中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

天体力学与天体测量 2017年春季学期

陈次星 手机 13485694963
座机 6360775 63600181
email daleccx@ustc.edu.cn

参考书 《天体力学基础》 南大 周济林
《天体测量和天体力学基础》 科学出版社 2010年

教材 《天球参考系变换及应用》 李广宇 2010 科学出版社
《天体力学基础》(试用稿) 李广宇

第一课 绪论

物理模型 → 数学模型 → 求解 → 物理量与时空的关系.

与观测对比、检验模型、若不符合、改进、认识前进一步.
认识由简→繁、逐步接近真实

物理模型 — 物质世界的结构与演化

特点：由一组基本物理量描述
当它们与时空的函数关系确定，可导出所有物理量与时空的函数关系

数学模型

基本方程（物质之间作用与运动的关系，是关于基本物理量的方程）

求解条件 {初始、边界、衔接} —— 关于基本物理量的条件

天体中最常见的物理模型：

刚体 流体（理想流体、粘滞流体、湍流、磁流体）

弹性体 处于热平衡物体

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

天体测量学：建立坐标系．测定物理量与时空关系．限制物理模型

是测量天体位置与运动．建立基本参考系和测定地面坐标的天文学分支．

天体力学：惯性系中求解 $\vec{r}_i(t)$．或在 N 个质点选取非惯性坐标系．

考虑天体大小后求解运动 — 天体物理．

如何测量时间？

利用自然界中的周期现象．周期性越好，计时性越好．

几种时间

(以太阳系质心为参照) 质心力学时 (TDB)．(以地球质心为参照) 地球力学时 (TT)．原子时 (TAI)

几种时间的变换关系

①定义

质心坐标时 TCB

地心坐标时 TCG

②变换关系

a．TDB与TCG (1.5) (1.6)

$$TDB = TCG - L_B \times (JD_{TCB} - T_0) \times 86400\,s + TDB_0 \quad (1.5)$$

$$TDB_0 = -6.55 \times 10^{-5}\,s \quad (1.6)$$

b．TT与TAI (1.7)

$$TT = TAI + 32.184 \quad (1.7)$$

c．TT与TCG (1.8) (1.9)

d．TCB与TCG (1.10) (1.11)

时间相关概念 PPT — 第1课 10页

儒略日 PPT－1－11

年月日求儒略日 PPT－12 儒略日求年月日 PPT－13.14

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

天体宏观物体及其附近物理模型和基本方程（广义相对论）

宇宙中物质的4种形式：

1. 实物质

离散用 $\vec{r}_i(t)$ 描述，连续用分布函数 $f(\vec{r},\vec{v},t)$ 描述

2. 电磁场

$\vec{E}$、$\vec{B}$

3. 光子场

光强I、偏振

4. 引力场

（广相）$g_{\mu\nu}$，引力势 ϕ（牛顿）

基本方程：（物质之间作用和运动的关系）

实＋电＋光 —— 引力的作用与运动的关系：

Einstein方程（泊松方程）

└ 用对称性求解

实＋电＋引力 —— 光子作用与运动关系：

弯曲时空下的辐射转移方程（光子Boltzmann方程）

实＋光＋引力 —— 电磁作用与运动关系：

弯曲时空下的 Maxwell方程

电＋光＋引力 —— 实物质作用与运动关系：

弯曲时空下的Boltzmann方程

特例　1. 不考虑引力场（平直空间）

x,t：$(d\tau)^2=(c\,dt)^2-(dx)^2$

x',t'：$(d\tau)^2=(c\,dt')^2-(dx')^2$

Lorentz 变换：$t'=\dfrac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$　　$x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

整体无平直空间，局部有。

2. 实物质为电中性流体，无电磁场、光子场，有引力场，$\frac{v}{c}\ll1$。

基本方程为广义相对论的一阶后牛顿近似

$g_{00}=-1+\frac{2w}{c^2}-\frac{2w^2}{c^4}$

$g_{0i}=-\frac{4}{c^3}w^i$

$g_{ij}=\delta_{ij}\left(1+\frac{2w}{c^2}\right)$

w：标量势　　w^i 矢量势

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

第二课 太阳和月亮历表、矩阵、向量、坐标变换、程序设计

本章内容：用观测和理论（唯象）方法解月亮、太阳、地球、其他行星的物理模型（质点组）
求解基本物理量 $\vec{r}_i(t)$.

$\vec{r}_i(t)$，$\dot{\vec{r}}_i(t)$ 以表格形式表示，此表称作历表。
引入向量、矩阵、坐标变换，通过计算机得到每一给定时刻的位矢、速度

宇宙 太阳系的物理模型
宇宙：由恒星、星系、行星、星际介质等组成，通常前三者可看作有大小的质点，末者可看作流体。

星历表：
表格只是历表最终产品的一种形式
一组公式，一组算法，一个程序 或它们的组合
只要对象能提供某时刻（任时刻）所需的位置、速度

数值历表
根据各种物理状态，比如太阳，日冕，对流，广相，章动，给出系列数值历表。见书P32-P34

天体（质点）基本物理量位矢 $\vec{r}(t)$（$\dot{\vec{r}}(t)$）求出。
如二体：
(1) 物理模型
质点组 $\vec{r}_1(t)$，$\vec{r}_2(t)$
(2) 数学模型
万有引力定律，牛二，初始条件
(3) 求出 $\vec{r}_1(t)$，$\vec{r}_2(t)$
又如在行星运动轨道平面再增加一个质量可忽略的物体——小行星或飞船。（平面限制性三体问题）
(1) 物理模型
$\vec{r}_1(t)$，$\vec{r}_2(t)$，$\vec{r}_3(t)$
(2) 数学……
万有引力定律，牛二，初始条件
(3) 求 $\vec{r}_i(t)$，$\dot{\vec{r}}_i(t)$，$i=1,2,3$.

地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

切比雪夫多项式

递归定义： $T_0(x)=1$

$T_1(x)=x$

$T_i(x)=2xT_{i-1}(x)-T_{i-2}(x)$　　$|x|\leqslant 1$, $i=2,3,\cdots,N-1$

用切比雪夫多项式求复杂情形下的 $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$.

$x(t)=a_{10}T_0(t_c)+a_{11}T_1(t_c)+\cdots$

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,N-1}\\ a_{20} & & & \\ a_{30} & \cdots\cdots & & a_{3,N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_0(t_c)\\ T_1(t_c)\\ \vdots\\ T_{N-1}(t_c)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\\ \dot{z}(t)\end{pmatrix}=VFac\begin{pmatrix} a_{10} & a_{11}\cdots & a_{1,N-1}\\ a_{20} & & \\ a_{30} & \cdots\cdots & a_{3,N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{T}_0(t_c)\\ \vdots\\ \dot{T}_{N-1}(t_c)\end{pmatrix}$$

某些情形下，由上式可精确计算 $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$.

说明 (1) 切多项式最高次数取决于所需精度

如太阳、火星　$N=11$ （经验）

地月质心、月　$N=13$

(2) $t\in[t_0, t_0+\Delta]$.

$t_c=\dfrac{2(t-t_0)}{\Delta}-1\quad\in[-1,1]$. 切式自变量

(3) $\dot{T}_0(x)=0$

$\dot{T}_1(x)=1$

$\dot{T}_i(x)=2T_{i-1}(x)+2x\dot{T}_{i-1}(x)-\dot{T}_{i-2}(x)$

怎样用 computer，由历表文件 MSM.dat 读取基本物理量，即 t 时刻的位置速度. 以月、日、火为例

(1) MSM.dat 数据结构　（见PPT-7）

N (Nof) $=13$. 天体数 3

$\vec{r}$ 或 $\dot{\vec{r}}$ 有三个分量. 一个时段状态

(2) 基本物理量读取

t, $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$　$i=1,2,3$

编程. （见书 P38-40）

(3) (2) 的具体讨论　wanner 图，见书 P41

类 TEMS 的过程 state 用于读取，并计算 t 时刻 3个天体的位速

其中包括过程 Inter().

i 天体序数. 任务有3：指针，归一化时间 t_c，计算切式在 t_c 的值.

主程序见书 P43-44

几种形式的DE系列历表. 见 PPT-8.

行星、月球历表位置误差. 见 PPT-12

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

天体(质点)基本物理量的说明

位矢 $\vec{r}(t) \Rightarrow \vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$

对于观测，视方便而主观选定坐标系。

不同坐标系得不同结果，矢量本身实与坐标系无关，内在的联系为坐标变换

与矩阵有关的定义

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

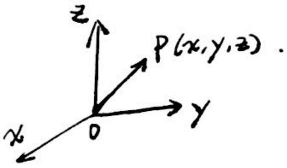
记为 $(a_{ij})_{m\times n}$ 。 a_{ij} 称元素

$m=n$ 时为 n 阶方阵

行列互换，得 A 的转置 A^T 。

…… (略)

位矢。



Def. $\vec{r} = \vec{OP} = (x,y,z)$ 。

三个特殊向量 $\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$， $\vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$， $\vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

方向为三个轴向，单位长度，有右手关系。

坐标系记为 $\{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$

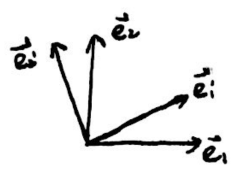
$\vec{r} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$

坐标变换：同一物理量在不同坐标系下有不同数值，它们之间的联系由坐标变换给出

已知坐标系，使物理量在坐标系下取值，与观测对比，限制物理模型。

关键是求坐标变换。

平面直角系的旋转：



$\vec{e_1'}$， $\vec{e_2'}$ ， $\vec{e_1}$， $\vec{e_2}$ 。

$$\begin{cases} \vec{e_1'} = \cos\varphi\,\vec{e_1} + \sin\varphi\,\vec{e_2} \\ \vec{e_2'} = -\sin\varphi\,\vec{e_1} + \cos\varphi\,\vec{e_2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e_1'}\\ \vec{e_2'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\end{pmatrix} \qquad R(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

或：$(e_1', e_2') = (e_1, e_2)\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} = (e_1, e_2)R(-\varphi) \quad (1)$ 。

称 $R(\varphi)$ 为旋转矩阵。

特点：$R(\varphi)$ 为正交阵。 $R(\varphi)^{-1} = R(\varphi)^T$ 。 $(e_1, e_2) = (e_1', e_2')R(\varphi) \quad (2)$

记 $\vec{r}$ 在新旧坐标系下坐标分别为 $(x', y')^T$， $(x,y)^T$

则 $\vec{r} = (e_1', e_2')\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = (e_1, e_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 。代入(1)，(2) 得

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = R(\varphi)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = R(-\varphi)\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

空间直角坐标系的旋转

基本旋转：

(1) e_1不动，(e_2,e_3)以e_1为轴逆时针转φ到(e_2',e_3')

$$(e_1',e_2',e_3')=(e_1,e_2,e_3)R_1(-\varphi).$$

$$R_1(\varphi)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&\sin\varphi\\0&-\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$$

(2) e_2不动，(e_3,e_1)绕e_2逆时针到~~达~~转(e_3',e_1').

$$(e_1',e_2',e_3')=(e_1,e_2,e_3)R_2(-\varphi)$$

$$R_2(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi&0&-\sin\varphi\\0&1&0\\\sin\varphi&0&\cos\varphi\end{pmatrix}$$

(3) e_3不动，(e_1,e_2) ······ (e_1',e_2').

$$(e_1',e_2',e_3')=(e_1,e_2,e_3)R_3(-\varphi).$$

$$R_3(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi&0\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

欧拉角：

(1) e_3不动，(e_1,e_2)绕e_3逆时针转Ω至(u_1,u_2).

$$(u_1,u_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)R_3(-\Omega)$$

(2) u_1不动，(u_2,e_3)绕u_1逆时针转I至(u_2',e_3').

$$(u_1,u_2',u_3')=(u_1,u_2,e_3)R_1(-I)$$

(3) e_3'不动，(u_1,u_2')绕e_3'逆 ···· ω至(e_1',e_2').

$$(e_1',e_2',e_3')=(u_1,u_2',e_3')R_3(-\omega)$$

$$\therefore(e_1',e_2',e_3')=(e_1,e_2,e_3)R_3(-\Omega)R_1(-I)R_3(-\omega)$$

极向量：(第三标架指向地球的自转轴方向)

(1) e_3不动，(e_1,e_2)绕e_3顺时针转α至(u_1,u_2)，使u_1落在(e_3,e_1')平面，此时u_2也落在(e_2',e_3')平面.

$$(u_1,u_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)R_3(\alpha)$$

(2) u_2不动，(e_3,u_1)绕u_2顺时针转ξ至(u_3,e_1').

$$(e_1',u_2,u_3)=(u_1,u_2,e_3)R_2(\xi)$$

(3) e_1'不动，(u_2,u_3)绕e_1'逆时针转η至(e_2',e_3').

$$(e_1',e_2',e_3')=(e_1',u_2,u_3)R_1(-\eta).$$

$$\therefore(e_1',e_2',e_3')=(e_1,e_2,e_3)R_3(\alpha)R_2(\xi)R_1(-\eta)$$

$R_3(-\alpha)$不影响极向量坐标，$\therefore e_3=(e_1',e_2',e_3')\begin{pmatrix}\sin\xi\\\cos\xi\sin\eta\\\cos\xi\cos\eta\end{pmatrix}\overset{\xi,\eta小}{\approx}(e_1',e_2',e_3')\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\1\end{pmatrix}$

$e_3-e_3'=(\xi,\eta,0)^T$称"极移向量"，表极点的位移.

Scanned by CamScanner

...ersity of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

第三课 天球参考系、岁差章动经典变换

本章内容：要测量系统物理量，必须选取坐标系。为了问题的方便，可用不同坐标系。
如何求给定坐标系下的基本物理量？($\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$)
选定一个惯性系（至少是近似的惯性系），容易求出基本物理量。由选定坐标系与惯性系的变换关系，可求选定坐标系的基本物理量。
此惯性系称为国际天球参考系。

坐标系要素：
1. 选原点 O
2. 选基本平面
3. 过原点，垂直基本平面的法向量
4. 在基本平面内选取基本方向

几种坐标系：

1. 地平坐标系

观测地为原点，地平面为基本平面，铅垂线为法向量，正南为基本方向，左手系。
天体位置：方位角 α，高度 h 的角坐标决定 $-90^\circ < h < 90^\circ$ $z = 90^\circ - h$，称天顶距

2. 赤道坐标系

观测点为原点，北天极 $\vec{e}_{z}$，以 $\vec{e}_z$ 为法向量的基本平面为天球赤道面，左手系。
天球的纬度不再改变，经度 H 随时间均匀地变化，被称为时角，赤道系又叫时角系。
时角变化的原因是基本方向仍为地面联系，为把经度固定下来，应使基本方向和地面脱钩而连接于某个天体，春分点被选为赤道系的基本方向。

3. 黄道坐标系

原点和基本方向同赤道系，基本平面为黄道面，黄道面法向为黄极方向。

黄赤交角 ε 为唯象的值。

坐标系间的变换关系：

a. 地平坐标系与时角坐标系

$$\underset{\text{地平}}{\begin{pmatrix} \cos h \cos \alpha \\ \cos h \sin \alpha \\ \sin h \end{pmatrix}} = R_2(-90^\circ + \phi) \underset{\text{时角}}{\begin{pmatrix} \cos\delta \cos H \\ \cos\delta \sin H \\ \sin\delta \end{pmatrix}}$$

b. 时角坐标系与赤道坐标架变换

$$\underset{\text{赤道}}{\begin{pmatrix} \cos\delta \cos\alpha \\ \cos\delta \sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_3(LST) \underset{\text{时角}}{\begin{pmatrix} \cos\delta \cos H \\ \cos\delta \sin H \\ \sin\delta \end{pmatrix}}$$

LST 春分点时角
$H = LST - \alpha$
时角坐标基本方向为正

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

国际天球参考系：

1. 惯性系，原点为太阳系质心
2. 无转动
3. 在理论上方位测量可算出一批天体精确坐标。

} 理想的惯性系

真赤道系：

作为基本平面的天赤道和作为决定基本方向的春分点在运动。

赤道坐标系标架随时间转动。

注：为何赤道面和春分点在运动？

因天为惯性系，牛二适用。地球不为正球体，为扁平椭球体。

赤道部分隆起，两极扁平。在空间中运动类似于高速旋转的陀螺，有进动和章动。

进动 → 岁差。

由牛二律可算出真赤道在国际天球参考系中的运动情况

平赤道系：

Def. 只考虑岁差，不考虑章动情况下的赤道坐标系。

· 仅代表真赤道系在一段时间内的平均方位

相应的基本平面称平赤道。

基本方位称平春分点。

国际天球参考系的规范定义：

原点为太阳系质心。坐标轴指向对于类星体固定。

基本平面尽可能靠近 J2000.0 的平赤道面。

基本方向尽可能靠近 J2000.0 的平春分点。

历元平赤道系：

J2000.0 下的平赤道系。

说明：国际天球参考系、历元平赤道系、历元平黄道系不随时间变化。

真赤道系、平赤道系、平黄道系、真黄道系随时间变化。

几种坐标系下坐标变换：

1. 国际天球参考系和历元平赤道系。

$\{O, e_1, e_2, e_3\}$ $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

变换由三个量确定 $\{d\alpha_0, \xi_0, \eta_0\}$。$(\xi_0, \eta_0)$ 是历元平天极向量 $\bar{e}_3$ 在国际天球参考系下坐标，也是两个天极 $P, \bar{P}$ 在第一和第二坐标方向上的角距离。称作"历元平天极偏置"。

