数理方程期末试题参考答案与解析

2020 年春期末试题

仅供学习交流使用

一、(12 分) 对于以下初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(t,x), \quad (t>0, -\infty < x < +\infty) \\ u(0,x) = 3x^2, u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

(1) 当 $f(t,x) = 0$ 时, 求初值问题的解；
(2) 当 $f(t,x) = \cos 2x + x^2t^2$ 时, 求初值问题的解.
解：

第一题往往考察行波法或者通解法的使用. 可以直接应用行波法求解的定解问题的特点是，方程齐次. 而对于非齐次的方程，常用的解决方案有三种

- 齐次化原理——齐次化原理使用条件是初始条件是齐次的，如果初始条件非齐次，需要使用叠加原理做处理

- 特解法——基于叠加原理，对于定解问题没有任何要求，不过实际应用要考虑求解方便，所以适合应用特解法的场景也有一些限制. 我们习惯上会认为，非齐次项是若干独立变量的线性组合时，优先考虑特解法

- 固有函数展开法——由于行波法求解的定解问题是无界区域的问题，所以固有函数展开法不适用

根据上述对于非齐次问题处理方法选择的讨论，我们建议使用齐次化原理.

同时，本题是一类代表性的题目，其特点在于要求求解一个齐次方程问题和一个非齐次方程问题. 这样的题目要求提示我们使用齐次化原理来求解非齐次的问题.

(1) $f(t,x) = 0$ 时, 直接应用达朗贝尔公式，得

$$u = \frac{3}{2}\left((x+t)^2 + (x-t)^2\right) = 3\left(x^2 + t^2\right)$$

........................(6 分)

$(2) f(t,x)=\cos 2x+x^2t^2$ 时，利用叠加原理. 设 $u=u_1+u_2$, 其中

$$\begin{cases} u_{1tt}=u_{1xx}+\cos 2x, \quad (t>0,-\infty<x<+\infty) \\ u_1(0,x)=3x^2, u_{1t}(0,x)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2tt}=u_{2xx}+x^2t^2, \quad (t>0,-\infty<x<+\infty) \\ u_2(0,x)=0, \quad u_{2t}(0,x)=0 \end{cases}$$

令 $u_1=V+\frac{1}{4}\cos 2x$, 得 V 满足齐次方程

$$\begin{cases} V_{tt}=V_{xx} \quad (t>0,-\infty<x<+\infty) \\ V(0,x)=3x^2-\frac{1}{4}\cos 2x, \quad V_t(0,x)=0 \end{cases}$$

应用达朗贝尔公式得

$$V=\frac{3}{2}\left((x+t)^2+(x-t)^2\right)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}(\cos 2(x+t)+\cos 2(x+t))=3\left(x^2+t^2\right)-\frac{1}{4}\cos 2x\cos 2t$$

因此

$$u_1=\frac{1}{4}\cos 2x+3\left(x^2+t^2\right)-\frac{1}{4}\cos 2x\cos 2t$$

利用齐次化原理可得

$$u_2=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\xi^2\tau^2 d\xi d\tau=\int_0^t\left[x^2(t-\tau)+\frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]\tau^2 d\tau=\frac{1}{12}x^2t^4+\frac{t^6}{180}$$

所以，由叠加原理可得

$$u=u_1+u_2=\frac{1}{4}\cos 2x+3\left(x^2+t^2\right)-\frac{1}{4}\cos 2x\cos 2t+\frac{1}{12}x^2t^4+\frac{t^6}{180}$$

........................(12 分)

二. (14 分) 求以下固有值问题的固有值和固有函数：

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, (0<x<5) \\ y'(0)=0, y'(5)=0 \end{cases}$$

并把 $f(x)=\delta(x-3)$ 在固有函数系下展开.

