组合学 2023 期末

2023/12/17

1 题目

1.

(1) 已知 $v \in [22, 34]$, 且存在设计 $(v, 6, 1)$. 求证 $v = 31$.

(2) 给出 $PG(3)$ 与 $AG(3)$ 的 “清晰的” 构造.

个人猜测 “清晰的” 指的是不能直接把讲义上的构造流程复述一遍, 必须要写出具体的子集族.

2.

集合 X 上的一个超滤 (ultrafilter) 指的是其一个非空子集族 F. F 中元素满足:

(a). 若 $A \in F$ 且 $A \subseteq B$, 则 $B \subseteq F$;

(b). 对于每一个子集 A, A 与 A^C 中恰好有一个在 F 中.

证明: 一个超滤一定是一个相交系, 而一个相交系一定包含于某个超滤.

3.

设 $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ 均为不大于 n 的正整数.

证明: 存在非空指标集 $I, J \subseteq [n]$, 使得 $\sum\limits_{i \in I} a_i = \sum\limits_{j \in J} b_j$.

4.

正整数 $k \geq 3$. F 是 $[n]$ 上的一个 k-均匀子集族 ($\forall A \in F, |A| = k$). 证明: 如果

$$|F| < \frac{3^{k-1}}{2^k},$$

则存在一个对 $[n]$ 中元素的 3-染色, 使得 $\forall A \in F$, A 中含有每种不同颜色的元素.

5.

$A_1, A_2, ..., A_m$ 均为 $[n]$ 的子集, 且 $m > n$.

证明: 存在指标集 $I, J \in [m]$ 满足 $I \cap J = \emptyset, I \cup J \neq \emptyset$, 使得 $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \bigcup\limits_{j \in J} A_j$.

6.

证明: 存在常数 c, 使得对于任意正整数 n, 存在一个 C_{100}-free 的 n 阶图 G, 满足 $e(G) \geq c \cdot n^{\frac{100}{99}}$.

7.

对于偏序集 $\langle P, \leq \rangle$, 定义二分图 $G = \langle X \cup Y, E \rangle$, 其中 $X = \{x_a | a \in P\}, Y = \{y_a | a \in P\}$, $x_a y_b \in E$ 当且仅当 $a > b$.

利用 Konig 定理证明: 在偏序集 $\langle P, \leq \rangle$ 中, 存在一条反链 A, 以及一个对 $\langle P, \leq \rangle$ 的 Hasse 图中边的划分 $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_m$, 其中 C_i 均为链, 且满足 $|A| = m$.

2 个人解答

1.

(1) 讲义 8.10 的直接应用, 8.7 与 8.8 的推论.

由于 X 中有 v 个元素, 含有 1 的无序对 (pair) 共有 $v-1$ 种. 其中的每一种在全体子集族中出现一次, 则总共出现 $v-1$ 次. 子集族中每个子集有 6 个元素, 每个含 1 的子集均含有 5 个其它元素, 故每个含 1 的子集恰能够容纳 5 个这样的 pair. 故 1 应当恰好出现在 $\frac{v-1}{5}$ 个子集中, 即有 $5|(v-1)$.

由上文元素 1 选取的任意性, 实际上每个元素都应恰好出现在 $\frac{v-1}{5}$ 个子集中. 总共有 v 个元素, 而每个子集中有 6 个元素, 故应恰好有 $\frac{v(v-1)}{30}$ 个子集, 即有 $30|v(v-1)$.

从而只可能有 $v=31$.

(2) 讲义上 8.3.1, 8.4.2 分别给了构造流程.

2.

每个超滤是一个相交系:

反证法: 假设存在 $A, B \in F$ 且 $A \cap B = \emptyset$. 则 $B \subseteq A^C$ 从而 F 中同时存在 A^C, A, 与性质 (b) 矛盾.

每个相交系包含于某个超滤:

考虑将 X 的子集组成形如 $\{A, A^C\}$ 的 pairs. 显然在一个相交系 F 中, 每个 pair 与 F 的交集大小至多为 1.