$d\alpha_0$ 是历元平春分点在国际天球参考系下的赤经。称"春分点偏置"

具体操作（由国际 → 历元）

1 绕第三轴逆时针旋转 $d\alpha_0$。基本平面 (e_1, e_2) 变换矩阵 $R_3(-d\alpha_0)$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

2 绕第二轴逆时针旋转 ξ_0。基本平面 $(\bar{e}_1, e_2)$。变换矩阵 $R_2(-\xi_0)$

3 绕第一轴顺时针旋转 η_0。基本平面 $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$。变换矩阵 $R_1(\eta_0)$

总变换关系：

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) B$$

$$B = R_3(-d\alpha_0) R_2(-\xi_0) R_1(\eta_0).$$

B称作"历元偏置变换"

三个参数由实测给出。 $d\alpha_0 = (-0.01460 \pm 0.00050)''$

$\xi_0 = (-0.0166170 \pm 0.0000100)''$

$\eta_0 = (-0.0068192 \pm 0.0000100)''$

2. 平赤道系与国际天球参考系的四旋转法

$(0, e_1', e_2', e_3')$ $(0, e_1, e_2, e_3)$

注：平赤道系为只考虑岁差的赤道系

国→平的变换操作：

1 (e_2, e_3) 绕第一轴 e_1 逆时针转 ε_0。ε_0 称"历元黄赤交角"
转至 (u_2, u_3)。(e_1, u_2) 在历元黄道面上。u_3 为历元黄极

2 (e_1, u_2) 绕第三轴 u_3 顺时针旋转 ψ_A 至 (u_1', u_2')。ψ_A 称"黄经岁差"

$$(e_1, u_2, u_3) = (e_1, e_2, e_3) R_1(-\varepsilon_0)$$

$$(u_1', u_2', u_3) = (e_1, u_2, u_3) R_3(\psi_A)$$

3 (u_2', u_3) 绕第一轴 u_1' 顺时针转 ω_A 至 (u_2'', e_3')。ω_A 为瞬时平赤道面与历元黄道面交角

$$(u_1', u_2'', e_3') = (u_1', u_2', u_3) R_1(\omega_A)$$

4 (u_1', u_2'') 绕第三轴 e_3' 逆时针旋转 χ_A 至 (e_1', e_2')。χ_A 称"赤经岁差"

$$(e_1', e_2', e_3') = (u_1', u_2'', e_3') R_3(-\chi_A)$$

总变换关系：$(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) \cdot P(t)$

$$P(t) = R_1(-\varepsilon_0) R_3(\psi_A) R_1(\omega_A) R_3(-\chi_A)$$

(即天极绕黄极进动)

其中：ψ_A, ω_A, χ_A 是由地球相对国际天球参考系的岁差运动决定。

$\psi_A = \cdots$，$\omega_A = \cdots$，$\chi_A = \cdots$。见书 P79.（5.17）（《天球参考系变换及其应用》）

3. 平赤道系 $(0, e_1', e_2', e_3')$ 与国际天球坐标系 $(0, e_1, e_2, e_3)$ 的三旋转法

1 (e_1, e_2) 绕 e_3 顺时针旋转 ζ_A 至 (u_1, u_2)

2 (e_3, u_1) 绕 u_2 逆时针转 θ_A 至 (e_3', u_1')

3 (u_1', u_2) 绕 e_3' 顺时针转 z_A 至 (e_1', e_2')

$$(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) R_3(\zeta_A) R_2(-\theta_A) R_3(z_A)$$

ζ_A，θ_A，z_A 见 P80（5.20）

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

3. 真赤道系和平赤道系的变换

(O, e_1'', e_2'', e_3'')　(O, e_1', e_2', e_3')

真：考虑了岁差+章动　平：只考虑岁差　. 联系由章动矩阵 $N(t)$ 给出.

分三步：① (e_2', e_3') 绕第一轴 e_1' 逆时针旋转 ε_A 至 (u_2, u_3). 基本面为黄道面

$(e_1', u_2, u_3) = (e_1', e_2', e_3') R_1(-\varepsilon_A)$

② (e_1', u_2) 绕第三轴 u_3 在黄道面内顺时针旋转 $\Delta\psi$ 至 (e_1'', u_2')

$(e_1'', u_2', u_3) = (e_1', u_2, u_3) R_3(\Delta\psi)$

③ (u_2', u_3) 绕第一轴 e_1'' 顺时针旋转 $\varepsilon_A + \Delta\varepsilon$ 到 (e_2'', e_3'')

$(e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1'', u_2', u_3) R_1(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon)$

$$\Rightarrow (e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1', e_2', e_3') R_1(-\varepsilon_A) R_3(\Delta\psi) R_1(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon)$$
$$= (e_1', e_2', e_3') \underbrace{N(t)}_{\text{章动矩阵}}$$

坐标变换关系

平赤道系 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = N(t) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ 真赤道系

ε_A：平黄赤交角　$\Delta\psi$：黄经章动　$\Delta\varepsilon$：倾角章动

4. 真赤道系和国际天球参考系变换关系

$\{O, e_1'', e_2'', e_3''\} \longleftarrow \{O, e_1, e_2, e_3\}$.

① $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) B$

历元平赤道系　国际天球参考系

② $(e_1', e_2', e_3') = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) P(t)$

平赤道系　历元平赤道系

③ $(e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1', e_2', e_3') N(t)$

真赤道系　平赤道系

$$\Rightarrow (e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1, e_2, e_3) B P(t) N(t)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B P(t) N(t) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

几种坐标系(三)：

a. 国际地球参考系

· 为什么建立：为了处理观测数据，还需地面测站在国天系中坐标.

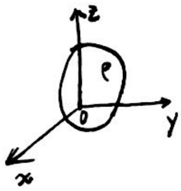
三步：① 建立与地球表面固接，随地球周日运动在空间中一起旋转的参考系，在此系中测站位置几乎不随时间变化

② 建立地球参考系与真赤道系变换关系

③ 建立真赤道系与国际天球参考系变换，求测站在国天系坐标.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

·引入形状轴、形状极



$L_{ij}=\int \rho x_i x_j dV$ $(i=1,2,3)$

旋转椭球刚体 $I=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$ 对于地球：$A=B<C$

A,B,C与时间无关

三轴叫做地球惯性主轴

C最大，称形状轴

·引入蒂塞朗平均轴

潮汐、滞弹性、三个主转动惯量与t有关、物质运动.

以上因素对主轴有小影响，但不能忽略.

将三轴调整，使总效应为0. 此轴称蒂塞朗轴

·国际地球参考系：理想为地球蒂塞朗轴

b. 观测站坐标、

把地球看作旋转椭球体，建立国际地球参考系 (x,y,z)

观测站坐标 (h,λ,ϕ). h：海拔高度 λ：大地经度 φ：大地纬度

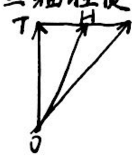
几种坐标系变换关系：

轴、极概念：国际地球参考系建立在形状轴上，要研究其性质，必须研究形状轴在国天系性质(由牛二定出)

(1) 三个轴

自转轴、形状轴、角动量轴

(2) 三轴性质



共线

(3) 在国际天球参考系、如不考察外力作用，角动量大小、方向保持不变；如有外力作用，产生进动，由牛二可预报

(4) 在国际地球系，形状轴不动，自转轴绕形状轴转动，轨迹为锥面.

如不考虑地球受外力，角动量轴相对形状轴运动取决于地球动力学状态，理论上无法预报.

(5) 地球参考系在形状上，对椭球地球，角动量轴(H)几乎与自转轴(R)指向同一方向：真赤道系第三轴.

极H在地球参考系位置由极移向量$\vec{p}$确定

如果知道$\vec{p}$，则地球-天球参考系变换关系确定

起中介作用的极H把地极T在地球参考系的运动分为二部分：天文(岁差、章动)+地球极移

$\vec{p}=\vec{p}_c+\vec{p}_F$ — 可预报、受迫

$\vec{p}_c$ ↓ 不可预报、自由

与H相应极和轴分别称为中介极和中介轴.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(6) H作为中介极缺点：把可预报$\vec{P}_F$与不可预报P_E混在一起

$\vec{P}_F$是由日月引力引起的慢变量

(7) 天球历书极N：完全分离地球参考系极了相对天球系的$\vec{P}_E$和$\vec{P}_F$

(周日受迫极移归入天文章动)

天球中介极(CIP)：考虑非刚体，引进天球历书极定义

CIP在天球参考系中运动主要由作用于地球的外力矩引起

几种坐标系变换(三)：

观测站坐标系与国际地球坐标系变换 $(O\text{-}xyz)$

(h,λ,ϕ)

a. 设测站或天体为P

$O\text{-}xyz.\quad u=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad (3.3)$$

导出(x,y,z)与(h,λ,ϕ)关系：

$$\frac{2udu}{a^2}+\frac{2zdz}{b^2}=0 \quad \Rightarrow \frac{dz}{du}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{u}{z}$$

在Q_0上，$\left|\frac{dz}{du}\right|_0=-\frac{b^2u_0}{a^2z_0}$

$$\Rightarrow \tan\phi=\frac{a^2z_0}{b^2u_0}$$

$$\Rightarrow z_0=(1-e^2)u_0\tan\phi \qquad (3.4)$$

由(3.3)，(3.4)有 $u_0=N\cos\phi$ (3.5)

$z_0=(1-e^2)N\sin\phi$ (3.6)

式中 $N=\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}}$ (3.7)

由图 $|Q_2Q_0|=\dfrac{u_0}{\cos\phi}=N \quad |Q_1Q_0|=\dfrac{z_0}{\sin\phi}=(1-e^2)N$

$|Q_2Q_1|=|Q_2Q_0|-|Q_1Q_0|=e^2N$ (3.8)

观测(天体)在子午面坐标为

$$\begin{cases} x=(N+h)\cos\phi\cos\lambda \\ y=(N+h)\cos\phi\sin\lambda \\ z=[(1-e^2)N+h]\sin\phi \end{cases} \qquad (3.9)$$

此变换称正变换

逆问题，由(x,y,z)到(h,λ,ϕ).

记$\Delta z=|R_2R_1|=|Q_1Q_2|\sin\phi=e^2N\sin\phi$

由(3.7) $\Delta z=\dfrac{ae^2\sin\phi}{\sqrt{1-e^2\cos^2\phi}}$ (3.10)

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

ΔQ_1R_1P中，得 $\sin\phi = \frac{|R_2P|}{|Q_2P|} = \frac{z+\Delta z}{\sqrt{x^2+y^2+(z+\Delta z)^2}}$ (3.11)

由(3.10)(3.11)迭代求解．以$\Delta z = e^2 z$为初值．

$\lambda = \arctan\frac{y}{x}$

$h = \sqrt{x^2+y^2+(z+\Delta z)^2} - N$

$\phi = \arcsin(\sin\phi)$

b. 国际地球参考系和真赤道系变换

$\{0, e_1''', e_2''', e_3'''\}$ $\{0, e_1'', e_2'', e_3''\}$

$(e_1''', e_2''', e_3''') = (e_1'', e_2'', e_3'')\, R_3(-GST)\, R_3(-s')\, R_2(x_p)\, R_1(y_p)$

与书上4.4.3节比较，增加一个旋转．[为了调整经度起算原点，使成为无转动原点(地球历书原点)]

沿真赤道逆时针转 $s' = -47t$ (微角秒)

注意书P59．(4.65) $\alpha \to -GST - s'$． $\xi \to x_p$． $\eta \to -y_p$

具体变换式见图6.8．(P108)

GST的讨论：

国地系 $(0, e_1''', e_2''', e_3''')$ 基本方向指向经度线或本初子午线．

真赤道系 $\{0, e_1'', e_2'', e_3''\}$ 指向真春分点

在地球系春分点随天球顺时针转动．

e_1''与本初线的夹角GST为本初子午线上真春分点的时角称作．

定义 $t = \frac{TT - J2000.0}{36525}$ 则 $GST = GSMT + EECT$ ．(书P109，式(6.25)(6.26))

其中幅角 $\alpha_i = n_{i1}l + n_{i2}l' + n_{i3}F + n_{i4}D + n_{i5}\Omega + n_{i6}L_{VE} + n_{i7}L_E + n_{i8}p_A$

极移矩阵的讨论：

由(3.10)．极移矩阵 $W(t) = R_3(-s')R_2(x_p)R_1(y_p)$ 产生于复杂的地球物理因素．一般唯象给出．

地球自转参数ΔAT，x_p，y_p 可从网站 www.iers.org 下载

地球力学时与世界时之差多项式表达式

c. 经典地球和天球参考系变换

国际地球参考系 (e_1''', e_2''', e_3''')

国际天球参考系 (e_1, e_2, e_3)

真赤道系 (e_1'', e_2'', e_3'')

$(e_1''', e_2''', e_3''') = (e_1'', e_2'', e_3'')\, R_3(-GST)\, R_3(-s')\, R_2(x_p)\, R_1(y_p)$

又 $(e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1, e_2, e_3)\, B\, P(t)\, N(t) = (e_1, e_2, e_3)\, Q(t)$

$\Rightarrow (e_1''', e_2''', e_3''') = (e_1, e_2, e_3)\, Q\, R_3(-GST)\, R_3(-s')\, R_2(x_p)\, R_1(y_p)$

$= (e_1, e_2, e_3)\, Q(t)\, R(t)\, W(t)$

$(x, y, z)^T = Q(t)\, R(t)\, W(t)\, (x''', y''', z''')^T$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

心泉

第四课 中介参考系和CEO变换

本课内容：引入中介极和中介轨道概念，来取代真天极和真赤道概念。
从而讨论中介赤道系与国际天球参考系的变换，得到新的基于CEO的地-天坐标系变换。

(1) 天球系为惯性系，由牛二得到基本物理量 $\vec{r}(t)$ $(\vec{v}(t))$.
若能得到某惯性系与天球系的变换关系，就能得到非惯性系的基本物理量
比如求中介赤道基本物理量即视位置.
真赤道系采用国天系变换，真赤道系 → 平赤道系 → 历元平赤道系（与国际天球参考系偏离不远）
真赤道系-天球系完全可以从天球系加以简化和改进.
第一，以CEO变换代替经典变换
二，以无转动原点取代春分点.

(2) 传统方法导出天球系 → 真赤道系变换
(e_1, e_2, e_3) (e_1'', e_2'', e_3'')

$(e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1, e_2, e_3)\, B\, P(t)\, N(t)$

(3) 中间赤道系一国际天球参考系变换

a. 中间赤道系的极相对国天系（惯性系）运动，可以由理论（牛二）和观测唯象给出 t时刻中介极向量在天球参考系的位置由球坐标余纬角 d 和经角 E 确定.

e_3''： $X = \sin d \cos E$
$Y = \sin d \sin E$
$Z = \cos d$

b. 中间赤道系 $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ 和国天系 $\{O, e_1'', e_2'', e_3''\}$

1) (e_1, e_2) 绕 e_3 逆时针转 E 到 (u_1, u_2)，交线 u_2 变为第二方向. $R_3(-E)$

2) (e_3, u_1) 在垂直交线的平面内绕 u_2 逆时针转 d，到 (e_3'', u_1''). $R_2(-d)$
天球赤道面转到中介赤道面，极向量 e_3 转至 e_3''.

3) (u_1, u_2) 在中介赤道面内绕 e_3'' 顺时针转 E，到 (u_1'', u_2''). $R_3(E)$

4) (u_1'', u_2'') 在中介赤道面内绕3轴顺时针转 S，到 (e_1'', e_2''). $R_3(S)$.

总变换：

$$(e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1, e_2, e_3)\, R_3(-E)\, R_2(-d)\, R_3(E)\, R_3(S) = (e_1, e_2, e_3)\, Q(t)$$

称为CEO变换.

