hat{A}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{A}_S e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = \hat{V}_I |\psi(t)\rangle_I \end{cases}$$

$$\hat{V}_I = e^{-i\omega_0 t \hat{\sigma}_z} (-\hbar\omega_1) [\cos(2\omega_0 t)\hat{\sigma}_x - \sin(2\omega_0 t)\hat{\sigma}_y]\, e^{i\omega_0 t \hat{\sigma}_z}$$

$$= -\hbar\omega_1 \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} & \\ & e^{i\omega_0 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & e^{i2\omega_0 t} \\ e^{-i2\omega_0 t} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t} & \\ & e^{-i\omega_0 t} \end{pmatrix}$$

$$= -\hbar\omega_1 \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega_0 t} \\ e^{-i\omega_0 t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t} & \\ & e^{-i\omega_0 t} \end{pmatrix} = -\hbar\omega_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\hbar\omega_1 \hat{\sigma}_x$$

$$\hat{U}_I = e^{-i\hat{V}_I t/\hbar} = e^{i\omega_1 t \hat{\sigma}_x} = [\cos(\omega_1 t) + i\hat{\sigma}_x \sin(\omega_1 t)] = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & i\sin(\omega_1 t) \\ i\sin(\omega_1 t) & \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix}$$

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}_I |\psi(0)\rangle_I = \hat{U}_I |\psi(0)\rangle_S = \hat{U}_I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos(\omega_1 t)|\uparrow\rangle + i\sin(\omega_1 t)|\downarrow\rangle$$