学号：

姓名：

答 题 时 不 要 超 过 此 线

学生所在系：

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

2014 — 2015 学年第一学期

《单变量微积分》期终考试试卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
批改人									

注意事项：

1. 答卷前，请考生务必检查考卷是否完整无缺。
2. 答卷前，请考生务必将所在系、姓名、学号等在左侧密封线内填写清楚。
3. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。
4. 本试卷为闭卷考试。共 8 道试题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。
5. 本试卷第 8 题为单项选择题。

得分	评卷人

1. 计算题（给出必要的计算步骤，每小题 6 分，共 30 分）：

(1) $\int \frac{x^3-x}{1+x^4}dx.$

得分	

(2) $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx.$

得分	

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx.$

得分	

(4) $\int |\ln x| dx$.

得分	

答：$\int |\ln x| dx = \begin{cases} x\ln x - x + C, & x \geq 1 \\ -x\ln x + x + C - 2, & 0 < x < 1. \end{cases}$

(5) 已知 $f(x) = e^{x^3}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} [f(1)f(2)\cdots f(n)]^{\frac{1}{n^4}}$.

得分	

2.

得分	评卷人

(**本题满分 10 分**)

求方程 $y'' + y = \cos^2 x$ 的通解.

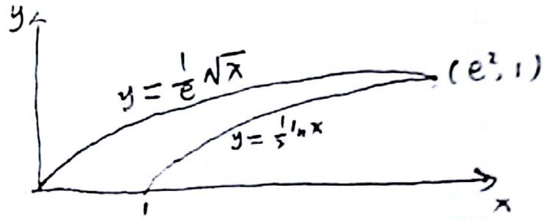
3.

得分	评卷人

(本题满分 10 分)

设曲线 $y = a\sqrt{x}$ $(a > 0)$ 与 $y = \ln\sqrt{x}$ 在 (x_0, y_0) 处有公共切线，求这两曲线与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V.

解：从 $\begin{cases} \frac{1}{2}\ln x_0 = a\sqrt{x_0} \\ \frac{d}{dx}(a\sqrt{x})\Big|_{x_0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln x\right)\Big|_{x_0} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{1}{2}\ln x_0 = a\sqrt{x_0} \\ a\cdot\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x_0} \end{cases}$



解得 $a = \frac{1}{e}$，$x_0 = e^2$，$y_0 = 1$

$$V = V_2 - V_1$$

$$= \int_0^{e^2} \pi\cdot\frac{1}{e^2}\cdot x\,dx - \int_1^{e^2} \pi\cdot\frac{1}{4}\ln^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi e^2 - \frac{\pi}{4}\cdot 2(e^2-1) = \frac{\pi}{2}$$

4.

得分	评卷人

(本题满分 10 分)

已知 $f''(x)$ 连续, $f'(x) \neq 0$, 求 $\int \left[\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}\right] dx.$ $= I$

解: $I = \int \frac{f(x)}{f'(x)} dx + \int \frac{-f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3} dx \overset{记}{=} I_1 + I_2$,

而 $I_2 = \int f^2(x) \cdot \frac{1}{2} d\left(\frac{1}{f'^2(x)}\right) \xlongequal[积分]{分部} \frac{1}{2}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2$

$- \frac{1}{2}\int \frac{1}{f'^2(x)} \cdot 2 \cdot f'(x) \cdot f(x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2 - I_1$, 由前式

推知 $I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2 + C$.

5.

得分	评卷人

(本题满分 10 分)

已知 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^1 f(x^2t)dt}{x\int_0^1 f(xt)dt}$.

解: $F(x)=\dfrac{\int_0^1 f(x^2t)dt}{x\int_0^1 f(xt)dt}=\dfrac{x^2\int_0^1 f(x^2t)dt}{x^2\cdot x\int_0^1 f(xt)dt}$

$=\dfrac{\int_0^{x^2} f(u)du}{x^2\int_0^x f(u)du}$，故题中极限

$$l=\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(u)du}{x^2\int_0^x f(u)du}\overset{\text{L'Hospital}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{2x f(x^2)}{2x\int_0^x f(u)du+x^2f(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(u)du+xf(x)}\overset{\text{L'Hospital}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x^2)}{2f(x)+f(x)+xf'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4f'(x^2)}{3\cdot\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+f'(x)}=\frac{4f'(0)}{3f'(0)+f'(0)}=1.$$

6.