[讨论].

a、中介赤道系与真赤道系区别在于：中介赤道系基本方向为天球历书原点 → 无转动原点、真赤道系为春分点.
为何引入无转动原点？
因为春分点相对于真赤道在旋转，其度量值为岁差与章动.
若基本点在转动，会增加测量与归算的困难. 恒星时概念不可用.
故采用无转动原点取代春分点，将真赤道系转换为中介赤道系.

b. S的意义和取值

中介极矢量 e_3'' 相对于天球系位置由 E, d 决定，与时间 t 有关。

$\vec{\omega} = \dot{E}\,\vec{e_3} + \dot{d}\,\vec{u_2}$

当 $\vec{e_3''}$ 转动时，标架 (u_1', u_2, e_3'')，(u_1'', u_2'', e_3'') 以及中介赤道上所有点以角速度 $\vec{\omega}$ 转动。

幻灯片中（第6页图），李 $u \to$ 陈 u_2，李 $v \to$ 陈 u_1'，李 $e_3' \to$ 陈 e_3''

$\vec{e_3} = \cos d\,\vec{e_3''} - \sin d\,\vec{u_1'}$ 代入，得

$\vec{\omega} = \dot{E}\cos d\,\vec{e_3''} - \dot{E}\sin d\,\vec{u_1'} + \dot{d}\,\vec{u_2}$

两个分量：$\vec{\omega_1} = \dot{E}\cos d\,\vec{e_3''}$ 反映中介极绕~~经~~度方向转动的角速度

$\vec{\omega_2} = -\dot{E}\sin d\,\vec{u_1'} + \dot{d}\,\vec{u_2}$ 反映沿中介赤道纬度方向的转动

$\vec{\omega_1} \perp \vec{\omega_2}$

设在中介赤道上取一点，在天球系角速度 $\vec{\omega} = \vec{\omega_2}$，~~其~~随中介赤道在纬度方向转动，不离开中介赤道

在 (u_1', u_2, e_3'') 或 (u_1'', u_2'', e_3'') 中观测，其沿中介赤道以 $-\dot{E}\cos d$ 运动。

在天球系观察，其随中介赤道在纬向摆动，无经向转动。

e_1'' 指向无转动原点，$t_0 = J2000.0$ 时 u_1' 与 e_1'' 和 e_1 重合。至 t 时刻，u_1' 在中介赤道面上转过 (e_1'', u_1')（以角速度 $\dot{E}\cos d$），当 d 和 $\dot{E}$ 都不变时为 $\cos d\,\dot{E}(t - t_0)$。

d、$\dot{E}$ 都随 t 在变，$\therefore (e_1'', u_1') = \int_{t_0}^{t} \dot{E}\cos d \cdot dt = E + \int_{t_0}^{t} (\cos d - 1)\dot{E}\,dt$。

令 $S = \int_{t_0}^{t} (\cos d - 1)\dot{E}\,dt + S_0$。

则 $(e_1'', u_1') = E + S$。S_0 取决于~~初~~值，可取为0。

$(u_1'', u_1') = E$。$(e_1'', u_1'') = S$。

c. 用直角坐标表示 $Q(t)$。

$$\begin{cases} X = \sin d \cos E \\ Y = \sin d \sin E \\ Z = \cos d \end{cases}$$

又令 $a = \dfrac{1}{1+\cos d} = \dfrac{1}{1+Z}$。

可得 $Q(t) = \begin{pmatrix} 1-aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1-aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1-a(X^2+Y^2) \end{pmatrix} R_3(s)$

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sin d \sin E\,\dot{E} + \cos d \cos E\,\dot{d} \\ \dot{Y} = \cos d \sin E\,\dot{d} + \sin d \cos E\,\dot{E} \\ \dot{Z} = -\sin d\,\dot{d} \end{cases}$$

$\Rightarrow \dot{E} = \dfrac{X\dot{Y} - Y\dot{X}}{1 - Z^2}$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

$$S=\int_{t_0}^{t}(\cos d-1)\dot{E}\,dt+S_0=-\int_{t_0}^{t}\frac{X\dot{Y}-Y\dot{X}}{1-Z^2}\,dt+S_0$$

$$=\int_{t_0}^{t}Y(t)\dot{X}(t)\,dt-\frac{1}{2}[X(t)Y(t)-X(t_0)Y(t_0)]+S_0$$

基于CEO的地球—天球参考系变换

中介系 $\{0,e_1'',e_2'',e_3''\}$、地球系 $\{0,e_1''',e_2''',e_3'''\}$.

$$(e_1''',e_2''',e_3''')=(e_1'',e_2'',e_3'')R_3(-\theta)R_3(-s')R_2(x_p)R_1(y_p)$$

其中 θ：中介赤道上由地球历书原点TEO到天球历书原点CEO的角度. 该两点均无转动.

又真赤道系 $\{0,e_1'',e_2'',e_3''\}$ 与天球参考系 $\{0,e_1,e_2,e_3\}$ 变换：

$$(e_1'',e_2'',e_3'')=(e_1,e_2,e_3)\,BP(t)N(t)$$

中介系 $\{0,e_1'',e_2'',e_3''\}$ 与天球参考系 $\{0,e_1,e_2,e_3\}$（CEO变换）：

$$(e_1'',e_2'',e_3'')=(e_1,e_2,e_3)R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s)$$

基于CEO变换的地 $\{0,e_1''',e_2''',e_3'''\}$ 与天 $\{0,e_1,e_2,e_3\}$ 变换：

$$(e_1''',e_2''',e_3''')=(e_1,e_2,e_3)R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s)R_3(-\theta)R_3(-s')R_2(x_p)R_1(y_p) \quad (4.6)$$

基于真赤道系地-天变换

$$(e_1''',e_2''',e_3''')=(e_1,e_2,e_3)BP(t)N(t)R_3(-GST)R_3(-s')R_2(x_p)R_1(y_p) \quad (4.7)$$

比较(4.6)(4.7)

$$BP(t)N(t)R_3(-GST)=R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s)$$

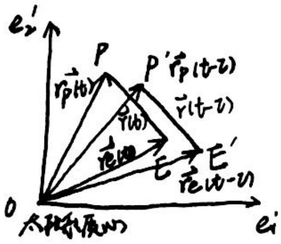
$$\Rightarrow BP(t)N(t)=R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s)R_3(-\theta+GST)$$

星体在地心中介参考系（真赤道系）的基本物理量 $\vec{r}(t)$（从而速度 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$）的推算：

(1) 视位置：指的是修正了光线时延和偏折后天体关于地心中介参考系（真赤道系）的位置

(2) 光行差：要求视位置，必考虑光速有限和天体关于测站相对运动而引起视位置变化

在国天系观测：



地心中介系（真赤道系）

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_P(t)-\vec{r}_E(t)$$

$$\dot{\vec{r}}(t)=\dot{\vec{r}}_P(t)-\dot{\vec{r}}_E(t)$$

光线经过时间 τ 从天体传到地球

$$\tau=\frac{\overline{P'E}}{c}=\frac{1}{c}\left|\vec{r}_P(t-\tau)-\vec{r}_E(t)\right|$$

定义 $\vec{r}_1(t)=\vec{r}-(\dot{\vec{r}}_p-\dot{\vec{r}}_e)c$

证明：$\vec{r}_1(t)$ 为 $(t-\tau)$ 真向径

$\vec{r}_1(t)=\vec{r}_p(t)-\vec{r}_e(t)-(\dot{\vec{r}}_p-\dot{\vec{r}}_e)\tau=(\vec{r}_p-\dot{\vec{r}}_p\tau)-(\vec{r}_e-\dot{\vec{r}}_e\tau)$

$=\vec{r}_p(t-\tau)-\vec{r}_e(t-\tau)=\vec{r}(t-\tau)$

令 $r=|\vec{r}(t)|$，$\vec{p}=\langle\vec{r}_1(t)\rangle$，视方向$\vec{p}$与真方向$\langle\vec{r}(t)\rangle$差叫光行差

当P为恒星，距离很远，只关心方向变化，$\dot{\vec{r}}_p(t)=0$

$\tau=\frac{|\vec{r}_p(t-\tau)-\vec{r}_e(t)|}{c}=\frac{1}{c}[\vec{r}_p(t)-\overset{=0}{\dot{\vec{r}}_p(t)}\tau-\vec{r}_e(t)]=\frac{1}{c}|\vec{r}(t)|$

$\vec{r}_1=\vec{r}(t-\tau)=\vec{r}-\dot{\vec{r}}(t)\tau=\vec{r}+\dot{\vec{r}}_e\tau$

$\vec{r}_1=|\vec{r}|(\langle\vec{r}\rangle+\frac{\dot{\vec{r}}_e}{c})$

$\vec{p}=\langle\vec{r}_1\rangle=\langle\langle\vec{r}\rangle+\frac{1}{c}\dot{\vec{r}}_e(t)\rangle$

视位置和光行差随地球周年运动速度$\dot{\vec{r}}_p(t)$而变，叫周年光行差

因地球自转产生的光行差：周日光行差

(3) 星历表的任务

对于地球时t求天体视位置（相对中介赤道系），即真地心距r，关于地心的视赤经α，视赤纬δ

(4) 一个计算星历表实例（日，月，火），具体步骤：

① 选t时刻天体天球参考系基本物理量：位置，速度
转化为地心位置和速度 $\vec{r}(t)$、$\dot{\vec{r}}(t)$

② 计算真地心距 $r=|\vec{r}|$

③ 求 $\vec{r}_1=\vec{r}(t-\tau)$，计算视方向单位矢 $\vec{p}=\langle\vec{r}_1\rangle$

④ 真赤道系 (O,e_1'',e_2'',e_3'') 与天球参考系 (O,e_1,e_2,e_3) 变换

$(e_1'',e_2'',e_3'')=(e_1,e_2,e_3)BP(t)N(t)\equiv(e_1,e_2,e_3)Q$

$Q(t)=R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s)$ [注：E, d, s 唯象]

$Q^{-1}=Q^T=R_3(-s)R_3(-E)R_2(d)R_3(E)$

⑤ 由国天系 → 真赤道系，∵ $(e_1'',e_2'',e_3'')Q^{-1}=(e_1,e_2,e_3)$

$P_1=Q^{-1}P$ P_1：真赤道坐标，P：国天坐标

⑥ 化矢量P_1为球坐标，经角：赤经α、纬角：赤纬δ

⑦ 如果求天体黄道坐标 → 黄道系 $P_2=R_1(\varepsilon_A+\Delta\varepsilon)P_1$

平黄赤交角 倾角章动 （唯象给出）

⑧ 化P_2为球坐标 经角：黄经λ 纬角：黄纬β

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(4) 求出天体关于地平坐标系基本物理量 $\vec{r}(t)$ 和速度 $\vec{v}(t)$

① 由测站大地坐标 λ, ϕ 计算地心坐标 $\vec{r}_{s0} = (x_{s0}, y_{s0}, z_{s0})^T$

② 由真赤道系（中间赤道系）⟶ 地球系

真春分点、 无转动原点、 (e_1'', e_2'', e_3'')

$(e_1''', e_2''', e_3''') = (e_1'', e_2'', e_3'')W(t)$

$\vec{r}_s \overset{中}{=} W(t)\vec{r}_{s0}$ — 地

③ 计算天球中介系 — 天球参考系变换（天球历书原点）

$Q(t) = R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s)$ （E, d, s 唯数）

地球中介系基本方向为地球历书原点，二者角距离为 θ，由书(6.2.9)计算

地球中介系 — 天球参考系变换矩阵

$Q_T = QR_3(-\theta)$ $\quad Q_T^{-1} = R_3(\theta)Q^{-1}$

④ 从月日火历表文件读得 t 时刻地心天球系 $\vec{r}_{p0}$，$\dot{\vec{r}}_{p0}$

⑤ 由③可有天体地球中介系向径 $\vec{r}_p = Q_T^{-1}\vec{r}_{p0}$

⑥ 天体站心向径 $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_s$

⑦ 由 $\tau = \dfrac{|\vec{r}_p(t-\tau) - \vec{r}_s(t)|}{c}$ 迭代计算光行时 τ

⑧ 按⑤→⑦步重新计算可得天体天球中介系中位置 $\vec{r}_p(t)$，从而 $\vec{r}(t-\tau) \to \vec{p}_0 = \langle \vec{r}(t-\tau) \rangle$

由于 λ 为天体子午面与地球参考系第一方向夹角，而格林尼治恒星时 GST 为本初子午面与地球第一方向夹角.

$LST = GST + (\lambda - GST) = \lambda$. （$\lambda$ 与书(5.2)不同）

⑨ 由书(5.2)有 $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_3(-\lambda)\vec{p}_0$

⑩ 由书(5.1)，$P = R_2(90^\circ - \phi)P_1$ $\quad P_1$：时角系 → P：地平系

⑪ 化 P 为球坐标，经角 — 地平经度 α，纬角 — 地平高度 h

天体升落和中天时刻：

(1) 概述

在国天（惯性系），天体基本物理量为 $\vec{r}(t)$，$\dot{\vec{r}}(t)$，由牛二导出.

(2) 时角坐标系与地平坐标系关系（由(5.1)）.

$$\underset{时角}{\begin{pmatrix} \cos\delta\cos H \\ \cos\delta\sin H \\ \sin\delta \end{pmatrix}} = R_2(90^\circ - \phi)\underset{地平}{\begin{pmatrix} \cosh\cos\alpha \\ \cosh\sin\alpha \\ \sin h \end{pmatrix}}$$

由上式，有 $\sin h = \sin\phi\cos\delta + \cos\phi\cos\delta\cos H$.

又时角 → 真赤道系：

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} R_3(LST)\begin{pmatrix} \cos\delta\cos H \\ \cos\delta\sin H \\ \sin\delta \end{pmatrix}$$

$H = LST - \alpha = GST + \lambda - \alpha$

若 λ, δ, α 为常数，$\Delta H = \Delta GST = -\dfrac{\Delta h\cosh}{\cos\phi\cos\delta\sin H}$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

第五课

本课复习物理学研究方法，给出圆周运动的物理模型、基本方程和推论，讨论有大小的天体与引力场~~物~~构成的系统

物理学研究方法

物模 → 数模 → 求解 → 物理量与时空的函数关系

与观测对比，不符合则改进

科学过程 —— 不断观测、不断改进物理模型的过程

物理模型 —— 物质世界的结构和演化

基本特点：由基本物理量描述

若物理量与时空的函数关系确定，可推演出所有相关物理量与时空的函数关系

数学模型 —— 作用与运动的关系的动力学方程、基本方程

求解条件：初始、边界、衔接条件

常见物理模型（天体）

刚体（地球）　流体（理想流体，粘滞流体，湍流，磁流体）（星际介质、吸积盘

弹性体、质点、处于非热平衡物体

天体测量学内容

由物理模型的定义、建立合适的坐标系，观测物理量随时间的函数关系，将理论与观测/实验对比，限制物理模型。观测即天体测量学的内容。

天体力学内容

由于国际天球参考系为惯性系（至少为近似的），此时牛顿定律适用，容易建立数学模型求解。实际上为非惯性系（观测站），若给出观测站坐标系与国天系的变换关系，就能给出观测站基本物理量。

天体力学研究对象

1. 有形状、大小的天体
2. 可看作质点的天体
3. 楼上的组合、引力场

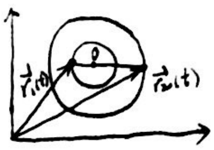
天体力学发展历史　（不断观测、改进物理模型）

亚里士多德 → 托勒密 → 哥白尼 → 第谷 → 伽利略 → 开普勒 → 牛顿 → 爱因斯坦 → ……

圆周运动的研究

(1) 基本物理量

两质点、引力场



m_i，$\vec{r}_i(t)$，$i=1,2$，引力势 $\phi(\vec{r},t)$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(2) 基本方程

二体问题

(3) 求解方程方法：结合初始条件

数学模型 (令 $\vec r=\vec r_1(t)-\vec r_2(t)$)

$$\begin{cases}\ddot{\vec r}=-\frac{\mu\vec r}{r^3} & (r=\text{const}=R)\\ \vec r|_{t=0}=R\hat r\\ \dot{\vec r}|_{t=0}=v\hat\theta\end{cases}$$

其中 $\mu=G(m_1+m_2)$

$m_1\vec r_1+m_2\vec r_2=\vec C_1 t+\vec C_2$. ($\vec C_1,\vec C_2$ 由初始条件定)

解出 ⇒ $\vec r_1(t),\vec r_2(t)$, $\phi(\vec r,t)$. ⇒ 所有相关物理量

由理论力学, $\ddot{\vec r}=(\ddot r-r\dot\theta^2)\hat r+(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)\hat\theta$