如果每个 pair 都与 F 有交, 可以证明 F 本身便是一个超滤. 若不然, F 只能违反性质 (a) 即 $\exists A, B\ s.t.\ A \in F, B \notin F, A \subseteq B$. 但这意味着 $B^C \in F$, 而 $A \cap B^C = \emptyset$, 与相交系的定义矛盾.

如果有些 pair 与 F 不交, 我们考虑将这些 pair 中的某个元素逐步添加到 F 中使得 F 变成一个超滤. 为了保持性质 (a), 我们在添加一个子集 A 时还要添加所有满足 $A \subseteq B$ 的集合 B. 下面证明对于任何一个当前不在 F 中的 A, A 与 A^C 必有一个可以以这种方式添加到 F 中 (即总可以这样添加子集直到 F 变成一个超滤) :

如果 A 不能这样添加到 F 中, 则一定是因为违反了相交系的定义, 即存在某个满足 $A \subseteq B$ 的 B 添加后会违反相交系的性质. 这说明当前 $\exists C \in F\ s.t.\ B \cap C = \emptyset$ (实际上这里只考虑 $B = A$ 也一样) , 即 $C \subseteq A^C$. 如果 A^C 也不能添加, 同理一定是因为有 $D \in F\ s.t.\ D \subseteq A$. 但这意味着 F 中已经有 $C \cap D = \subseteq$, 即 F 此时已经不是一个相交系. 换言之, 只要 F 起初是一个相交系, 则一定可以保证添加后依然是一个相交系, 从而一定可以持续添加直到没有与 F 不交的 pair.

由此得到了一个包含 F 的超滤.

3.

反证法: 假设不存在这样的指标集 I, J. 则有 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, 不妨设 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$

考虑每一个 $q \in [n]$ 及对应的 $\sum\limits_{j=1}^{q} b_j$. 由于 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, 又根据假设, $\forall q \in [n], \exists p \in \{0\} \cup [n]$ $s.t.$ $\sum\limits_{i=1}^{p-1} a_i < \sum\limits_{j=1}^{q} b_j < \sum\limits_{i=1}^{p} a_i$. 由于每个 a_i 不大于 n, 一定有 $0 < \sum\limits_{i=1}^{p} a_i - \sum\limits_{j=1}^{q} b_j \leq n-1$. 由于 q 取遍 $[n]$ 中的元素, 一共有 n 个这样的差值, 但差值的取值只能是 $[n-1]$ 中的元素, 从而一定有至少一对 q_1, q_2 (不妨设 $q_1 < q_2$) 对应的差值相同. 则有:

$$\sum_{i=1}^{p_1} a_i - \sum_{j=1}^{q_1} b_i = \sum_{i=1}^{p_2} a_i - \sum_{j=1}^{q_2} b_i$$

即:

$$\sum_{i=p_1+1}^{p_2} a_i = \sum_{j=q_1+1}^{q_2} b_j$$

由此导出矛盾.

4.

运用概率方法:

考虑一个随机染色 c, c 将 $[n]$ 中每个元素独立等概率地染成 1, 2, 3 三种颜色之一.

定义事件 X 为 “存在一个子集不含有全部三种颜色的元素” , X_A 为 “子集 A 不含有全部三种颜色的元素” , $X_{A,i}$ 为 “子集 A 不含有染成颜色 i 的元素” . 下面计算事件概率 $P(X)$:

$$
\begin{aligned}
P(X) &= P(\bigcup_{A\in F} X_A) \\
&\leq \sum_{A\in F} P(X_A) \\
&\leq \sum_{A\in F} (P(X_{A,1}) + P(X_{A,2}) + P(X_{A,3})) \\
&= |F| \cdot 3 \cdot (\frac{2}{3})^k \\
&= |F| \cdot \frac{2^k}{3^{k-1}}
\end{aligned}
$$

$|F| < \frac{3^{k-1}}{2^k}$ 时, $P(X) < 1$, 即存在使所有子集含有全部三色元素的染色.

5.

运用代数方法:

对每个子集 A_i 定义 (实数域 R 上的) 指示向量 $\vec{v_i}$. 其中 $\forall i \in [m], j \in [n], v_{ij} = 1$ 当且仅当 $j \in A_i$, 否则 $v_{ij} = 0$.