解：

固有值问题的求解也是每年的常见题型，一般也会出现在前几道题目中. 固有值问题求解本质上就是常微分方程定值问题的求解. 对于这类问题的求解方法，我们总结如下

- 特征根法——可以求解任意阶 (由于我们研究的定解问题主要是二阶线性偏微分

方程问题，所以一般情况下我们遇到的固有值问题就是二阶线性常微分方程) 的常系数线性常微分方程

- 特殊函数法——这是我们的课程第三章主要介绍的内容，利用两类特殊函数可以求解相应的固有值问题
- 欧拉方程——这里单独提出欧拉方程，是因为这类方程对应的固有值问题的求解需要我们掌握，并且无法直接用以上两种常用方法解决. 欧拉方程的处理本质上是利用转化的思想，利用变量代换将其转化为常系数问题，进而可以使用特征根法求解. 转化思想是数学学习中的重要思想，在这门课程中也有很多重要的应用. 从考试角度出发，往往考察到的无法用以上两种方法求解的就是欧拉方程. 在这里建议有兴趣的读者，了解并掌握变量代换和函数变换两种常用转化方法在求解常微分方程问题中的应用

通过对常微分方程的分析，发现其为二阶常系数线性常微分方程，所以直接使用特征根法求解.

直接使用特征根法可以求解得到 (这里略去求解过程，详细求解方法可以参考助教制作的特征根法专题)

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{5}\right)^2, \quad y_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{5}$$

……………………(8 分)

设

$$\delta(x-3) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{5}, \quad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

利用三角函数系的正交性，积分可得

$$a_n = \frac{2}{5}\int_0^5 \delta(x-3)\cos\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{2}{5}\cos\frac{3n\pi}{5}$$

所以展开式为

$$\delta(x-3) = \frac{1}{5} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{5}\cos\frac{3n\pi}{5}\cos\frac{n\pi x}{5}$$

……………………(14 分)

这道题目在今年的阅卷过程中发现，大量同学在细节上出现疏漏. 常见错误答案为

$$\delta(x-3) = \frac{2}{5} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{5}\cos\frac{3n\pi}{5}\cos\frac{n\pi x}{5}$$

即展开式常数项求解有误. 这里主要是在基于正交性利用积分求解系数的时候，忽略了

$$\cos\frac{0\pi x}{5}=1 \quad \int_0^5 \cos\frac{n\pi x}{5}\cdot\cos\frac{n\pi x}{5}dx=5$$

这样就可以得到正确的结果. 而至于在待定系数写出展开式标准型的时候，常数项是否直接写 a_0 都是可以的. 只不过按照参考答案这样待定系数，积分计算式形式统一.

三、求解混合问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+e^{-x},(t>0,0<x<4) \\ u(t,0)=u(t,4)=0 \\ u(0,x)=\sin\pi x, \quad u_t(0,x)=0 \end{cases}$$

解：

有界区域非齐次方程齐次边界问题. 常见的处理方法包括

- 特解法——基于叠加原理，对于定解问题没有任何要求，不过实际应用要考虑求解方便，所以适合应用特解法的场景也有一些限制. 我们习惯上会认为，非齐次项是若干独立变量的线性组合时，优先考虑特解法
- 固有函数展开法——适用于所有有界区域非齐次方程齐次边界问题
- 齐次化原理——齐次化原理使用条件是初始条件是齐次的，如果初始条件非齐次，需要使用叠加原理做处理

对于本题，由于非齐次项只和变量 x 有关，所以优先考虑特解法. 对于解决非齐次方程齐次边界问题时使用特解法，我们要求特解需要满足齐次边界 (这样转化后的定解问题才能直接使用分离变量法求解). 同时要特别注意，特解法的本质是叠加原理，在写出转化后的定解问题时，注意叠加原理使用的正确性 (往往出现定解条件没有按照叠加原理正确书写)

利用特解法. 设 $u=v+w$，并令特解 w 满足非齐次方程和齐次边界条件，解得

$$w=\frac{1}{4}\left(e^{-4}-1\right)x+1-e^{-x}$$

则 v 满足的定解问题为

$$\begin{cases} v_{tt}=v_{xx},(t>0, \quad 0<x<4) \\ v(t,0)=v(t,4)=0 \\ v(0,x)=\sin\pi x+e^{-x}+\frac{1-e^{-4}}{4}x-1, \quad v_t(0,x)=0 \end{cases}$$