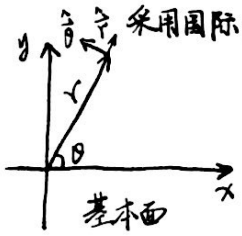
$$\Rightarrow\begin{cases}r^2\dot\theta=h\ (\text{常数})\\ -\frac{\mu\vec r}{r^3}=-\frac{\mu}{r^2}\hat r=(\ddot r-r\dot\theta^2)\hat r\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{\mu}{r^2}=\ddot r-r\dot\theta^2=\ddot r-\frac{h^2}{r^3}$$

又 $\vec r=r\hat r$　$\dot{\vec r}=\dot r\hat r+r\dot\theta\hat\theta$

初始条件：$t=0$时 $r=R$, $\dot{\vec r}=v\hat\theta$ ⇒ $r(t)=R$. $h=r^2\dot\theta=Rv$

又 $\ddot r=0$ ⇒ $h^2=\mu R=R^2v^2=R^4\omega^2$ ⇒ $R^3\omega^2=\mu=G(m_1+m_2)$

另一种方法证明：



采用国际天球参考系

$\hat r=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$　$\hat\theta=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

$\vec r(t)=R\hat r=\begin{pmatrix}R\cos\theta\\ R\sin\theta\end{pmatrix}$

$\dot{\vec r}=R\dot{\hat r}=R\frac{d\hat r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\begin{pmatrix}-R\omega\sin\theta\\ R\omega\cos\theta\end{pmatrix}=R\omega\hat\theta$

$\ddot{\vec r}=R\ddot{\hat r}=-R\omega^2\hat r$

(4) 应用

设卫星和地球绕质心做圆周运动, 角速度为ω. 两者相距 $r_1+r_2=R$. $m_1=m_{Earth}$, $m_2=m_{satellite}$

则有 $R^3\omega^2=Gm_1(1+\frac{m_2}{m_1})$

(5) 质点m, 地球M. 当质点由 $\vec r_A\to\vec r_B$ (相对地球)

引力做功 $W=\int_{r_A}^{r_B}\vec F\cdot d\vec r$

$$=\int_{r_A}^{r_B}-\frac{GmM}{r^3}\vec r\cdot d\vec r=\int_{r_A}^{r_B}-\frac{GMm}{r^3}\cdot r\,dr=-\int_{r_A}^{r_B}\frac{GMm}{r^2}dr=GMm\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

W只与位置有关, 与路径无关

—— 引力为保守力

定义r_A, r_B处势能差 $W=V_g(r_A)-V_g(r_B)$

若定义无穷远处为势能零点, 则 $V_g(r)=-\frac{GMm}{r}$

定义引力势：单位质量的引力势能, 则 $\phi(r)=-\frac{GM}{r}$. 且可证明 $\vec F_g=-\nabla\phi$

(6) 卫星m ~~二体~~总能量

$$E(r)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}$$

圆轨道上有 $v^2=\frac{G(M+m)}{r}\overset{M\gg m}{\approx}\frac{GM}{r}$，代入上式得 $E(r)\approx-\frac{1}{2}\cdot\frac{GMm}{r}$

§ 天体为有限大小，系统基本物理量、基本方程，推论

一个刚性天体（有大小）与引力场系统

(1) 基本物理量

离散分布时—— $m_i, \vec{r}_i$ $(i=1,2,\cdots,N)$

连续分布时—— $\rho(\vec{r})$，$\phi(\vec{r})$

(2) 基本方程

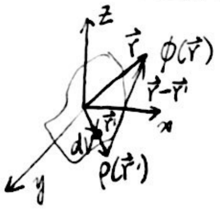
(i) 物质激发引力场（$\rho=0$时为 Laplace 方程）

$\nabla^2\phi=4\pi G\rho$ （Poisson 方程）

(ii) 引力场作用于物质

牛顿定律

Poisson方程和 Laplace 方程的推导：



$\vec{r}'$处 dV 的质量元在$\vec{r}$处产生的引力加速度 $d\vec{A}=\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}G\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'$

总的引力加速度 $\vec{A}=G\iiint_V\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'$

又有 $\vec{A}=-\nabla_r\phi$，$\phi=-G\int\frac{\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'}{|\vec{r}'-\vec{r}|}$

$$\vec{\nabla}_r\cdot\vec{A}=G\int\left[\nabla_{\vec{r}}\cdot\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}\right]\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}' \quad (\nabla_{\vec{r}}\text{不作用于}\rho(\vec{r}'))$$

$$\nabla_{\vec{r}}\cdot\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}=-\frac{3}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}+\frac{3(\vec{r}'-\vec{r})^2}{|\vec{r}'-\vec{r}|^5}$$

当 $\vec{r}'\neq\vec{r}$，上式 $=0$

$$\nabla_r\cdot\vec{A}=G\rho\iiint_{|\vec{r}'-\vec{r}|\leq h}\vec{\nabla}_r\cdot\frac{(\vec{r}'-\vec{r})}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}d^3\vec{r}' \quad (h\to0)$$

$$=-G\rho\iint\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}\cdot d\vec{S}' \quad (\text{Gauss 定律})$$

$$=-G\rho\frac{h}{h^3}\cdot4\pi h^2$$

$$=-4\pi G\rho$$

$$\because\nabla^2\phi=-\vec{\nabla}_r\cdot\vec{A}=4\pi G\rho$$

特例：点源，$\rho(\vec{r})=m\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

$$\phi(\vec{r})=-\frac{Gm}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

Possion 方程微分形式（引力场中的高斯定律）

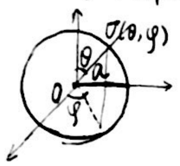
$$\oint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=-4\pi Gm$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(3) 求解的方法

—— 联立求解基本方程（Poisson方程与牛顿方程）

例．求解无限薄球壳的引力势



建立数学模型：

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (r\neq a)$$

$$\phi|_{r\to a^-} = \phi(a+)$$

$\phi|_{r=0}$，$\phi|_{r=\infty}$ 有限（自然边界条件）

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{a^+} - \frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{a^-} = 4\pi G\sigma(\theta,\varphi)$$

由数理方程知识解上方程，得

$$r\leq a.\quad \phi(r,\theta,\varphi) = -4\pi G a\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\sum_{m=-n}^{n}\frac{\sigma_{nm}}{2n+1}Y_n^m(\theta,\varphi)$$

$$r\geq a.\quad \phi(r,\theta,\varphi) = -4\pi G a\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=-n}^{n}\frac{\sigma_{nm}}{2n+1}Y_n^m(\theta,\varphi)$$

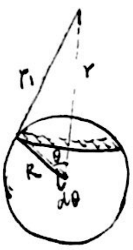
σ_{nm}（展开系数）

$$\sigma(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sigma_{nm}Y_n^m(\theta,\varphi).$$

例．任意形状刚体．（利用薄球壳的结果积分，略）．

例．由引力势求引力

球对称引力场（天体外部）等效于所有质量集中于球心的情形．



（球壳）

圆环面积 $dS = 2\pi R\sin\theta\cdot Rd\theta$ ．

V为引力势，则 $dV = -\dfrac{G\sigma dS}{r_1} = -\dfrac{G\cdot\sigma\cdot(2\pi R^2\sin\theta d\theta)}{r_1}$

其中 $\theta\in[0,\pi]$．$r_1\in[r-R,\ r+R]$．

$r_1^2 = r^2+R^2-2rR\cos\theta$．取微分．

$$r_1dr_1 = rR\sin\theta d\theta$$

$$\therefore dV = -\frac{G\sigma\cdot 2\pi R}{r}dr_1$$

$$V_{shell} = \int_{r-R}^{r+R} -\frac{G\sigma\cdot 2\pi R}{r}dr_1 = -\frac{G\sigma\cdot 4\pi R^2}{r} = -\frac{GM_{shell}}{r}$$

$$\therefore V_{sphere} = \sum -\frac{GM_{shell}}{r} = -\frac{G}{r}\sum M_{shell} = -\frac{GM_{sphere}}{r}$$

第六课 二体问题

研究两质点体系(二体)与引力场系统，给出物理模型、基本物理量、基本方程、推论

两质点体系与引力场系统：

(1) 基本物理量

$m_i, \vec{r}_i \quad (i=1,2)$. $\phi(\vec{r},t)$

(2) 基本方程(牛顿框架下)

a. 两质点对引力场作用与运动关系(两质点激发引力场)

$$\phi(\vec{r},t) = -\frac{Gm_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{Gm_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} \qquad (6.1)$$

b. 引力场对质点有力的作用，作用与运动关系(牛二律)

$$-m_1\nabla\phi_1(\vec{r}_1,t) = m_1\ddot{\vec{r}}_1$$
$$-m_2\nabla\phi_2(\vec{r}_2,t) = m_2\ddot{\vec{r}}_2 \qquad (6.2)$$

其中ϕ_1，ϕ_2不包括自身的引力场.

将(6.1)代入(6.2)，得

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = +\frac{Gm_1m_2}{r^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1) \qquad (6.4)$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = +\frac{Gm_1m_2}{r^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \qquad (6.5)$$ 其中$r=|\vec{r}_1-\vec{r}_2|$

求解方法：先由(6.4)(6.5)求出$\vec{r}_1(t)$，$\vec{r}_2(t)$，再代入(6.1)得$\phi(\vec{r},t)$.

(3) 初始条件

$$\vec{r}_1|_{t=0} = \vec{r}_{10}, \quad \vec{r}_2|_{t=0} = \vec{r}_{20}$$
$$\dot{\vec{r}}_1|_{t=0} = \vec{v}_{10}, \quad \dot{\vec{r}}_2|_{t=0} = \vec{v}_{20} \qquad (6.6)$$

(4) (由基本方程得)推论

a. 动量积分(质心运动积分)

(6.4)+(6.5)： $m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0$

积分：$m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = \vec{P} \equiv (m_1+m_2)\frac{d\vec{r}_c}{dt}$

$\Rightarrow m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{C}_1 t + \vec{C}_2$

其中$\vec{P}$，$\vec{C}_1$，$\vec{C}_2$可由初始条件确定.

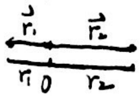
$\vec{r}_c = \frac{\vec{P}}{m_1+m_2}t + \vec{r}_{c0}$. $\vec{r}_{c0}$也由初始条件给定.

b. $\vec{r}_1-\vec{r}_2$表示两质点相对位置，导出关于$\vec{r}_1-\vec{r}_2$的基本方程.

(6.4)-(6.5)： $$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = -\frac{G(m_1+m_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \qquad (6.8)$$

若坐标系原点为天体之一，则此系为非惯性系.

c. 设两质点体系为孤立体系，则惯性系原点可取质心



$|\vec{r}_1-\vec{r}_2| = r_1+r_2$

由质心定义，$r_1+r_2 = r_1(1+\frac{r_2}{r_1}) = r_1(1+\frac{m_1}{m_2})$

可得 $m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}\hat{r}_1 = -\frac{Gm_1}{r_1^2}\cdot\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}\hat{r}_1$

Def. $M_{R_2} = \frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2} = \frac{m_2}{(1+\frac{m_1}{m_2})^2}$ 称为m_2的约化质量

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{GM_{R_2}}{r_1^2}\hat{r}_1 \qquad (6.9)$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

同理 $\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{GM_{R_1}}{r_2^2}\cdot\hat{r}_2$ (6.10)

其中 $M_{R_1} = \frac{m_1}{(1+\frac{m_2}{m_1})^2}$ 称为 m_1 的约化质量

(6.8) (6.9) (6.10) 可统一写成 $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\hat{r}}{r^2}$，其中 $\mu = GM$.

若原点为一个天体，$M = m_1 + m_2$

若原点为质心，M 为施力天体的约化质量

d. 角动量积分（动量矩积分）

由上，$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}$

有 $\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}\times\vec{r} = 0$

$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$

$\Rightarrow \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{h} = \text{const}.$

$\vec{h}$：单位质量的角动量，称为比角动量

e. 比角动量与基本物理量的关系

$\vec{r} = r\hat{r}$

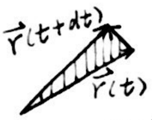
$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$v = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$

$\vec{h} = \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\times(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = r^2\dot{\theta}\,\vec{\omega}$. $\vec{\omega} = \hat{r}\times\hat{\theta}$

$\vec{h}$ 为常矢量 $\Rightarrow \vec{\omega}$ 为常矢量，$r^2\dot{\theta} = h$

f. 面积速度与基本物理量关系



$n_A\,dt = |\frac{1}{2}\vec{r}\times\dot{\vec{r}}dt| = \frac{1}{2}h\,dt$

$\Rightarrow n_A = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$

g. 拉普拉斯矢量 $\vec{e}$ 的引入.

由 $\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}$,

$\ddot{\vec{r}}\times\vec{h} = -\frac{\mu\hat{r}}{r^2}\times\vec{h}$

又 $\hat{r}\times\vec{h} = \hat{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \vec{r}(\hat{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\hat{r}\cdot\vec{r}) = \dot{r}\vec{r} - \dot{\vec{r}}r$

又 $\frac{d}{dt}(\frac{\vec{r}}{r}) = \frac{r\dot{\vec{r}} - \vec{r}\dot{r}}{r^2}$

$\therefore \hat{r}\times\vec{h} = -r^2\frac{d}{dt}(\frac{\vec{r}}{r})$

$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}\times\vec{h} = \mu\frac{d\hat{r}}{dt}$

$\vec{h}$ 为常矢量 $\therefore$ 积分得 $\dot{\vec{r}}\times\vec{h} = \mu(\hat{r} + \vec{e})$ （$\vec{e}$ = 常矢量）

$\Rightarrow \vec{e} = \frac{1}{\mu}\dot{\vec{r}}\times\vec{h} - \hat{r}$ ，称为 Laplace 矢量

将 $\vec{h} = \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$ 代入上式，得 $\vec{e} = \frac{1}{\mu}\dot{\vec{r}}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) - \hat{r} = (\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r})\vec{r} - \frac{r\dot{r}}{\mu}\dot{\vec{r}}$

$\vec{e}$ 为常矢量，与 t 无关

h. 能量积分

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}$$

两边点乘 $\dot{\vec{r}}\,(\vec{v})$. $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{d}{d\vec{r}}\left(\frac{\mu}{r}\right)\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right)$$

积分：$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \varepsilon = const$. ε为比能量.

(5) 基本方程推论(第二部分) —— 轨道方程

方案1：用$\vec{e}$推出轨道方程

$$\dot{\vec{r}}\times\vec{h} = \mu(\hat{r}+\vec{e})$$

用$\vec{r}$点乘：$\vec{r}\cdot(\dot{\vec{r}}\times\vec{h}) = \mu(r+\vec{r}\cdot\vec{e})$

$$\vec{r}\cdot\vec{e} = re\cos f = re\cos(\theta-\omega)$$

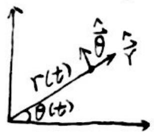
又 $\vec{r}\cdot(\dot{\vec{r}}\times\vec{h}) = \vec{h}\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = h^2$

$$\Rightarrow r = \frac{h^2/\mu}{1+e\cos f} = \frac{P}{1+e\cos(\theta-\omega)} \quad \text{--- 圆锥曲线}$$

方案2：以分量形式导出轨道方程

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}$$

引入极坐标 $(r(t), \theta(t))$



$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

代入得 $\begin{cases}\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}\\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2}\\ h = r^2\dot{\theta}\end{cases}$

令 $u=\frac{1}{r}$, 则

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{h}{r^2}\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\right) = -\frac{h}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(hu^2\cdot 1\cdot\frac{1}{u^2}\right)\frac{du}{d\theta} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

代入 $\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \frac{\mu}{h^2}$

解得 $u = \frac{\mu}{h^2}[1+e\cos(\theta-\omega)]$.

e：偏心率 . ω：近点角距 —— 由初始条件定

$$\Rightarrow r = \frac{P}{1+e\cos(\theta-\omega)} \quad . P = \frac{\mu}{h^2}$$

← 圆锥曲线方程

[讨论]：$e=0$. $P=a$. 圆

$0<e<1$. $P=a(1-e^2)$ 椭圆

$e=1$. $P=2a$. 抛物线

$e>1$ $P=a(e^2-1)$ 双曲线

直角坐标系下轨道方程：

$r = \frac{P}{1+e\cos(\theta-\omega)}$. $x=r\cos(\theta-\omega)$ $y=r\sin(\theta-\omega)$

$\Rightarrow (1-e^2)x^2+2pex+y^2 = p^2$

$e=0$：$x^2+y^2=p^2$

$e=1$：$-2px = y^2-p^2$

$e<1$. $\frac{(x+c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$e>1$. $\frac{(x-c)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184　传真：0551－63631760　Http://www.ustc.edu.cn

不同轨道下的参量

因天体基本物理量 $\vec{r}(t)$ ($\dot{\vec{r}}(t)$) $\rightarrow$ 轨道 $\rightarrow$ 一些参量

1) 椭圆轨道 $(0<e<1)$

当 $e=0$. 由前述, $r=p=a$.