由于 $\vec{v_i} \in R^n$ 而 $m > n$, 因此必有 $\{\vec{v_i}\}$ 线性相关, 即存在不全为 0 的 $a_i (i \in [m])$ 使得:

$$\sum_{i\in[m]} a_i \vec{v_i} = \vec{0}.$$

由于 v_i 的分量均非负, $\{a_i\}$ 中必定有正有负. 将系数分别为正/负的项移到等式两端, 则有:

$$\sum_{a_i>0} a_i \vec{v_i} = \sum_{a_j<0} (-a_j) \vec{v_i}$$

此时等式两端的线性组合的所有系数均为正. 所以左端的式子中某个分量 $\sum_j$ 为正, 当且仅当其对应的元素 j 满足 $j \in \bigcup\limits_{a_i>0} A_i$, 右端同理. 因此有:

$$\bigcup_{a_i>0} A_i = \bigcup_{a_j<0} A_j$$

6.

使用 deleting method:

考虑一个 n 阶随机图 G, K_n 的每条边独立地以 p 的概率存在于 $E(G)$ 中.

定义变量 N 为 "G 中子图 C_{100} 的数量" ; 对 $V(G)=[n]$ 的一个长为 100 的排列 $A=(i_1,i_2,...,i_{100})$, 定义事件 X_A 为 "G 中 $i_1-i_2-...-i_{100}-i_1$ 构成了一个 C_{100}" , N_A 为 X_A 对应的示性变量, 即 X_A 成立时 $N_A=1$, 否则 $N_A=0$.

下面计算期望 $E(N)$:

$$\begin{aligned}E(N) &\leq E(\sum_{A\in[n]_{100}} N_A)\\ &= \sum_{A\in[n]_{100}} E(N_A)\\ &= \sum_{A\in[n]_{100}} P(X_A)\\ &= \sum_{A\in[n]_{100}} p^{100}\\ &= (n)_{100}p^{100}\end{aligned}$$

(这里 $[n]_{100}$ 表示 $[n]$ 的所有长为 100 的排列构成的集合.)

然后我们从 G 的每个子图 C_{100} 中删掉一条边得到新图 G', 从而 G' 中不存在 C_{100}, 而被删去的边数等于 G 中 C_{100} 的数量. 下面计算期望 $E(e(G'))$:

$$\begin{aligned}E(e(G')) &= E(e(G)-N)\\ &= E(e(G))-E(N)\\ &= \binom{n}{2}p-(n)_{100}p^{100}\end{aligned}$$

其中前一项 $\binom{n}{2}p$ 同阶于 n^2p, 后一项 $(n)_{100}p^{100}$ 同阶于 $n^{100}p^{100}$. 故 $E(e(G'))$ 同阶于:

$E' = n^2 p - n^{100} p^{100}$.

计算 E' 对 p 的导数, 可知 $p \sim n^{-\frac{98}{99}}$ 时 E' 取到最大值, 此时 $E' \sim n^{\frac{100}{99}}$.

而 E' 为一族 n 阶 C_{100}-free 图 G' 的边数期望, 说明必定存在边数不低于这个期望的 n 阶图 G' 是 C_{100}-free 的. 即证.

7.

这题我考试的时候没做出来, 这里放一个标准解答. 来自 *GTM173* 的 *2.5* 节, “*Dilworth* 对偶定理”.

让我们再次回到二部图的König对偶定理，即定理2.1.1。如果对图G的每条边给一个从A到B的定向，那么这个定理告诉我们需要多少条边不交有向路来覆盖G的所有顶点：每条有向路的长度是0或1，明显地，在这样的‘路覆盖’中，当路的条数最少时，就是当它包含尽可能多长度为1的路时；换句话说，当它包含最大基数的匹配时。

在这一节我们把上面的问题进行推广：在一个给定的有向图中需要多少条有向路来覆盖它的整个顶点集？当然，这个问题在无向图中也可以提出。然而，在无向图的情况这个问题比较简单（作为练习），同时有向图的情形也有一个有趣的推论。

