2022 春信息论 B 数学基础复习

复习内容：<u>微积分</u>　　课程助教：<u>高源</u>

1. 对数函数的导数。$y=\log_a x, x\in(0,+\infty)$，其中 $a\neq 1$ 且 $a>0$. 导数为

$$y'=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{\ln a}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x\ln a}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x\ln a}$$

注意对数函数求导会产生一个常数系数，为了避免出错，尽量使用奈特作为单位来表达信息量。

2. 反函数的导数。设函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上严格单调、可导，且 $f'(x)\neq 0$，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上也严格单调、可导，且

$$\left[f^{-1}(y)\right]'=\frac{1}{f'(x)}$$

3. 洛必达法则（$\dfrac{0}{0}$ 型）。设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域内可导，并且当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都趋于零，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ (有限或 ∞)，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$。

4. 洛必达法则（$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型）。设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域内可导，并且满足下列条件：

   - $g'(x)\neq 0$ 在 x_0 的一个去心邻域内成立，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$；
   - $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ (有限或 ∞)

   则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$

5. 其余形式的未定式都可以转化为上述两种情形，例如 1^{∞} 可以通过取对数转化为 $0\cdot\infty$ 再取倒数转化为第一种情形。

6. 一元函数的泰勒公式。设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有 $n+1$ 阶导数, $x_0\in I$，则对 $\forall x\in I$，$f(x)$ 可以表示为

$$\begin{aligned}f(x)=&f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)(x-x)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\cdots\\&+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+R_n(x)\end{aligned}$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$ 即为拉格朗日型余项,$R_n(x)=o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)\quad\left(x\rightarrow x_0\right)$ 即为佩亚诺型余项。泰勒公式在零点展开（即 $x_0=0$）时得到麦克劳林展开式。

7. 几个常见的麦克劳林展开式。

- $f(x)=\mathrm{e}^x$

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

其中余项 $R_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\theta x}(0<\theta<1)$.

- $f(x)=\sin x$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

其中余项 $R_{2m}(x)=\dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\sin\left(\theta x+\dfrac{2m+1}{2}\pi\right)=(-1)^m\dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos\theta x\quad(0<\theta<1)$.

- $f(x)=\cos x$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}+R_{2m-1}(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

其中余项 $R_{2m-1}(x)=\dfrac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}\cos\theta x\quad(0<\theta<1)$.

- $f(x)=(1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)(x>-1)$$

其中余项 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{a-n-1}x^{n+1}(0<\theta<1)$.

- $f(x)=\ln(1+x)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)\quad(x>-1)$$

其中余项 $R_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}(0<\theta<1)$.

8. 定积分的换元法。设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，而函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

- $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数
- $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$ 且 $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b,\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

9. 定积分的分部积分法。设函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上分别具有连续的一阶导数 $u'(x)$ 与 $v'(x)$，则有分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

分部积分法是一种重要的积分计算方法，一方面可以用来直接计算，另一方面可以用来构造递推关系求解。例如，设 m 为正整数，计算积分 $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\ \mathrm{d}x$. 易得

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ \mathrm{d}x = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

对于 $m \geqslant 2$ 的情形，由分部积分法得到

$$\begin{aligned}
I_m &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\ \mathrm{d}(-\cos x) \\
&= -\sin^{m-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x\ \mathrm{d}x \\
&= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \left(1-\sin^2 x\right) \mathrm{d}x \\
&= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\ \mathrm{d}x - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

即

$$I_m = (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m$$

所以有递推关系

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

于是可得，当 $m = 2n$ 时有

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\ \mathrm{d}x = \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{(2n-3)}{(2n-2)} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

当 $m = 2n+1$ 时有

$$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\ \mathrm{d}x = \frac{2n}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n-2)}{(2n-1)} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

10. 二元函数可微性判定。若二元函数 $f(x,y)$ 的偏导数在 (x_0,y_0) 处的某个邻域内皆存

在，且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 都在 (x_0, y_0) 处连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微。

11. 高阶偏导数求导次序交换条件。已知二元函数的二阶偏导数有 4 种可能，分别是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