$p=\frac{h^2}{\mu} \Rightarrow v=\sqrt{\frac{\mu}{r}}=\sqrt{\frac{\mu}{a}}$

对椭圆, 当 $f=\pi$. $(f=\theta-\omega)$. $r_A=\frac{p}{1-e}$. $f=0$ 时 $r_B=\frac{p}{1+e}$ $\quad a=\frac{r_A+r_B}{2} \Rightarrow p=a(1-e^2)$

开普勒第二定律: $n_A=\frac{h}{2}$

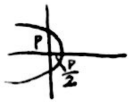
椭圆面积, $A=\pi ab$ $\quad \therefore n_A\cdot T=\pi ab=\frac{h}{2}\cdot T$

Def. 平均角速度 $n=\frac{2\pi}{T}=\frac{h}{ab}$.

又 $\frac{h}{b}=\frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{a\sqrt{1-e^2}}=\sqrt{\frac{\mu}{a}}$

$\Rightarrow a^3n^2=\mu$ (Kepler's third law)

2) 抛物线轨道 $(e=1)$



$r=\frac{p}{1+e\cos f}$

近心距 $q=\frac{p}{2}$. 当 $f=\frac{\pi}{2}$. $r=p$ (半通径)

3) 双曲线轨道

$r=\frac{p}{1+e\cos f}$. $p=a(e^2-1)$.

当 $r\rightarrow\infty$. $1+e\cos f=0$ def. $\alpha=f$. $\rightarrow \alpha=\arccos(-\frac{1}{e})$

(6) 基本方程的推论 (第三部分) —— 能量积分与活力公式

证明: $\varepsilon=\frac{1}{2}v^2-\frac{\mu}{r}=\frac{\mu(e^2-1)}{2p}$ (6.23)

$\dot{\vec{r}}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{f}\hat{\theta}$

又 $r=\frac{p}{1+e\cos f}$ $\quad \therefore \dot{r}=\frac{pe\sin f}{(1+e\cos f)^2}\dot{f}$

且 $h=r^2\dot{f} \Rightarrow \dot{f}=\frac{h}{r^2}=\frac{h}{p^2}(1+e\cos f)^2 \quad \Rightarrow \dot{r}=\frac{h}{p}e\sin f=\sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin f$

$r\dot{f}=\frac{h}{r}=\frac{h}{p}(1+e\cos f)=\sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e\cos f)$

$v^2=\dot{r}^2+(r\dot{f})^2=\frac{\mu}{p}\left[e^2\sin^2 f+e^2\cos^2 f+1+2e\cos f\right]=\frac{\mu}{p}(1+2e\cos f+e^2)$

$\therefore \frac{1}{2}v^2-\frac{\mu}{r}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu}{p}(1+e^2+2e\cos f)-\frac{\mu}{p}(1+e\cos f)$

$=\frac{\mu}{2p}(e^2-1)$ (6.24)

[讨论]

1) 对椭圆. $p=a(1-e^2)$. $\varepsilon=\frac{\mu}{2a(1-e^2)}(e^2-1)=-\frac{\mu}{2a}$

2) 对双曲线. $\varepsilon=\frac{\mu}{2a}$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

反数的正者

[练习] 证明：$\dot{\vec{r}}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\begin{pmatrix}-\sin f\\ e+\cos f\end{pmatrix}$

证：$\dot{\vec{r}}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{f}\hat{\theta}$

$$=\dot{r}\begin{pmatrix}\cos f\\ \sin f\end{pmatrix}+r\dot{f}\begin{pmatrix}-\sin f\\ \cos f\end{pmatrix}$$

$$=\sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin f\begin{pmatrix}\cos f\\ \sin f\end{pmatrix}+\sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e\cos f)\begin{pmatrix}-\sin f\\ \cos f\end{pmatrix}$$

$\dot{\vec{r}}(t)$

$$=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\begin{pmatrix}-\sin f\\ e+\cos f\end{pmatrix} \qquad (6.25)$$

第七课 Kepler方程

本课研究二体问题一个重要推论—— Kepler方程（椭圆、双曲线、抛物线）及求解

偏近点角引入和开普勒方程（椭圆）：

$v^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2=\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}$

将活力公式 $v^2=\mu(\frac{2}{r}-\frac{1}{a})$ 注：$h=\sqrt{\mu a(1-e^2)}$

定义平均角速度 $n=\frac{2\pi}{T}$.

开普勒第三定律：$n^2a^3=\mu=G(m_1+m_2)$

$\Rightarrow \dot{r}^2=\frac{\mu}{ar^2}[a^2e^2-(r-a)^2]$

$\Rightarrow n\,dt=\frac{r\,dr}{a\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}$

引入 $r=a(1-e\cos E)$

容易有 $E-e\sin E=nt+M_0\equiv n(t-\tau)\equiv M$ （平近点角）

$f=\theta-\omega$：真近点角 E：偏近点角

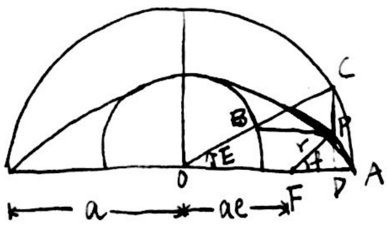
又由 $r=\frac{p}{1+e\cos f}=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$

$\Rightarrow re\cos f=a(1-e^2)-r=a(1-e^2)-a(1-e\cos E)$

$\Rightarrow r\cos f=a(\cos E-e)$

$r\sin f=\sqrt{r^2-r^2\cos^2 f}=\sqrt{(r-r\cos f)(r+r\cos f)}=a\sqrt{1-e^2}\sin E=b\sin E \qquad (7.3)$

由上式可得E与f的几何关系，如图所示.



$r\cos f=FD=OD-OF=OC\cos E-OF$

$=a\cos E-ae=a(\cos E-e)$

$r\sin f=PD=b\sin E$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

练习1：证明以偏近点角表达中心距和真近点角的关系式

$$r=a(1-e\cos E)\qquad \begin{pmatrix}\cos f\\ \sin f\end{pmatrix}=\frac{1}{1-e\cos E}\begin{pmatrix}\cos E-e\\ \sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix}\qquad \tan\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$$

Proof：由E的定义有 $r=a(1-e\cos E)$

又由 $r\cos f=a(\cos E-e)$，$r\sin f=b\sin E$

$$\Rightarrow \cos f=\frac{a(\cos E-e)}{r}=\frac{\cos E-e}{1-e\cos E}\qquad (7.4)$$

$$\sin f=\frac{b\sin E}{r}=\frac{b\sin E}{a(1-e\cos E)}=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}\qquad (7.5)$$

$$\tan\frac{f}{2}=\frac{\sin f}{1+\cos f}=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{\cos E-e+1-e\cos E}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\frac{\sin E}{1+\cos E}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{E}{2}$$

练习2：证明从真近点角表达偏近点角的关系式：

$$\begin{pmatrix}\cos E\\ \sin E\end{pmatrix}=\frac{1}{1+e\cos f}\begin{pmatrix}\cos f+e\\ \sqrt{1-e^2}\sin f\end{pmatrix}$$

Proof：由(7.4) $\cos f(1-e\cos E)=\cos E-e$ $\Rightarrow \cos E=\frac{1}{e\cos f+1}(\cos f+e)$

由(7.5) $\sin f=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\sin E}$ $\Rightarrow \sin E=\frac{1}{1+e\cos f}\cdot\sqrt{1-e^2}\sin f$

练习3：证明速度向量：$\dot{\vec r}=a\dot E\begin{pmatrix}-\sin E\\ \sqrt{1-e^2}\cos E\end{pmatrix}$

Proof：取天球参考系(惯性系)

$$\vec r=\begin{pmatrix}r\cos f\\ r\sin f\end{pmatrix}=\frac{r}{1-e\cos E}\begin{pmatrix}\cos E-e\\ \sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos E-ae\\ a\sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec r}=\begin{pmatrix}-a\dot E\sin E\\ a\sqrt{1-e^2}\dot E\cos E\end{pmatrix}=a\dot E\begin{pmatrix}-\sin E\\ \sqrt{1-e^2}\cos E\end{pmatrix}$$

练习4：动量矩(角动量) $h=a^2\sqrt{1-e^2}(1-e\cos E)\dot E=br\dot E$

Proof：$h=r^2\dot f$ 又 $r=a(1-e\cos E)$

由(7.5) $\cos f\,\dot f=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\sin E}{1-e\cos E}\right)^{\cdot}=\sqrt{1-e^2}\,\frac{\cos E\dot E-e\dot E}{(1-e\cos E)^2}$

由(7.4) $\cos f\,\dot f=\dot f\,\frac{\cos E-e}{1-e\cos E}$

$\Rightarrow \dot f=\frac{\sqrt{1-e^2}\dot E}{1-e\cos E}$

$\therefore h=r^2\dot f=a^2(1-e\cos E)^2\cdot\frac{\sqrt{1-e^2}\dot E}{1-e\cos E}=a^2\sqrt{1-e^2}(1-e\cos E)\dot E\qquad (7.6)$

练习5：证明偏近点角变率 $\dot E$ 满足：$(1-e\cos E)\dot E=n$

Proof：对t时刻的开普勒方程求导：

$$E-e\sin E=nt+M_0\ \Rightarrow\ \dot E-e\cos E\dot E=n\ \Rightarrow\ (1-e\cos E)\dot E=n$$

关于天球参考系(惯性系)任一基本物理量 $\vec r(t)$ ($\dot{\vec r}(t)$) 的推导：

先求出轨道坐标系的基本物理量 $\vec r(t)$ ($\dot{\vec r}(t)$)，然后由两坐标系的变换关系，求出天球坐标系的基本物理量，后可求出任意坐标系的基本物理量。

下求轨道系的 $\vec r(t)$ ($\dot{\vec r}(t)$)，它们由初始条件决定，具体结果由 a, e, M_0 决定。

由 a, e, M_0 求 $\vec r$ ($\dot{\vec r}$) 的步骤：

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(1) $a^3n^2=\mu \Rightarrow n=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$

(2) 由 $M=M_0+n(t-t_0) \Rightarrow M$

(3) 解开普勒方程 $E-e\sin E=n(t-T_0) \Rightarrow E$

(4) 由 $\vec{r}=a\begin{pmatrix}\cos E-e\\ \sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}$

(5) 计算 $r=|\vec{r}|$

(6) $\dot{\vec{r}}=a\dot{E}\begin{pmatrix}-\sin E\\ \sqrt{1-e^2}\cos E\end{pmatrix}$ 求出速度 $\dot{\vec{r}}$

练习6：证明 $\frac{df}{dM}=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2$

Proof: $E-e\sin E=M \Rightarrow \frac{dM}{dE}=1-e\cos E \Rightarrow \frac{dE}{dM}=\frac{1}{1-e\cos E}$

由练习4，$\dot{f}=\frac{\sqrt{1-e^2}\,\dot{E}}{1-e\cos E} \Rightarrow \frac{df}{dE}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}$

$\therefore \frac{df}{dM}=\frac{df}{dE}\cdot\frac{dE}{dM}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos E)^2}=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2$

为了求轨道坐标系的基本物理量 $\vec{r}(t)$ $(\dot{\vec{r}}(t))$，求解 Kepler 方程数值解：

a. 简单求解法

初值 $E_0=M$，第n次与n-1次迭代值有如下公式：$E_n=M+eE_{n-1}$

此法简单，但在e接近1时收敛较慢

b. 牛顿求解法

设 $f(E)=E-e\sin E-M$（注意：与书上不同，书上 $f(E)=M-E+e\sin E$）

求解 Kepler 方程即求 $f(E)=0$ 的根。

一般，取初值 $E_0=M$，第n次与第n-1次迭代值的关系：$E_n=E_{n-1}+\Delta E$

其中 ΔE 由下式决定：

$$f(E_n)=f(E_{n-1}+\Delta E)=f(E_{n-1})+f'(E_{n-1})\Delta E+O(\Delta E^2)$$

即 $\Delta E=-\frac{f(E_{n-1})}{f'(E_{n-1})}=-\frac{E_{n-1}-e\sin E_{n-1}-M}{1-e\cos E_{n-1}}$

引入 Kepler 方程后椭圆轨道中一些参数：

P, e, ω, a, h, T(或n), f, M, E, τ(或M_0)

它们之间的关系：$h=\sqrt{\mu p}=\sqrt{\mu(1-e^2)a}$

$\frac{4\pi^2a^3}{T^2}=n^2a^3=\mu=G(m_1+m_2)$

$E-e\sin E=nt+M_0=n(t-\tau)=M$

$f=\theta(t)-\omega$

$r(t)=a(1-e\cos E(t))$

$r(t)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta(t)-\omega)}$

其中含 $r(t)$、$\theta(t)$ 的量中有初始条件参数：

$r|_{t=0}=r_0$，$\theta|_{t=0}=\theta_0$

$\dot{r}|_{t=0}=v_0$ $\dot{\theta}|_{t=0}=\omega_0$

注意：f, E 中含 a, e, t

M 中含 a, τ, t.

月夜 / color of the ink

双曲线轨道

(1) 积分常数　由初始条件给定

(2) 开普勒方程

引入 $r(t) = a(e\cosh E_h - 1)$

有 $e\sinh E_h - E_h = \nu(t-\tau)$

$\sinh E_h = \frac{e^{E_h} - e^{-E_h}}{2}$

$r = \frac{p}{1+e\cos f} \Rightarrow \dot r = \frac{pe\sin f\,\dot f}{(1+e\cos f)^2} = \frac{r^2}{p} e\sin f\,\dot f = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e\sin f$

$\dot r^2 = \frac{\mu}{p} e^2\sin^2 f = \frac{\mu}{p}\left(e^2 - (\frac{p}{r}-1)^2\right) = \frac{\mu}{ar^2}\left[(r+a)^2 - a^2e^2\right]$

引入平运动轨道频率 ν. def. $\nu^2 a^3 = \mu = G(m_1+m_2)$

有 $\nu\,dt = \frac{r\,dr}{a\sqrt{(a+r)^2 - a^2e^2}}$

并对上式积分得

(3) 在国际天球参考系的基本物理量 $\vec r(t)$，及 $\vec v(t) = \dot{\vec r}(t)$，比角动量 $\vec h = \vec r \times \dot{\vec r}$

证明：$\vec r = -a\begin{pmatrix} \cosh E_h - e \\ -\sqrt{e^2-1}\sinh E_h \end{pmatrix}$　　$\dot{\vec r} = -a\dot E_h \begin{pmatrix} \sinh E_h \\ -\sqrt{e^2-1}\cosh E_h \end{pmatrix}$

proof：$\vec r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos f \\ r\sin f \end{pmatrix}$

又 $r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos f}$

$\Rightarrow re\cos f = a(e^2-1) - r = a(e^2-1) - a(e\cosh E_h - 1) = ae^2 - ae\cosh E_h$

$\Rightarrow r\cos f = ae - a\cosh E_h$

又 $r = a(e\cosh E_h - 1)$

$\Rightarrow r\sin f = \sqrt{r^2 - r^2\cos^2 f} = a\sqrt{e^2-1}\sinh E_h$

$\therefore \vec r = \begin{pmatrix} r\cos f \\ r\sin f \end{pmatrix} = -a\begin{pmatrix} \cosh E_h - e \\ -\sqrt{e^2-1}\sinh E_h \end{pmatrix}$

求导易有 $\dot{\vec r} = -a\dot E_h \begin{pmatrix} \sinh E_h \\ -\sqrt{e^2-1}\cosh E_h \end{pmatrix}$

比角动量 $\vec h = \vec r \times \dot{\vec r}$

$= -a\begin{pmatrix} \cosh E_h - e \\ -\sqrt{e^2-1}\sinh E_h \end{pmatrix} \times (-a\dot E_h)\begin{pmatrix} \sinh E_h \\ -\sqrt{e^2-1}\cosh E_h \end{pmatrix}$

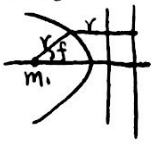
$= -a^2\sqrt{e^2-1}\,(e\cosh E_h - 1)\,\dot E_h \cdot \hat{\omega}$　　$(\hat\omega = \hat i \times \hat j)$

抛物线 Kepler 方程

(1) 基本积分常数

$e=1$，f，$\vec h$，p，h，τ 由初始条件决定

(2) 几何意义



(3) 基本方程推论

$r = \frac{p}{1+\cos f} = \frac{p}{2}\sec^2\frac{f}{2}$　(7.13)

令 $E_p = \tan\frac{f}{2}$　(7.14)

$r = q(1+E_p^2)$

其中 $q = p/2$．f—真近点角

对 (7.14) 求导 $\dot f = \frac{2\dot E_p}{1+E_p^2}$　(7.15)

又 $h=\sqrt{\mu p} = r^2\dot{\theta} = r^2\dot{f} = r^2\frac{2\dot{E}_p}{1+E_p^2} = q^2(1+E_p^2)\cdot 2\dot{E}_p = \sqrt{2q\mu}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}\,dt = (1+E_p^2)\,dE_p$ (7.16)

记 $n_p \equiv \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}$, $M_p \equiv n_p(t-\tau)$

则 (7.16) $\Rightarrow M_p = \frac{1}{2}E_p + \frac{1}{6}E_p^3$ ---- 抛物线情况下的Kepler方程

练习：证明 $\dot{E}_p = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}$, $r\dot{r} = \sqrt{\mu p}\,E_p$

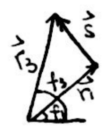
证：由(7.16) $\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} = (1+E_p^2)\dot{E}_p$

$\therefore \dot{E}_p = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}}{1+E_p^2} = \frac{q}{r}\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}$

$\dot{r} = q\cdot 2E_p\cdot\dot{E}_p = q\cdot 2E_p\cdot\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}$

$\Rightarrow r\dot{r} = \sqrt{\mu p}\,E_p$

(P51) 练习. 若 $\vec{r}_1, \vec{r}_3$ 为抛物线轨道两个向径, $\vec{s} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$, r_1, r_3, s 分别为它们的长度. 约定 $0 \le f_3 - f_1 \le \pi$.