有向路 (directed path)是一个有向图$P \neq \emptyset$，它的顶点$x_0, \dots, x_k$各不相同且所有边$e_0, \dots, e_{k-1}$满足e_i是一条由x_i指向x_{i+1}的边，其中$i < k$。在这一节，路始终指‘有向路’。上面提到的顶点x_k称作路P的**最终顶点** (last vertex)，当$\mathcal{P}$是一个路的集合时，我们把最终顶点的集合记作$\mathrm{ter}(\mathcal{P})$。一个有向图$G$的**路覆盖** (path cover)是$G$中若干不相交路的集合，它们可以覆盖$G$中所有的顶点。

定理 2.5.1 (Gallai & Milgram 1960)
每个有向图G有一个路覆盖$\mathcal{P}$和一个顶点独立集$\{v_P \mid P \in \mathcal{P}\}$使得对每个$P \in \mathcal{P}$，有$v_P \in P$。

证明: 显然，图G总是有路覆盖，例如那些平凡路。我们通过对$|G|$用归纳法来证明：对于G的任意具有极小$\mathrm{ter}(\mathcal{P})$的路覆盖$\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_m\}$，存在一个顶点集$\{v_P \mid P \in \mathcal{P}\}$符合要求。对每个$i$，记$v_i$为$P_i$的最终顶点。

若$\mathrm{ter}(\mathcal{P}) = \{v_1, \dots, v_m\}$是独立的，则无须再证，因此不妨假设$G$有一条从$v_2$到$v_1$的边。因为$P_2 v_2 v_1$也是一条路，由$\mathrm{ter}(\mathcal{P})$的极小性知$v_1$不是$P_1$中唯一的顶点；设$v$是$P_1$中先于$v_1$的顶点，那么$\mathcal{P}' := \{P_1 v, P_2, \dots, P_m\}$是$G' := G - v_1$的路覆盖（图2.5.1）。显然，任意在$G'$中代表$\mathcal{P}'$的独立集对$G$中的$\mathcal{P}$也成立，所以我们需要确定的是，是否可以对$\mathcal{P}'$使用归纳假设。因此只需证明$\mathrm{ter}(\mathcal{P}') = \{v, v_2, \dots, v_m\}$在$G'$的所有路覆盖的最终顶点集合中是极小的。

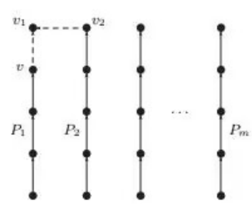

图 2.5.1: G和G'的路覆盖

假设G'有路覆盖$\mathcal{P}''$且$\mathrm{ter}(\mathcal{P}'') \subsetneq \mathrm{ter}(\mathcal{P}')$。如果一条路$P \in \mathcal{P}''$结束于$v$，我们可以把$\mathcal{P}''$中的$P$用$Pvv_1$来代替，从而得到$G$的一个路覆盖，它的最终顶点集是$\mathrm{ter}(P)$的真子集，这与$\mathcal{P}$的选取矛盾。如果一条路$P \in \mathcal{P}''$结束于$v_2$（同时不存在路结束于$v$），我们类似地把$\mathcal{P}''$中的$P$由$Pv_2v_1$代替，从而与$\mathrm{ter}(P)$的极小性矛盾。因此$\mathrm{ter}(\mathcal{P}'') \subseteq \{v_3, \dots, v_m\}$，但此时$\mathcal{P}''$和平凡路$\{v_1\}$一起构成$G$的路覆盖，与$\mathrm{ter}(\mathcal{P})$的极小性矛盾。 □

作为定理2.5.1的推论，我们得到偏序集理论中的一个经典结果。前面提到过，在偏序集$(P, \leqslant)$中，如果一个子集的元素是两两可比较的，那么它是一个**链** (chain)；如果它的元素是两两不可比较的，称它为一个**反链** (antichain)。

推论 2.5.2 (Dilworth 1950)
在每个有限偏序集$(P, \leqslant)$中，并集为P的最少链数等于P中反链的最大个数。

证明: 若A是P中基数最大的反链，则显然P不能被少于$|A|$条链覆盖。反过来，把定理2.5.1应用到顶点集为P的有向图上，这里边集为$\{(x,y) \mid x < y\}$，则$|A|$条链是足够的。 □