如果 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 中连续，则两者相等, 即求导的次序可交换。

12. 向量值函数与雅可比矩阵。设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, $f: D \to \mathbb{R}^m$ 为 n 元 m 维向量值函数。记 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 f 可以表示为

$$f(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$$

其中 $y_j=f_j(\boldsymbol{x})$ 为 D 上的 n 元函数。如果每个分量函数 $f_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 都是可微的, 则称映射 f 可微，并且定义 f 的微分 $\mathrm{d}f$ 为对每个分量函数的微分所形成的有序组，即

$$\mathrm{d}f=(\mathrm{d}f_1,\ \mathrm{d}f_2, \cdots, \mathrm{d}f_m)^{\mathrm{T}}$$

其中

$$\mathrm{d}f_j=\mathrm{d}y_j=\frac{\partial y_j}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\frac{\partial y_j}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial y_j}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n \quad (j=1,2,\cdots,m)$$

可进一步写成矩阵形式

$$\mathrm{d}f=\begin{pmatrix}\mathrm{d}f_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}f_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix}$$

记

$$Jf=J_x y=\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

为向量值函数 f 的雅可比矩阵。

13. 二元函数的泰勒公式。设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为凸区域，$f\in C^{n+1}(D)$。如果 $(x_0, y_0), (x_0+h, y_0+k)\in$

D，则存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$f\left(x_0+h, y_0+k\right)=\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}\left(h \frac{\partial}{\partial x}+k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{m} f\left(x_0, y_0\right)+R_n$$

其中

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h \frac{\partial}{\partial x}+k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\left(x_0+\theta h, y_0+\theta k\right)$$

称为拉格朗日型余项；特别地，在 $(0,0)$ 处展开的泰勒公式也叫麦克劳林公式。

14. 二元函数的一阶泰勒展开

$$f\left(x_0+h, y_0+k\right)=f\left(x_0, y_0\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) \cdot h+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) \cdot k+R_1$$

15. 二元函数的二阶泰勒展开

$$f\left(x_0+h, y_0+k\right)=f\left(x_0, y_0\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) \cdot h+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) \cdot k+\frac{1}{2}\left(A h^2+2 B h k+C k^2\right)+R_2$$

其中

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x_0, y_0\right), \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(x_0, y_0\right), \quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x_0, y_0\right)$$

一般地，称

$$H f\left(x_0, y_0\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x_0, y_0\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(x_0, y_0\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(x_0, y_0\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x_0, y_0\right) \end{pmatrix}$$

为二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的黑塞矩阵。

16. 二元函数极值判定。设 $f(x,y)$ 为区域 D 上的 C^2 函数，$(x_0,y_0) \in D$ 为 $f(x,y)$ 的驻点（偏导数为 0 的点）。记 $\Delta = AC-B^2$，其中

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x_0, y_0\right), \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(x_0, y_0\right), \quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x_0, y_0\right)$$

则有

- 当 $A>0$ 且 $\Delta>0$ 时，(x_0,y_0) 为严格极小值点；
- 当 $A<0$ 且 $\Delta>0$ 时，(x_0,y_0) 为严格极大值点；
- 当 $\Delta<0$ 时，(x_0,y_0) 不是极值点。

17. 二重积分的累次积分法。设函数 $f(x,y)$ 在闭区间 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上可积。

- 如果对每个 $y \in [c,d]$，$f(x,y)$ 作为 x 的函数在 $[a,b]$ 上可积，记 $\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$，

则 $\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积，并且有

$$\int_c^d \varphi(y)\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 如果对每个 $x \in [a,b]$，$f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $[c,d]$ 上可积，记 $\psi(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$，则 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，并且有

$$\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

- 设 $D = \{(x,y) \mid \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), c \leqslant y \leqslant d\}$，其中 $\psi_1(x), \psi_2(x)$ 为连续函数。函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积，且对于 $\forall y \in [c,d]$，积分 $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$ 存在，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

18. 二重积分的变量代换。设 D, D' 为由分段光滑曲线围成的区域,$\Phi: D' \to D, \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ 为 C^1 的一一映射，且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$. 若 $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

为雅可比行列式。