$0 \le f_3 - f_1 \le \pi$

求证：(5.59): $\frac{q}{\sqrt{r_1r_3}}(1+E_{p1}E_{p3}) = \cos\frac{f_3-f_1}{2}$

Proof: $1+E_{p1}E_{p3} = 1+\tan\frac{f_1}{2}\tan\frac{f_3}{2} = \frac{\tan\frac{f_1}{2}-\tan\frac{f_3}{2}}{\tan(\frac{f_1}{2}-\frac{f_3}{2})}$

又 $r = q(1+E_p^2) \Rightarrow \sqrt{r_1r_3} = q\sqrt{(1+E_{p1}^2)(1+E_{p3}^2)}$

$\therefore \frac{q}{\sqrt{r_1r_3}}(1+E_{p1}E_{p3}) = \frac{\frac{\tan\frac{f_1}{2}-\tan\frac{f_3}{2}}{\tan(\frac{f_1}{2}-\frac{f_3}{2})}}{\sqrt{(1+E_{p1}^2)(1+E_{p3}^2)}}$

代入 $1+E_{p1}^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{f_1}{2}}$, $1+E_{p3}^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{f_3}{2}}$

整理得 $\frac{q}{\sqrt{r_1r_3}}(1+E_{p1}E_{p3}) = \cos\frac{f_3-f_1}{2}$ #

求证(5.60)： $2q(1+E_{p3}E_{p1}) = \sqrt{(r_1+r_3+s)(r_1+r_3-s)}$

Proof: $\vec{s} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$

$s = \sqrt{\vec{s}\cdot\vec{s}} = \sqrt{r_3^2+r_1^2-2\vec{r}_1\cdot\vec{r}_3} = \sqrt{r_1^2+r_3^2-2r_1r_3\cos(f_3-f_1)}$

又 $\sqrt{(r_1+r_3+s)(r_1+r_3-s)} = \sqrt{(r_1+r_3)^2-s^2} = \sqrt{2r_1r_3[1+\cos(f_3-f_1)]} = 2\sqrt{r_1r_3}\cos\frac{f_3-f_1}{2}$

$= 2\sqrt{r_1r_3}\cdot\frac{q}{\sqrt{r_1r_3}}(1+E_{p1}E_{p3}) = 2q(1+E_{p1}E_{p3})$ #

求证(5.61) $E_{p3}-E_{p1} = \frac{1}{\sqrt{2q}}(\sqrt{r_1+r_3+s}-\sqrt{r_1+r_3-s})$

Proof: 即要证 $(E_{p3}-E_{p1})^2 = \frac{1}{2q}(2r_1+2r_3-\sqrt{(r_1+r_3+s)(r_1+r_3-s)})$

$[r = q(1+E_p^2)]$

右边 $= \frac{1}{2q}[2q(1+E_{p1}^2)+2q(1+E_{p3}^2)-2q(1+E_{p1}E_{p3})]$

$= \frac{1}{2q}\cdot 2q(E_{p1}^2-2E_{p1}E_{p3}+E_{p3}^2)$

$= (E_{p1}-E_{p3})^2$

= 左边

#

求证 (5.62) $6\sqrt{\mu}(t_3-t_1)=(r_1+r_3+s)^{3/2}-(r_1+r_3-s)^{3/2}=l_1^3-l_2^3$

Proof：右边 $=(l_1-l_2)(l_1^2+l_1l_2+l_2^2)$

$=(\sqrt{r_1+r_3+s}-\sqrt{r_1+r_3-s})(2r_1+2r_3+\sqrt{(r_1+r_3+s)(r_1+r_3-s)})$

$=\sqrt{2q}\,(E_{p_3}-E_{p_1})[2q(1+E_{p_1}^2)+2q(1+E_{p_3}^2)+2q(1+E_{p_1}E_{p_3})]$

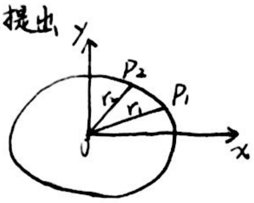
$=(2q)^{3/2}(E_{p_3}-E_{p_1})(3+E_{p_1}^2+E_{p_3}^2+E_{p_1}E_{p_3})$

$=(2q)^{3/2}[3(E_{p_3}-E_{p_1})+E_{p_3}^3-E_{p_1}^3]$

Kepler方程：$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t-\tau)=\frac{1}{2}E_p+\frac{1}{6}E_p^3$ 代入可证明右边=左边

椭圆运动中的一个重要推论 —— Lamber 定理

(1) 问题提出



求天体由 P_1 运动至 P_2 所用时间？

(2) 求解

由 Kepler方程，在 t_1, t_2 时刻，有

$nt_1=E_1-e\sin E_1$

$nt_2=E_2-e\sin E_2$

$\Rightarrow n\Delta t=E_2-E_1-2e\cos\frac{E_2+E_1}{2}\sin\frac{E_2-E_1}{2}$

引入新变量 $\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=e\cos\frac{E_1+E_2}{2}$

$\alpha_2-\alpha_1=E_2-E_1$

则有 $n\Delta t=\alpha_2-\alpha_1-2\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$

$=\alpha_2-\alpha_1-(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)$

若新变量 α_1, α_2 能表示为 r_1, r_2, a 的函数，问题得解

(3) 一些有用的公式的证明

a. $r_1+r_2=2a(1-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2})$ (7.19)

Proof：$\because r_1=a(1-e\cos E_1)$

$r_2=a(1-e\cos E_2)$

$\therefore r_1+r_2=a(2-e\cos E_1-e\cos E_2)=a(2-2e\cos\frac{E_1+E_2}{2}\cos\frac{E_1-E_2}{2})=2a(1-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2})$

b. 弦长 $P_1P_2=2a\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$ (7.20)

Proof：$\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{r_2}-\vec{r_1}=(r_2\cos f_2-r_1\cos f_1)\vec{i}+(r_2\sin f_2-r_1\sin f_1)\vec{j}$

$\therefore P_1P_2=\sqrt{(r_2\cos f_2-r_1\cos f_1)^2+(r_2\sin f_2-r_1\sin f_1)^2}$

又 $\begin{pmatrix}r\cos f\\ r\sin f\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\cos E-e\\ \sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix}$

代入得 $|P_1P_2|^2=4a^2\sin^2\frac{E_2-E_1}{2}(1-e^2\cos^2\frac{E_1+E_2}{2})=4a^2\sin^2\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\sin^2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$

$\Rightarrow P_1P_2=2a\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.

c. $\sin\frac{\alpha_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1+r_2+P_1P_2}{a}}$　　(7.21)

$\sin\frac{\alpha_1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a}(r_1+r_2-P_1P_2)}$　　(7.22)

Proof (7.21)：右边 $= \frac{1}{2}\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)+2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\alpha_2} = \sin\frac{\alpha_2}{2} =$ 左边. #

第八课　状态矢量、轨道根数、星历表计算

本课求解二体运动的基本物理量，其中参数为轨道根数，由初始条件决定，状态参量为轨道根数的函数

若已知状态参量，可求出轨道根数，反之亦然。

由基本物理量，可求出星历表

[复习]

· 怎样求任意坐标系下的基本物理量？$(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$。

先在惯性系（国际天球参考系）中求 $\vec{r}(t)$（由牛顿定律），后利用给定坐标系与国天系的坐标变换关系，求给定坐标系的 $\vec{r}(t)$，$\dot{\vec{r}}(t)$。

几种坐标系：

(1) 国际天球参考系

(2) 轨道坐标系

(3) 黄道坐标系

变换关系

(1) 轨道系与黄道系

$(\hat{p}, \hat{q}, \hat{w}) \leftarrow (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

第一步：$(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ 绕 $\hat{e}_3$ 逆转 Ω 至 $(N, N', \hat{e}_3)$。

$(N\ N'\ \hat{e}_3) = (\hat{e}_1\ \hat{e}_2\ \hat{e}_3)\, R_3(-\Omega)$

第二步：$(N\ N'\ \hat{e}_3)$ 绕 N 逆转 i 至 $(N\ N''\ \hat{W})$

$(N\ N''\ \hat{W}) = (N\ N'\ \hat{e}_3)\, R_1(-i)$

第三步：$(N\ N''\ \hat{W})$ 绕 W 逆转 ω 至 $(\hat{p}\ \hat{q}\ \hat{W})$

$(\hat{p}\ \hat{q}\ \hat{W}) = (N\ N''\ \hat{W})\, R_3(-\omega)$

总变换：$(\hat{e}_1\ \hat{e}_2\ \hat{e}_3)\, R_3(-\Omega)\, R_1(-i)\, R_3(-\omega) = (\hat{p}\ \hat{q}\ \hat{w})$

$\hat{\omega} = (\sin i\sin\Omega\quad -\sin i\cos\Omega\quad \cos i)^T$

$\hat{e}_3 = (\sin i\sin\omega\quad \sin i\cos\omega\quad \cos i)^T$

(2) 国天系与黄道系

$\vec{r}_{eq} = R(-\varepsilon_0)\,\vec{r}_{ec}$

(3) 国天系与轨道系 $(\vec{r})$

$\because\ \vec{r}_{ec} = R(\Omega, i, \omega)\,\vec{r}$

$\therefore\ \vec{r}_{eq} = R(-\varepsilon_0)\,R(\Omega, i, \omega)\,\vec{r}$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

注意，由初始条件确定轨道系中 (a, e, M)

$\Rightarrow \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)$ (轨道系) $\Rightarrow \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)$ (国天系) $\Rightarrow \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)$ (任意坐标系)

由关于天球系的状态参量 $\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)$ 求轨道根数 $a, e, M, \omega, \Omega, i$.

二体问题有6个初始条件.

$\vec{r} = \vec{r}(a, e, M, \Omega, \omega, i; t)$

> 由状态矢量计算轨道根数 $a, e, M, \omega, \Omega, i$.

(a) 已知 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 可求 $r = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$. $v^2 = \dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}$

由活力公式 $a = \dfrac{1}{\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}}$ $\Rightarrow a$ (8.6)

(b) 计算平动角速度

$n = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}}$

(c) 求偏心率 e 和平近点角

由 $r = a(1 - e\cos E)$

$\Rightarrow e\cos E = 1 - \dfrac{r}{a}$

又 $\vec{r} = a\begin{pmatrix}\cos E - e \\ \sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix}$. $\dot{\vec{r}} = a\dot{E}\begin{pmatrix}-\sin E \\ \sqrt{1-e^2}\cos E\end{pmatrix}$

$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = a^2\dot{E}\sin E(1 - e\cos E)$

又 $(1 - e\cos E)\dot{E} = n = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}}$

$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = a^2 e\sin E\sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\mu a}\, e\sin E$

$e\sin E = \dfrac{1}{\sqrt{\mu a}}\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu a}} r\dot{r}$ (8.9)

$\Rightarrow E, e$

(4) 由开普勒方程. $M = E - e\sin E$ $\Rightarrow M$

(5) 由真近点角公式求 f:

$$\begin{pmatrix}\cos f \\ \sin f\end{pmatrix} = \frac{1}{1 - e\cos E}\begin{pmatrix}\cos E - e \\ \sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix} \quad (8.10)$$

(6) 利用 $R(\varepsilon_0)$ 求出黄道系状态参量

黄道 $-\vec{r}_{ec} = R(\varepsilon_0)\vec{r}$ — 轨道 (8.11)

$\dot{\vec{r}}_{ec} = R(\varepsilon_0)\dot{\vec{r}}$ (8.12)

计算 i, ω.

由 $\hat{e}_3 = (p_3 \quad q_3 \quad \omega_3)^T = (\sin i\sin\omega \quad \sin i\cos\omega \quad \cos i)^T$.

而 $\vec{r}, \dot{\vec{r}} \Rightarrow p_3, q_3$ ∴ 可推出 i, ω.

由书(5.10) (5.11)

又 $\vec{r}_{ec} = R(\varepsilon_0)\vec{r}$. $\dot{\vec{r}}_{ec} = R(\varepsilon_0)\dot{\vec{r}}$

$\vec{r}_{ec}\times\dot{\vec{r}}_{ec} = h\vec{\omega} = h(\sin i\sin\Omega \quad -\sin i\cos\Omega \quad \cos i)^T$

可定出 Ω.

> 由2个位置矢量计算轨道根数

(1) 概述

$\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 可表为轨道根数的函数. $\vec{r}=\vec{r}(a,e,M,\omega,\Omega,i,t)$

由 $\vec{r_1}=\vec{r_1}(a,e,M,\omega,\Omega,i,t_1)$

$\vec{r_2}=\vec{r_2}(a,e,M,\omega,\Omega,i,t_2)$

六个等式, 可解出6个轨道根数

(2) 步骤

设天体在黄道系下 $\vec{r_i}=(x_i, y_i, z_i)^T \quad (i=1,2)$.

> 黄道系下轨道法向 $\hat{\omega}=(\sin i\sin\Omega, -\sin i\cos\Omega, \cos i)^T$

又 $\vec{r_1}\times\vec{r_2}=r_1r_2\sin(f_2-f_1)\times(\sin i\sin\Omega, -\sin i\cos\Omega, \cos i)^T$

又 $\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}=r_1r_2\cos(f_2-f_1)$

可计算出 i, Ω, f_2-f_1

$\vec{r_i}=R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega)\times(r_i\cos f_i, r_i\sin f_i, 0)^T$

$R_3(\Omega)\vec{r_i}=R_1(-i)R_3(-\Omega)(r_i\cos f_i, r_i\sin f_i, 0)^T$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_i\cos\Omega+y_i\sin\Omega \\ -x_i\sin\Omega+y_i\cos\Omega \\ z_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_i\cos(\omega+f_i) \\ r_i\cos i\sin(\omega+f_i) \\ r_i\sin i\sin(\omega+f_i) \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \Omega, f_1, f_2$

又 $r_i=\dfrac{p}{1+e\cos f_i}$ $\Rightarrow p=r_i(1+e\cos f_i)=r_1(1+e\cos f_1)=r_2(1+e\cos f_2)$ $\Rightarrow e=\dfrac{r_1-r_2}{r_2\cos f_2-r_1\cos f_1}$

$a=\dfrac{p}{1-e^2}=\dfrac{r_1(1+e\cos f_1)}{1-e^2}$

至此，求出了所有轨道根数

> 状态传递

(1) 概述

初始条件 $t_0\ \vec{r_0}, \dot{\vec{r_0}} \Rightarrow t_0+\Delta t$ 时刻 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$

(2) 方法

先由 $\vec{r_0}, \dot{\vec{r_0}}$ 求出轨道根数, 再由轨道根数求新的基本物理量.

(3) 步骤

设 $\vec{r}=f\vec{r_0}+g\dot{\vec{r_0}}$

$\dot{\vec{r}}=\dot{f}\vec{r_0}+\dot{g}\dot{\vec{r_0}}$

其中 f, g 为待定函数. $f=f(\vec{r_0}, \dot{\vec{r_0}}, t)$. $g=g(\vec{r_0}, \dot{\vec{r_0}}, t)$. 称拉格朗日系数.