........................(6 分)

有界区域上的齐次方程齐次边界问题，直接使用分离变量法. 令 $v(t,x)=T(t)X(x)$，分离变量得到固有值问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, \quad (0<x<4) \\ X(0)=0, X(4)=0 \end{cases}$$

和方程 $T''+\lambda T=0$. 求解固有值问题得到

$$\text{固有值}\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2,\ \text{固有函数}X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi x}{4}$$

将固有值代入关于 t 的方程解得

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi t}{4}+D_n\sin\frac{n\pi t}{4}$$

进而得到形式解

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi t}{4}+D_n\sin\frac{n\pi t}{4}\right)\sin\frac{n\pi x}{4}$$

........................(12 分)

利用初始条件，基于固有函数系正交性进行积分运算可得

$$u(t,x)=\frac{1}{4}\left(e^{-4}-1\right)x+1-e^{-x}+\cos\pi t\sin\pi x$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2n\pi\left(1-e^{-4}(-1)^n\right)}{16+n^2\pi^2}+\frac{2(-1)^ne^{-4}-2}{n\pi}\right]\cos\frac{n\pi t}{4}\sin\frac{n\pi x}{4}$$

........................(16 分)

四、(14 分) 求解均匀圆柱体上的边值问题：

$$\begin{cases} \Delta_3 u=0, \quad \left(r=\sqrt{x^2+y^2}<2, 0<z<4\right) \\ u|_{r=0}\ \text{有限},\ u|_{r=2}=0 \\ u\,|z=0=4-r^2, \quad u|_{z=4}=0 \end{cases}$$

解：

使用柱坐标，并注意到泛定方程和定解条件不显含 θ, 可设 $u=u(r,z)$, 对应柱标方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

用分离变量 $u=R(r)Z(z)$，代入方程和边界条件，得 Bessel 方程固有值问题

$$\left\{\begin{array}{l}r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0\\ R(0)\text{ 有界, } R(2)=0\end{array}\right.$$

和方程

$$Z''-\lambda Z=0$$

解固有值问题得到：固有值

$$\lambda_n=\omega_n^2$$

固有函数

$$R_n(r)=J_0\left(\omega_n r\right)$$

ω_n 是 $J_0(2\omega)=0$ 的第 n 个正根. 相应地

$$Z_n(z)=C_n\operatorname{ch}\omega_n z+D_n\operatorname{sh}\omega_n z$$

所以，得到形式解

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n ch\omega_n z+D_n sh\omega_n z\right)J_0\left(\omega_n r\right)$$

........................(9 分)

代入初始条件可得

$$u(r,0)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_nJ_0\left(\omega_n x\right)=4-r^2, u(r,4)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n\operatorname{ch}4\omega_n+D_n sh4\omega_n\right)J_0\left(\omega_n r\right)=0$$

这样得到

$$D_n=-\frac{\operatorname{ch}4\omega_n}{\operatorname{sh}4\omega_n}C_n$$

和

$$\begin{aligned}C_n&=\frac{\int_0^2 r\left(4-r^2\right)J_0\left(\omega_n r\right)dr}{N_{01}^2}\\&=\frac{1}{N_{01}^2}\frac{1}{\omega_n^2}\int_0^{2\omega_n}t\left(4-\frac{t^2}{\omega_n^2}\right)J_0(t)dt\\&=\frac{1}{N_{01}^2\omega_n^2}\left[\left.\left(4-\frac{t^2}{\omega_n^2}\right)tJ_1(t)\right|_0^{2\omega_n}+\frac{2}{\omega_n^2}\int_0^{2\omega_n}t^2J_1(t)dt\right]\\&=\frac{1}{2J_1^2\left(2\omega_n\right)\omega_n^2}\cdot\frac{2}{\omega_n^2}\cdot 4\omega_n^2J_2\left(2\omega_n\right)=\frac{4J_2\left(2\omega_n\right)}{\omega_n^2J_1^2\left(2\omega_n\right)}\\&=\frac{4}{\omega_n^3J_1\left(2\omega_n\right)}\end{aligned}$$