得分	评卷人

(本题满分 8 分)

计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\sqrt{\tan x}} dx. = I$

解: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^{\frac{3}{2}} x}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \xlongequal{x = \frac{\pi}{2} - t} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \sin^{\frac{3}{2}} x}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

$= \frac{1}{2}(I + I) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x \cos^{3/2} x}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} + \frac{\cos x \sin^{3/2} x}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \right) dx$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{4}.$

7.

得分	评卷人

（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非负连续函数，且满足 $f^2(x) \leqslant 1+2\int_0^x f(t)dt$，证明：$f(x) \leqslant 1+x$．

相关题目1（常数 $C \geq 0$，$\alpha > 1$）已知 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上非负连续且总满足 $f^{\alpha}(x) \leq C^{\alpha} + \alpha\int_0^x f^{\alpha-1}(t)dt$，

试证：$f(x) \leq x + C$，$x \geq 0$（$C=1$，$\alpha=2$，即为原题）

证明：在题中不等式中，令 $x=0$，即知 $0 \leq f(0) \leq C$．

下用反证法，假设在某个点 $x_0 > 0$ 处有 $f(x_0) > x_0 + C$，我们将推出矛盾．实际上，对前述 x_0，令

$$b = \min\{x \mid 0 \leq x \leq x_0 \text{ 且 } f(x)-x = f(x_0)-x_0\},$$

则 b 具有如后一些性质：$b>0$；$f(b)-b > C$ 且当 $0 \leq x < b$ 时 $f(x)-x < f(b)-b$．现在有

$$f^{\alpha}(b) \overset{\alpha-1}{=\!=} (f(b)-b)^{\alpha} + \alpha\int_0^b (t+f(b)-b)^{\alpha-1}dt >$$

$$C^{\alpha} + \alpha\int_0^b f^{\alpha-1}(t)dt \geq f^{\alpha}(b),$$ 即 $f^{\alpha}(b) > f^{\alpha}(b)$，这是一个矛盾，故假设不成立，而原题中结论成立．

相关题目2（常数 C，γ 满足 $\gamma > 0$）已知 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 中是连续的且总满足 $f(x) \leq C + \gamma\int_0^x f(t)dt$，试证：$f(x) \leq Ce^{\gamma x}$，$x \geq 0$．

证明概要（…证明大致和上题相似，亦可类似选用符号…）

易见 $f(0) \leq C$。下用反证法，假设在某个点 $x_0 > 0$ 处有 $f(x)\cdot e^{-\gamma x}\Big|_{x=x_0} > C$，我们将推出矛盾．实际上，对前述 x_0，令

$$b = \min\{x \mid 0 \leq x \leq x_0,\text{ 且 } f(x)\cdot e^{-\gamma x} = f(x_0)\cdot e^{-\gamma x_0}\}$$

8.

得分	评卷人

选择题 (每小题 4 分, 共 16 分, 每小题给出的四个选项中只有一项是正确答案.)

(1) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的一个原函数, 则 $f(x)+F(x)$ 在 (a,b) 上 ________.

(A) 可微　　(B) 连续

√(C) 有原函数　　(D) 是初等函数

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负是 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上单调增加的 ________.

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

√(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

(3) 函数 $f(x)$ 有下列四条性质:

1, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续;

2, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积;

3, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数;

4, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导.

若用 $P \Longrightarrow Q$ 表示可由性质 P 推出性质 Q, 则有 ________.

(A) $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3$　　(B) $1 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4$

(C) $4 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1$　　√(D) $4 \Longrightarrow 1 \Longrightarrow 2$

(4) 下列命题正确的是 ________.

(A) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且为偶函数, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的全体原函数为奇函数

√(B) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且为奇函数, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的全体原函数为偶函数

(C) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且为周期函数, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的全体原函数为周期函数

(D) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且为奇函数, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=0$

:, 则 b 具有如右性质: $b>0$; $f(b)\cdot e^{-\gamma b}>c$ 且当 $0\le x<b$ 时 $f(x)\cdot e^{-\gamma x}<f(b)\cdot e^{-\gamma b}$. 现在有

$$f(b) \xlongequal{N-L} f(b)e^{-\gamma b}+\gamma\int_0^b f(b)\cdot e^{-\gamma b}\cdot e^{\gamma t}dt > c+\gamma\int_0^b f(t)e^{-\gamma t}\cdot e^{\gamma t}dt$$

$$> c+\gamma\int_0^b f(t)dt \ge f(b),$$ 即 $f(b)>f(b)$. 这是一个矛盾, 故假设不成立, 而原题中结论成立.

总结: 在题目1中考查函数 $F(x)=f(x)-x$, 在题目2中考查 $G(x)=f(x)\cdot e^{-\gamma x}$