求 $f=?$

$\vec{r}\times\dot{\vec{r_0}}=f\vec{r_0}\times\dot{\vec{r_0}}=f\vec{h}$ (8.14)

又 $\vec{r}=(\vec{p}\ \ \vec{q})\,a\begin{pmatrix}\cos E-e \\ \sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix}$ $\quad \dot{\vec{r}}=(\vec{p}\ \ \vec{q})\,a\dot{E}\begin{pmatrix}-\sin E \\ \sqrt{1-e^2}\cos E\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec r\times\dot{\vec r}_0 = (\vec p\, a(\cos E - e) + \vec q\, a\sqrt{1-e^2}\sin E)\times(\vec p\, a\dot E_0(-\sin E_0)+\vec q\, a\dot E_0(\sqrt{1-e^2}\cos E_0))$

$= \frac{ah}{r_0}[(\cos E - e)\cos E_0 + \sin E\sin E_0]\vec\omega$

又 $\vec r\times\dot{\vec r}_0 = f\vec h = fh\vec\omega$

$\Rightarrow f = \frac{a}{r_0}[\cos(E-E_0) - e\cos E_0] = 1-\frac{a}{r_0}(1-\cos\Delta E)$ (8.16)

下求 $g=?$

用 $\vec r_0\times\vec r = \vec r_0\times g\dot{\vec r}_0 = g\vec h$ (8.17)

又 $\vec r_0\times\vec r = [\vec p\, a(\cos E_0 - e)+\vec q\, a\sqrt{1-e^2}\sin E_0]\times[\vec p\, a(\cos E - e)+\vec q\, a\sqrt{1-e^2}\sin E]$

$= a^2\sqrt{1-e^2}[\sin\Delta E - e(\sin E - \sin E_0)]\vec\omega = gh\vec\omega$

$\Rightarrow g = \frac{1}{n}[\sin\Delta E - e(\sin E - \sin E_0)]$ (8.18)

由 Kepler方程，$E - e\sin E = n(t-t_0)$ $\Rightarrow e(\sin E - \sin E_0) = \Delta E - n\Delta t$

$\therefore g = \Delta t - \frac{1}{n}(\Delta E - \sin\Delta E)$ (8.19)

(8.16)和(8.19)对t求导得

$\dot f = \frac{d}{dt}[1-\frac{a}{r_0}(1-\cos\Delta E)] = -\frac{a}{r_0}\dot E\sin\Delta E$

$\dot g = \frac{d}{dt}[\Delta t - \frac{1}{n}(\Delta E - \sin\Delta E)]$

$= 1-\frac{1}{n}(1-\cos\Delta E)\cdot\dot E$

又 $E - e\sin E = n(t-t_0)$

$\Rightarrow \dot E(1-e\cos E) = n$

$\Rightarrow \dot E = \frac{na}{r}$

$\Rightarrow \dot g = 1-\frac{a}{r}(1-\cos\Delta E)$

$\dot f = -\frac{a^2 n}{r_0 r}\sin\Delta E$

若ΔE求出，则可得 $f, g, \dot f, \dot g$.

t: $M = E - e\sin E$

t_0: $M_0 = E_0 - e\sin E_0$

$\Delta M = \Delta E - e[\sin(E_0+\Delta E) - \sin E_0] = \Delta E - e\cos E_0\sin\Delta E + e\sin E_0(1-\cos\Delta E)$

$\Rightarrow n\Delta t = \Delta E - C_1\sin\Delta E + C_2(1-\cos\Delta E)$

其中 $C_1 = 1-\frac{r_0}{a}$ $C_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu a}}\vec r_0\cdot\dot{\vec r}_0$

可由牛顿迭代法求ΔE，继而求 $f, g, \dot f, \dot g$.

练习：$f\dot g - g\dot f = 1$

第九课 火箭动力学初步

火箭的物理模型

组成部分：燃料舱,氧化剂舱,发动机,反作用发动机,负载等.

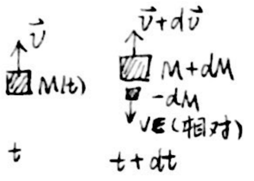
火箭运行时，质点+流体(电磁场)(燃料)

基本物理量：$\vec{r}(t)$. 燃料 P, ρ, T, v_e

基本方程：

牛二，流体力学方程，电磁场方程

情形1：单级火箭基本方程.初始条件和推论. 不考虑重力. 直线运动



动量守恒(无外力)

t: $M\vec{v}$

$t+dt$: $(M+dM)(\vec{v}+d\vec{v})+(-dM)(\vec{v}-\vec{v}_E)$

$\Rightarrow M\,dv=-dM\,v_E \quad (9.1)$

其中 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$. v_E为流体相对火箭速度.

初始条件. $t=0$. $v_0=0$

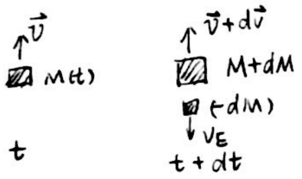
$M|_{t=0}=\underset{燃料}{M_F}+\underset{火箭净}{M_R}+\underset{载荷}{M_P}$

推论. $v_{终值}=?$ $\quad M|_{终}=M_R+M_P$

由 $\frac{dM}{M}=-\frac{dv}{v_E} \Rightarrow \ln\frac{M_终}{M_初}=-\frac{v_终}{v_E}$.

$\Rightarrow v_终=v_E\ln\lambda$. $\quad \lambda=\frac{M_F+M_R+M_P}{M_R+M_P} \quad (9.2)$

情形2. 有重力情况.



冲量定理：$(M+dM)(\vec{v}+d\vec{v})-dM(\vec{v}-\vec{v}_E)-M\vec{v}=-Mg\,dt \quad (9.3)$

$\Rightarrow \frac{dv}{v_E}=-\frac{dM}{M}-\frac{g}{v_E}dt$

定义比冲量 $\tau_s=\frac{v_E}{g} \Rightarrow \frac{dv}{v_E}=-\frac{dM}{M}-\frac{dt}{\tau_s} \quad (9.4)$

燃料为流体，$v=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$. 考虑到工作出口压力较低，增加一个因子$\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}$.

$\gamma\approx1.3 \Rightarrow v_E\approx3000\,m/s$. $\Rightarrow \tau_s\approx300s$

对(9.4)积分. 得 $\frac{v_终}{v_E}=\ln\lambda-\frac{\tau_B}{\tau_s} \quad (9.5)$ τ_B为燃料耗尽时间.

情形3. 二级火箭

	质量比	τ_B
第一级	λ_1	τ_{B1}
第二级	λ_2	τ_{B2}

$$\frac{v_{1-终}}{v_E}=\ln\lambda_1-\frac{\tau_{B1}}{\tau_s} \quad (9.6)$$

$$\frac{v_{2-终}}{v_E}=\frac{v_{1-终}}{v_E}+\ln\lambda_2-\frac{\tau_{B2}}{\tau_s} \quad (9.7)$$

假定两级火箭 τ_s与v_E一样，且 $\lambda_1\approx\lambda_2=\lambda$, $\tau_{B1}\approx\tau_{B2}=\tau_B$

则有 $\frac{v_{2-终}}{v_E}=2\ln\lambda-2\frac{\tau_B}{\tau_s}$

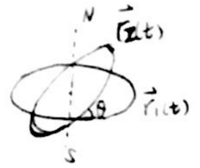
上式说明，使用多级火箭，可用较少的燃料(相对单级)运送更多的载荷.

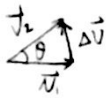
研究航天器和行星轨道转移方法：

先求出系统各个轨道基本物理量 $\vec{r}(t)$，$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}$．（注：不同轨道基本方程相同，只是初始条件不同）

继而求出所有相关物理量，包括速度增量．

情形1．改变卫星的轨道平面（赤道轨道 → 倾斜轨道）





$\frac{1}{2}|\Delta\vec{v}|=|\vec{v}|\sin\frac{\theta}{2}$ (9.8)

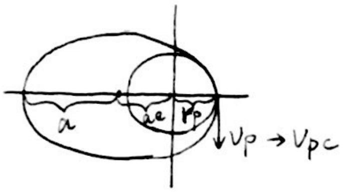
特例 a：$\theta=\frac{\pi}{2}$，$|\Delta\vec{v}|=\sqrt{2}|\vec{v}|$ (9.9)

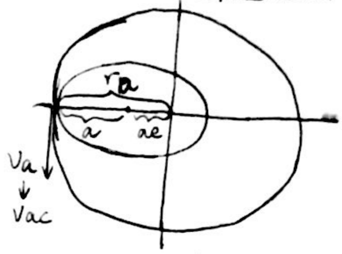
b：θ很小，$|\Delta\vec{v}|=|\vec{v}|\theta$ (9.10)

好丑!

情形2．在同一平面将卫星由一条轨道转移至另一条轨道．

在此讨论将 椭圆轨道 → 圆轨道 （又分近/远地点变轨）





← 更丑了!

$r_p=\frac{p}{1+e\cos f}\Big|_{f=0}=a(1-e)$

椭：$v_p^2=\mu\left(\frac{2}{r_p}-\frac{1}{a}\right)=\frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}$

圆轨道：$v_{pc}^2=\frac{\mu}{r_p}=\frac{\mu}{a(1-e)}$

大小关系：$v_p>v_{pc}$

Δv $\Delta v=v_p-v_{pc}$ (9.11)

$r_a=\frac{p}{1+e\cos f}\Big|_{f=\pi}=a(1+e)$

$v_a^2=\mu\left(\frac{2}{r_a}-\frac{1}{a}\right)=\frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}$

$v_{ac}^2=\frac{\mu}{r_a}=\frac{\mu}{a(1+e)}$

$v_a<v_{ac}$

$\Delta v=v_{ac}-v_a$ (9.12)

情形3．由地球轨道逃逸（椭圆轨道 → 抛物线轨道）（又分近/远地点逃逸）

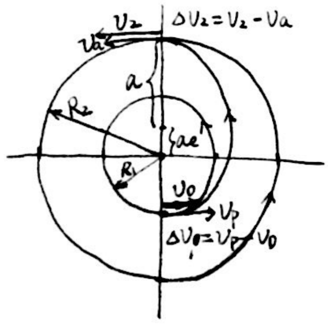
抛物线轨道有：$\varepsilon=\frac{1}{2}v^2-\frac{\mu}{r}=0$

∴ 近地点 $\frac{1}{2}v_{pE}^2=\frac{\mu}{a(1-e)}$ 远地点、$\frac{1}{2}v_{AE}^2=\frac{\mu}{a(1+e)}$ (9.13)

椭圆轨道：$v_p^2=\frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}$ (9.14) $v_a^2=\frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}$ (9.14)

∴ $\Delta v_p=v_{pE}-v_p$ (9.15) $\Delta v_a=v_{AE}-v_a$ (9.17)

情形4．近圆轨道间转移 — 霍曼轨道转移



$R_1=a-ae$

$R_2=a+ae$ ⇒ $a=\frac{1}{2}(R_1+R_2)$，$1-e=\frac{R_1}{a}$ $1+e=\frac{R_2}{a}$

$v_p^2=\frac{\mu}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)=\frac{2\mu}{R_1+R_2}\cdot\frac{R_2}{R_1}$

$v_0^2=\frac{\mu}{R_1}$

∴ $\Delta v_1=v_p-v_0=v_0\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}}-1\right)$

$v_a^2=\frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}=\frac{2\mu}{R_1+R_2}\cdot\frac{R_1}{R_2}$

$v_2^2=\frac{\mu}{R_2}$

∴ $\Delta v_2=v_2-v_a=v_0\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\left(1-\sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_2}}\right)$

$\Delta v=\Delta v_1+\Delta v_2=v_0\left[\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}}+\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\left(1-\sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_2}}\right)-1\right]$

$\frac{a^3}{T^2}=\frac{\mu}{4\pi^2}$ ⇒ $T=\pi\sqrt{\frac{(R_1+R_2)^3}{2\mu}}$

$\Delta t=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(R_1+R_2)^3}{2\mu}}$

$=\frac{\pi}{2v_0}\sqrt{\frac{(R_1+R_2)^3}{2R_1}}$

3+9

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

练习1：某天体表面的逃逸速度为 1.118 km/s，假设此天体的密度与地球相同 (5.52 g/cm³)，试求其半径.（幻灯片38页）

解：抛物线运动，刚好逃逸.

由抛物线活力公式　$\varepsilon = \frac{1}{2}v_{逃}^2 - \frac{\mu}{r} = 0$　. $\mu = GM$

$\Rightarrow v_{逃} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = R\sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}$

$\Rightarrow R = 6378\ \text{km}$

练习2：见幻灯39页

练习3：（幻灯40页）若速度由高度为h的圆轨道速度 v_c 增加到 $v_p = v_c(1+x)$，试求转移轨道的偏心率、半长轴、近点速度和远点速度各为多少？

解：机动在近地点，实施，圆轨道半径 r_p.

对圆轨道，$v_{圆} = v_c = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e)}} = \sqrt{\frac{\mu}{R_E + h}}$

对椭圆轨道，$v_p = \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}} = v_c\sqrt{1+e} = v_c(1+x)$

$\Rightarrow \sqrt{1+e} = 1 + x$　　$e = x(x+2)$　　(9.22)

$a = \frac{R_E + h}{1-e} = \frac{R_E + h}{1-2x-x^2}$　　(9.23)

远地点速度　$v_a = v_p\frac{1-e}{1+e} = v_p\frac{1-x(x+2)}{(x+1)^2} = v_c\frac{1-x^2-2x}{1+x}$　　(9.24)

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

行星际探测研究

(1) 概述

四个问题，见幻灯41页

(2) 探测（以木星为例）

第一步：航天器环绕地球圆周运动，基本物理量 $\vec{r}_E(t)$.

$v_E=\sqrt{\frac{GM_E}{R_E}}\approx 7.9\,km/s$

$\sqrt{GM_E}=v_E\sqrt{R_E}\approx 631.3\ km^{3/2}/s \qquad (9.25)$

第二步：地球绕太阳公转（圆周运动），地球基本物理量 $\vec{r}_0(t)$.

$v_0=\sqrt{\frac{GM_S}{R_0}}$，其中 $R_0\approx 1.496\times10^8\,km=1AU$

$T_0=1年=3.154\times10^7s \quad\Rightarrow v_0=\frac{2\pi R_0}{T_0}\approx 29.778\ km/s$

$\therefore\sqrt{GM_S}=v_0\sqrt{R_0}\approx 3.64\times10^5 \qquad (9.26)$

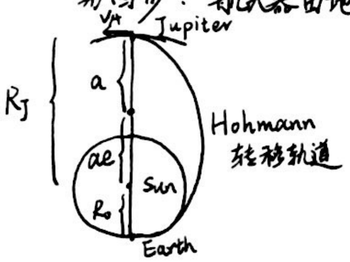
可由 (9.25)、(9.26) 估计 $M_S=333000M_E$

$v=v_0+v_E=29.778+7.708$ (赤道低轨上速度) $=37.49\ km/s$

第三步：航天器逃离太阳系，最低解为抛物线.

$v_{逃}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{GM_S}{R_0}}=\sqrt{2}\,v_0=42.074\ km/s$

第四步：航天器由地球轨道进入到木星的 Hohmann 转移轨道



$R_J=778\times10^6\ km$

$R_0=150\times10^6\ km$

$a=\frac{1}{2}(R_J+R_0)=464\times10^6\ km$

$a(1+e)=R_J \ \Rightarrow e=0.677$

$v_A=\sqrt{\frac{GM_S}{R_J}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}=5.73\,km/s$

$\Delta t=\frac{T}{2}=\frac{T_0}{2}\sqrt{\frac{a^3}{R_0^3}}=2.72\ years$

$T_J=11.9\ years$，航天器在经 Δt 到达交会点时，木星也应到达此点，则航天器发射时，木星应在交会点前方 $n_J\Delta t=0.528\times2.72=1.436\,rad=82.29\ deg$

$n_{JE}=n_E-n_J=2\pi-0.528=5.755\ rad/year$

$\therefore T_{JE}=\frac{2\pi}{n_{JE}}\approx1.092\ years\approx13\ months$

此为发射窗口出现的周期

计算弹弓效应：

$v_J>v$，在木星参考系，航天器迎面撞来，弹性碰撞后，$v_1=v_J-v$.

原惯性系：$v_2=2v_J-v=2\times13.05-5.73=20.37\ km/s$

即获得了2倍木星速度的增量.