所以得到定解问题的解

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{4}{\omega_n^3 J_1\left(2\omega_n\right)}\right)\operatorname{ch}\omega_n z-\left(\frac{4ch4\omega_n}{\omega_n^3 sh4\omega_n J_1\left(2\omega_n\right)}\right)sh\omega_{nZ}\right]J_0\left(\omega_n r\right)$$

........................(14 分)

五、(14 分) 求解以下定解问题, 其中 (r,θ,φ) 为球坐标.

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0, & (r>3,0\le\theta\le\pi,0\le\varphi<2\pi)\\ u|_{r=3}=\cos 2\theta-3, & \lim_{r\to+\infty}u=2020\end{cases}$$

解:

齐次 Laplace 方程在球外的球坐标求解公式 (轴对称情形)

$$u=A_0+\sum_{n=0}^{+\infty}B_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$$

........................(9 分)

由

$$\lim_{r\to+\infty}u=2020$$

得 $A_0=2020$. 代入另一初始条件可得

$$u(3,\theta)=A_0+\sum_{n=0}^{+\infty}B_n 3^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)=2\cos^2\theta-4\Longrightarrow 2020+\sum_{n=0}^{+\infty}B_n 3^{-(n+1)}P_n(x)=2x^2-4$$

即

$$2020+\frac{1}{3}B_0+\frac{1}{27}B_2P_2(x)=2020+\frac{1}{3}B_0+\frac{1}{27}\times\frac{B_2}{2}\left(3x^2-1\right)=2x^2-4$$

比较系数得

$$B_2=36,B_0=-6070$$

所以定解问题的解为

$$u(r,\theta)=2020-6070r^{-1}+36r^{-3}P_2(\cos\theta)$$

或者写作

$$u(r,\theta)=2020-6070r^{-1}+18r^{-3}\left(3\cos^2\theta-1\right)$$

........................(14 分)

六、求解初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_x + 5u, \quad (t>0, -\infty<x<+\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

并求出 $\varphi(x)=4x$ 时此问题的具体解.

解:

由题意知，可以使用傅里叶变换法求解.

作傅里叶变换得

$$\begin{cases} \bar{u}_t = -\lambda^2\bar{u} - 2i\lambda\bar{u} + 5\bar{u}, t>0 \\ \bar{u}(0,\lambda) = \bar{\varphi}(\lambda) \end{cases}$$

解得

$$\bar{u} = e^{5t}\bar{\varphi}(\lambda)e^{\left(-\lambda^2-2i\lambda\right)t}$$

……………………(6 分)

由常用公式 (详见“数理方程经典问题专题整理”)

$$F^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t}\right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\}$$

可得

$$F^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t-2i\lambda t}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t-2i\lambda t}e^{-i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t}e^{-i\lambda(x+2t)}d\lambda = \exp\left\{-\frac{(x+2t)^2}{4t}\right\}$$

所以可得解为

$$u(t,x) = e^{5t}F^{-1}\left[\bar{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda^2 t-2i\lambda t}\right] = \varphi(x)*\frac{e^{5t}}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x+2t)^2}{4t}} = \frac{e^{5t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left\{-\frac{(x-\xi+2t)^2}{4t}\right\}d\xi$$

……………………(12 分)

当 $\varphi(x)=x$ 时，对应具体解为

$$u_1(t,x) = \frac{4e^{5t}}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\xi)\exp\left\{-\frac{(\xi+2t)^2}{4t}\right\}d\xi = 4\mathrm{e}^{5t}(\mathrm{x}+2\mathrm{t})$$

……………………(16 分)

七、(14 分) 已知平面区域 $D=\{(x,y)|y>|x|\geq 0\}$. 记 c 为区域边界. 求区域 D 内的第

一边值问题的格林函数，并利用格林函数求解以下边值问题.

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta_2 u=0, \quad (x,y)\in D \\ u\big|_c=\left\{\begin{array}{ll} g(x), & \text{当} x\geq 0 \\ 0, & \text{当} x<0 \end{array}\right.\end{array}\right.$$

解：

(1) 利用镜像法

$$M_0=(\xi,\eta), M_1=(\eta,\xi), M_2=(-\eta,-\xi), M_3=(-\xi,-\eta)$$

记 $M=(x,y)$. 可得格林函数

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_1)}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_2)}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_3)}$$

即

$$G=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\left[(x-\eta)^2+(y-\xi)^2\right]\cdot\left[(x+\eta)^2+(y+\xi)^2\right]}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]\cdot\left[(x+\xi)^2+(y+\eta)^2\right]}$$

........................(8 分)

(2) 首先计算法向偏导数

$$\left.\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}\right|_{y=x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left.\left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial G}{\partial y}\right)\right|_{y=x}$$

其中

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2(x-\eta)}{(x-\eta)^2+(y-\xi)^2}+\frac{2(x+\eta)}{(x+\eta)^2+(y+\xi)^2}-\frac{2(x-\xi)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}-\frac{2(x+\xi)}{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2}\right]$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2(y-\xi)}{(x-\eta)^2+(y-\xi)^2}+\frac{2(y+\xi)}{(x+\eta)^2+(y+\xi)^2}-\frac{2(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}-\frac{2(y+\eta)}{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2}\right]$$

所以可得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}\right|_{y=x}&=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left[\frac{(\xi-\eta)}{(x-\xi)^2+(x-\eta)^2}-\frac{(\xi-\eta)}{(x+\xi)^2+(x+\eta)^2}\right]\\&=\frac{4}{\sqrt{2}\pi}\frac{\left(\xi^2-\eta^2\right)x}{\left[(x-\xi)^2+(x-\eta)^2\right]\left[(x+\xi)^2+(x+\eta)^2\right]}\end{aligned}$$

注意到 $dl=\sqrt{2}dx$，所以可得

$$u(\xi,\eta)=-\int_{y=x}\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}g(x)dl=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\left(\eta^2-\xi^2\right)x}{\left[(x-\xi)^2+(x-\eta)^2\right]\left[(x+\xi)^2+(x+\eta)^2\right]}g(x)dx$$

........................(14 分)

参　考　公　式

1. 拉普拉斯算子 Δ_3 在各个坐标系下的表达形式

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\ &=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

2. 若 ω 是 $J_\nu(\omega a)=0$ 的一个正根，则有模平方

$$N_{\nu 1}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_1^2=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$$

若 ω 是 $J_\nu'(\omega a)=0$ 的一个正根，则有模平方

$$N_{\nu 2}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_2^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega^2}\right]J_\nu^2(\omega a)$$

递推公式

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^\nu J_{\nu-1}(x),\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$$

$$2J_\nu'(x)=J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x),\quad \frac{2\nu}{x}J_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)$$

3. 勒让德多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n, n=0,1,2,3,\ldots$$

母函数

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n$$

递推公式

$$P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)$$

4.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)$$

5. 由 Poisson 方程第一边值问题的格林函数 $G\left(M;M_0\right)$ 求得第一边值问题解 $u(M)$ 的公式

$$\text{空间区域: } u(M)=-\iint_S\varphi\left(M_0\right)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}\left(M;M_0\right)dS+\iiint_V f\left(M_0\right)G\left(M;M_0\right)dM_0$$

$$\text{平面区域: } u(M)=-\int_l\varphi\left(M_0\right)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}\left(M;M_0\right)dl+\iint_D f\left(M_0\right)G\left(M;M_0\right)dM_0$$