而木星轨道上逃逸速度 $v_e=18.45\ km/s<v_2$，—— 足够逃逸.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

第10课　级数展开及其应用 · 普通摄动理论

本课研究二体问题 $\vec r(t)$.($\dot{\vec r}(t)$)．基本方程 ⇒ 三个推论

① 拉格朗日系数展开式

② 偏近点角为平近点角正弦级数

③ 真近点角为偏近点角正弦级数　中心差

推论1：将拉格朗日系数展开为幂级数（向径展开为时间的幂级数）

$\vec r = f\vec r_0 + g\dot{\vec r}_0$　($\Delta t = t-t_0$ 为小量)

f、g 称为拉格朗日系数(待定)，下求f.g：

基本方程：$\ddot{\vec r} = -\frac{\mu}{r^3}\vec r$

又由 $r^2=\vec r\cdot\vec r$ ⇒ $\dot r = \frac1r \vec r\cdot\dot{\vec r}$ ⇒ $\ddot r = -\frac{\dot r}{r^2}\vec r\cdot\dot{\vec r} + \frac1r\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}+\frac1r\vec r\cdot\ddot{\vec r}$

⇒ $\ddot r = \frac1r(v^2-\dot r^2-\frac{\mu}{r})$

$$\frac{d^3\vec r}{dt^3} = \frac{d}{dt}\ddot{\vec r} = \frac{3\mu}{r^4}\dot r\vec r - \frac{\mu}{r^3}\dot{\vec r}$$

$$\frac{d^4\vec r}{dt^4} = \left(-\frac{12\mu}{r^5}\dot r^2 + \frac{3\mu}{r^4}\ddot r\right)\vec r - \frac{\mu}{r^3}\ddot{\vec r} + \frac{6\mu}{r^4}\dot r\dot{\vec r}$$

$$= \left[-\frac{15\mu}{r^7}(\vec r\cdot\dot{\vec r})^2 - \frac{2\mu^2}{r^6} + \frac{3\mu}{r^5}v^2\right]\vec r + \frac{6\mu}{r^5}(\vec r\cdot\dot{\vec r})\dot{\vec r}$$

$$\vec r(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\frac{d^n\vec r}{dt^n}\Big|_{t=t_0}(\Delta t)^n$$

$$= \vec r_0 + \dot{\vec r}_0\Delta t - \frac12\cdot\frac{\mu}{r_0^3}(\Delta t)^2\vec r_0 + \frac16(\Delta t)^3\left[\frac{3\mu}{r_0^5}(\vec r_0\cdot\dot{\vec r}_0)\vec r_0 - \frac{\mu}{r_0^3}\dot{\vec r}_0\right] + \cdots$$

推论2：偏近点角展开为平近点角的正弦级数

E-M=esinE 为周期函数，将esinE 展开为M的正弦级数：

$$e\sin E = 2\sum_{k=1}^\infty b_k(e)\sin kM$$

其中 $b_k(e) = \frac1\pi\int_0^\pi e\sin E\sin kM\,dM$

又 $\int_0^\pi \sin k'M\sin kM\,dM = -\frac12\int_0^\pi[\cos(k'+k)M - \cos(k'-k)M]\,dM = \frac12\pi\delta_{k'k}$

$b_k(e) = \frac{1}{k\pi}\left[-\int_0^\pi e\sin E\, d\cos kM\right] = \frac1k J_k(ke)$　这一步推复杂，书上一句"变形得"

故 $e\sin E = 2\sum_{k=1}^\infty\frac1k J_k(ke)\sin kM$

$E = M + e\sin E = M + 2\sum_{k=1}^\infty \frac1k J_k(ke)\sin kM$

推论3：真近点角展为平近点角的正弦级数，中心差

$r^2\dot f = h = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$　．$a^3n = \mu$

∴ $r^2\dot f = r^2\frac{df}{dt} = na^2\sqrt{1-e^2}$

又 $M = n(t-t_0)$　$\frac{dM}{dt}=\dot M = n$

⇒ $\frac{df}{dM} = \sqrt{1-e^2}\left(\frac ar\right)^2$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

$\frac{dE}{dM}=\frac{\dot{E}}{n}$ 而 $r=a(1-e\cos E)$

又 $E-e\sin E=M$. $\dot{E}-e\cos E\,\dot{E}=n$

$\therefore \frac{a}{r}=\frac{1}{1-e\cos E}=\frac{\dot{E}}{n}=\frac{dE}{dM}$ (10.7)

把(10.5)代入(10.7)，得 $\frac{a}{r}=1+(e-\frac{e^3}{8})\cos M+e^2\cos 2M+\frac{9e^3}{8}\cos 3M+O(e^4)$

$\therefore (\frac{a}{r})^2=1+\frac{e^2}{2}+(2e+\frac{3e^3}{4})\cos M+\frac{5e^2}{2}\cos 2M+\frac{13e^3}{4}\cos 3M+O(e^4)$

代入(10.6)，得 $\frac{df}{dM}=1+(2e-\frac{e^3}{4})\cos M+\frac{5e^2}{2}\cos 2M+\frac{13e^3}{4}\cos 3M+O(e^4)$

积分得 $f=M+(2e-\frac{e^3}{4})\sin M+\frac{5e^2}{4}\sin 2M+\frac{13e^3}{12}\sin 3M+O(e^4)$

由上式可得中心差 $f-M$.

推论3的应用：

考虑地月质心关于太阳的运动(惯性系)，$\vec{r}(t)$ 定出轨道根数 (见PPT)(25页)(或见书113页)

将e代入中心差公式得

$f-M=114.9'\sin M+1.2'\sin 2M+O(e^3)$

由 $M=L-\tilde{\omega}$,

$\tilde{\omega}=102.93768193+0.32327364T$

$L=100.46457166+35999.37244981T$

$\Rightarrow M=357.52688973+35999.04917617T$ (10.15)

$\lambda=\tilde{\omega}+f=\tilde{\omega}+M+114.9'\sin M+1.2'\sin 2M$.

(太阳关于历元平春分点的黄经)

由 λ表达式，将M代入可得对应时刻太阳的黄经λ.

太阳视半径 s. $\sin s=\frac{a}{r}\sin s_0$. s_0是 $r=a$ 时太阳视半径. $\sin s_0=\frac{R_s}{a}$

$\therefore \sin s=\frac{R_s}{r}$

以 $R_s=696000\,km$, $a=1.00000261AU$，代入得

$$s=\frac{16'}{r/a}$$

例1.(见书114页)

太阳沿赤道方向的视运动

—由太阳相对地月质心位矢描述.

赤经与黄经的关系

黄 $(i\ j\ k)=(l\ m\ n)_{赤}R_1(-\varepsilon)$ 其中 ε为历元黄赤交角，唯张给出

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}=R_1(\varepsilon)\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\lambda\\ \cos\beta\sin\lambda\\ \sin\beta\end{pmatrix}$$

太阳的 $\beta=0$. $\Rightarrow$
$$\cos\delta\cos\alpha=\cos\lambda$$
$$\cos\delta\sin\alpha=\cos\varepsilon\sin\lambda$$
$$\sin\delta=-\sin\varepsilon\sin\lambda$$

$\Rightarrow \tan\alpha=\cos\varepsilon\tan\lambda$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

引理

若 $p>0$，$\tan y = p\tan x$，则有如下展开式：

$$y = x + q\sin 2x + \frac{q^2}{2}\sin 4x + \frac{q^3}{3}\sin 6x + \cdots$$

式中 $q = \frac{p-1}{p+1}$

证明：$\tan(y-x) = \frac{\tan y - \tan x}{1+\tan x \tan y} = \frac{(p-1)\tan x}{1+p\tan^2 x}$

$$= \frac{(p-1)\sin x\cos x}{\cos^2 x + p\sin^2 x} = \frac{(p-1)\sin 2x}{(p+1)-(p-1)\cos 2x} = \frac{q\sin 2x}{1-q\cos 2x}$$

$$= q\sin 2x\,(1+q\cos 2x + q^2\cos^2 2x + \cdots)$$

$$y - x = \arctan[q\sin 2x\,(1+q\cos 2x + q^2\cos^2 2x + \cdots)]$$

$$= q\sin 2x\,(1+q\cos 2x+q^2\cos^2 2x + \cdots) - \frac{1}{3}q^3\sin^3 2x\,(1+q\cos 2x+\cdots)^3 + \cdots$$

$$= q\sin 2x + \frac{1}{2}q^2\sin 4x + \frac{1}{3}q^3\sin 6x + \cdots$$

赤经按黄经展开见书 #

振动理论基本原理

振动理论：求解基本方程的另一方法。

如简谐振动系统。

$m\ddot{x} + kx = f(t)$ 　$f(t)$ 为小量。

当 $f=0$（无振动）　$m\ddot{x}+kx=0 \Rightarrow x = b\cos\omega t + a\sin\omega t$ 　$y=\dot{x} = a\omega\cos\omega t - b\omega\sin\omega t$

其中 a、b 为常数，由初始条件定出。

当 $f\neq 0$，用常数变易法。

$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ m\dot{y} + kx = f(t) \end{cases}$$

$x = a(t)\sin\omega t + b(t)\cos\omega t$. 　(10.19)

$y = a(t)\omega\cos\omega t + b(t)\cdot(-\omega)\sin\omega t$ 　(10.20)

对 (10.19) 求导，$y = \dot{x} = \dot{a}\sin\omega t + \dot{b}\cos\omega t + a\omega\cos\omega t + b(-\omega)\sin\omega t$ 　(10.21)

联立 (10.21)、(10.20)，得 $\dot{a}(t)\sin\omega t + \dot{b}(t)\cos\omega t = 0$ 　(10.22)（称"吻切条件"）

$\dot{y}(t) = \dot{a}\omega\cos\omega t - \dot{b}\omega\sin\omega t - a\omega^2\sin\omega t - b\omega^2\cos\omega t$ 　(10.23)

代入 $m\dot{y} + kx = f(t)$ 中。

$\rightarrow \dot{a}\omega\cos\omega t - \dot{b}\omega\sin\omega t = g(t)$，其中 $g(t) = \frac{f(t)}{m}$ 　(10.24)

联立 (10.22) (10.24)，

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{a}(t) = \frac{g(t)}{\omega}\cos\omega t \\ \dot{b}(t) = -\frac{g(t)}{\omega}\sin\omega t \end{cases}$$

$\rightarrow a(t)$，$b(t)$

特例 　a. 幻灯片22页 　b. 幻灯23页 　c. 幻灯25、26页

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

摄动理论应用之一 —— 水星进动

用广义相对论求基本物理量 $\vec{r}(t)$ $\Rightarrow dw, de$

① 物理模型

水星相对太阳 $\vec{r}(t)$，引力场 $g_{\mu\nu}$

② 基本方程

a. 太阳激发引力场 (Einstein field equation)

b. 引力场影响水星（测地运动）

$u=\frac{1}{r}$

广相有结论：$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu}{h^2}+f(\theta)$ (10.23) 其中 $f(\theta)=\frac{3\mu}{c^2}\cdot\frac{1}{r^2}$

$$\begin{cases} v=\frac{du}{d\theta} \\ \frac{dv}{d\theta}+u=\frac{\mu}{h^2}+f(\theta) \end{cases}$$

当 $f(\theta)=0$. $u=\frac{\mu}{h^2}[1+e\cos(\theta-w)]$ (10.28)

$v=\frac{du}{d\theta}=-\frac{\mu e}{h^2}\sin(\theta-w)$ (10.29)

当 $f(\theta)$ 为小量，$u=\frac{\mu}{h^2}[1+e(\theta)\cos(\theta-w(\theta))]$ (10.30)

$v=-\frac{\mu}{h^2}e(\theta)\sin(\theta-w(\theta))$ (10.31)

$v=\frac{du}{d\theta}=\frac{\mu}{h^2}(-e\sin(\theta-w)+\frac{de}{d\theta}\cos(\theta-w)+\frac{dw}{d\theta}e\sin(\theta-w))$ (10.32) 与 (10.31) 联立得 吻切条件：

$\frac{de}{d\theta}\cos(\theta-w)+\frac{dw}{d\theta}e\sin(\theta-w)=0$ (10.33)

$\frac{dv}{d\theta}=-\frac{\mu}{h^2}\left(\frac{de}{d\theta}\sin(\theta-w)+e(1-\frac{dw}{d\theta})\cos(\theta-w)\right)$ (10.34) 代入 (10.23)

得 $-\frac{de}{d\theta}\sin(\theta-w)+\frac{dw}{d\theta}e\cos(\theta-w)=\frac{h^2}{\mu}f(\theta)$ (10.35)

由 (10.35) (10.23)，$\frac{de}{d\theta}=-\frac{h^2}{\mu}f(\theta)\sin(\theta-w)$

$\frac{dw}{d\theta}=\frac{h^2}{\mu e}f(\theta)\cos(\theta-w)$ (10.36)

$\vec{r}=r(\theta)=r(\theta(t))$.

$f(\theta)=\frac{3\mu}{c^2r^2}=\frac{3\mu}{c^2}\frac{\mu}{h^4}[1+e\cos(\theta-w)]$

积分可得 $\Delta e=0$ $\Delta w=\frac{6\pi\mu^2}{c^2h^2}=5\times10^{-7}$ rad/rev

摄动理论应用之二 —— 二体问题的摄动理论

常数变易法

在无摄动情况下，$\vec{c}=(a,e,w,\Omega,i,M)^T=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6)^T$，由初始条件决定。

无摄动时 $\vec{c}$ 与 t 无关。

存在摄动时，$\vec{c}$ 是 t 的函数。$\vec{r}=\vec{r}(\vec{c}(t),t)$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

无摄动时，$\ddot{\vec{x}}(c,t)+\frac{\mu}{r^3}\vec{x}=0$. (10.37)

有摄动：$\ddot{\vec{x}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{x}=\frac{dR}{d\vec{r}}$ (10.38)

无摄：$\dot{\vec{x}}(\vec{c},t)=\frac{\partial\vec{x}(\vec{c},t)}{\partial t}$ (10.39)

有摄：$\dot{\vec{x}}(\vec{c},t)=\frac{\partial\vec{x}(\vec{c},t)}{\partial t}+\frac{d\vec{x}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\dot{\vec{c}}$ (10.40) （$\frac{d\vec{x}}{d\vec{c}^T}$ 为 $\frac{d\vec{x}}{d\vec{c}}$ 转置）

其中 $\frac{d\vec{x}}{d\vec{c}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial c_1} & \frac{\partial y}{\partial c_1} & \frac{\partial z}{\partial c_1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial x}{\partial c_6} & \frac{\partial y}{\partial c_6} & \frac{\partial z}{\partial c_6}\end{pmatrix}$

由 (10.39)(10.40)：$\frac{d\vec{x}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\dot{\vec{c}}=0$ (10.41)

由 (10.40)．

$$\ddot{\vec{x}}(\vec{c},t)=\frac{\partial^2\vec{x}(\vec{c},t)}{\partial t^2}+\frac{d\dot{\vec{x}}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\dot{\vec{c}} \quad (10.42)$$

代入 (10.38)．

$$\frac{\partial^2\vec{x}(\vec{c},t)}{\partial t^2}+\frac{d\dot{\vec{x}}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\dot{\vec{c}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{x}(\vec{c},t)=\frac{dR}{d\vec{r}} \quad (10.43)$$

联立 (10.37)

$$\frac{d\dot{\vec{x}}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\dot{\vec{c}}=\frac{dR}{d\vec{r}} \quad (10.44)$$

结合 (10.41)、(10.44)，得

$$\begin{bmatrix}\frac{d\vec{x}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\\ \frac{d\dot{\vec{x}}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\end{bmatrix}\dot{\vec{c}}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{dR}{d\vec{r}}\end{pmatrix}$$

$L\dot{\vec{c}}=\frac{dR}{d\vec{c}}$．其中 $L=([c_i,c_j])=\begin{pmatrix}0 & [c_1,c_2] & \cdots & [c_1,c_6]\\ -[c_1,c_2] & 0 & \cdots & [c_2,c_6]\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ -[c_1,c_6] & -[c_2,c_6] & \cdots & 0\end{pmatrix}$ $[c_i,c_j]$ 为拉格朗日括号

第11课　地球动力学初步

本课给出地、月、日系统引力场物理模型和数学模型．

求解形状和运动．

物理模型：日、月分别为一质点、地球为球形刚体．（滞弹性体，潮汐耗散变形）

描述

$\vec{r}(t)$，日、月、地球质心平动（三坐标）．绕质心转动（欧拉角）

引入角速度矢量．设 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 与刚体

地球固结化标架（正交）．$\vec{e}_i^T\vec{e}_j=0\ (i\neq j)$．$\vec{e}_i^T\vec{e}_i=1\rightarrow\dot{\vec{e}}_i^T\vec{e}_j+\vec{e}_i^T\dot{\vec{e}}_j=0$．

记 $\dot{\vec{e}}_j^T\vec{e}_k=-\vec{e}_k^T\dot{\vec{e}}_j=\Omega_i$

可证明 $\vec{\Omega}=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\\ \Omega_3\end{pmatrix}$ 为角速度向量．