已修订
21-09-22，10:31

第一章 数学准备

一、 笛卡尔张量分析简介

张量代数起源于力学，最初用来表示弹性介质中各点的应力状态，现在张量理论已发展成为现代物理学的有力数学工具。

1. 矢量、标准基和坐标分量

考虑三维空间欧氏空间$\mathbf{R}^3$的矢量$\boldsymbol{r}$和**标准基**（规范基）$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$，基矢相互**正交且归一**，

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}$$

其中**克罗内克符号**（Kronecker symbol）

$$\delta_{ij}\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}1, & \text{when } i=j;\\ 0, & \text{when } i\neq j.\end{cases}$$

基矢是完备的，即

$$\forall\boldsymbol{r}\in R^3,\qquad \boldsymbol{r}\equiv r_i\boldsymbol{e}_i$$

这里我们使用了**求和约定**（Einstein convention）：在相乘的项中，如果一个指标（字母）重复两次，默认要对该指标的所有可能取值求和。比如

$$a_ib_i\equiv\sum_{i=1}^{3}a_ib_i=a_jb_k\delta_{jk}$$

被求和的指标又称为**哑指标**（dummy index），为被求和的指标称为**自由指标**（free index）。

利用基矢的正交归一性，

$$\boldsymbol{r}=r_j\boldsymbol{e}_j\Rightarrow\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_i=r_j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=r_j\delta_{ij}=r_i$$

矢量在第i个坐标轴上的投影，即坐标分量r_i。我们常把坐标分量写成列矢量

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{r}=r_i\boldsymbol{e}_i=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i$$

上式中

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i$$

称为**并矢**（dyadic）。标准基的完备性可以写成等式

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i=\mathbf{1}$$

线性变换$\mathbf{1}$表示**恒等变换**。

通常我们会选择标准基为**右手系**，

$$(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_3=1$$

这等价于

$$(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{e}_k=\varepsilon_{ijk}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \det\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\right)$$

上式可以作为**列维-奇维塔符号**（Levi-Civita symbol）的定义，或者等价定义为

$$\varepsilon_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1, & (i,j,k)\text{是偶排列;} \\ -1, & (i,j,k)\text{是奇排列;} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

2. 矢量的坐标变换

矢量是一个客观存在的物理量，与基矢的选择无关；但其坐标分量却与基矢的选择有关。在新标准基$\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$下，分量（坐标）发生变化，

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}'_i \boldsymbol{e}'_i = r'_i \boldsymbol{e}'_i$$

新老坐标的变换关系为

$$r'_i = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_j \left(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_i\right) = \left(\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j\right) r_j$$

定义**转动矩阵**（rotation matrix；或**方向余弦矩阵**，DCM，direction cosine matrix）

$$R_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j, \qquad i,j = 1,2,3$$

那么坐标分量的变换

$$r'_i = R_{ij} r_j \Leftrightarrow \vec{r}' = R\vec{r}$$

两组标准基之间的转动矩阵是**正交矩阵**，

$$R_{jl}R_{km}\delta_{lm} = \left(\boldsymbol{e}'_j \cdot \boldsymbol{e}_l\right)\left(\boldsymbol{e}'_k \cdot \boldsymbol{e}_m\right)\delta_{lm} = \left(\boldsymbol{e}'_j \cdot \boldsymbol{e}_l\right)\left(\boldsymbol{e}'_k \cdot \boldsymbol{e}_l\right) = \left(\boldsymbol{e}'_j \cdot \boldsymbol{e}_l\right)\left(\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}'_k\right) = \boldsymbol{e}'_j \cdot \boldsymbol{e}_l \boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}'_k$$
$$= \boldsymbol{e}'_j \cdot \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{e}'_k = \delta_{jk}$$

$$RR^T = 1_{3\times3}$$

符号$1_{3\times3}$表示3×3的单位矩阵。

两组标准基都是右手系，

$$\left(\boldsymbol{e}'_1 \times \boldsymbol{e}'_2\right) \cdot \boldsymbol{e}'_3 = 1$$
$$= \left(\left(\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i\right) \times \left(\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_j\right)\right) \cdot \left(\boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k\right) = \left(R_{1i}\boldsymbol{e}_i \times R_{2j}\boldsymbol{e}_j\right) \cdot R_{3k}\boldsymbol{e}_k$$
$$= R_{1i}R_{2j}R_{3k}\varepsilon_{ijk} = \det R$$

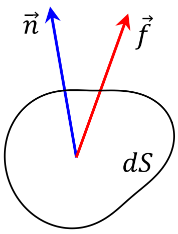
$$\det R = 1$$

三维空间的全部转动构成群

$$\mathrm{SO}(3) \stackrel{\text{def}}{=} \{R \in M(3, \boldsymbol{R}) | RR^T = \boldsymbol{1}, \det R = 1\}$$

转动矩阵的逆矩阵仍为转动矩阵；两个转动矩阵的乘积也是转动矩阵。

3. 张量的定义



考虑连续介质内部的一个面元$\mathrm{d}\vec{S}=\vec{n}\mathrm{d}S$，单位面积上所受的应力$\boldsymbol{f}$来自分子间作用力，与面元的方向有关，准确到领头项（忽略方向$\boldsymbol{n}$的非线性项；零次项不符合牛顿第三定律），可以表示为柯西应力公式

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$$

其中$\boldsymbol{\sigma}$是线性映射。写成分量形式，

$$\boldsymbol{f}=f_j\boldsymbol{e}_j$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}=\sigma_{jk}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\cdot n_l\boldsymbol{e}_l=\sigma_{jk}n_l\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_l=\sigma_{jk}n_l\delta_{kl}\boldsymbol{e}_j=\sigma_{jk}n_k\boldsymbol{e}_j$$

即

$$f_j=\sigma_{jk}n_k$$

即受力可以用柯西应力张量（Cauchy's stress tensor）表达，

$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma_{jk}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k,\qquad \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k$$

其中 9 个“并矢”

$$\{\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k|j,k=1,2,3.\}$$

是二阶张量的**张量基**。柯西应力张量$\boldsymbol{\sigma}$是物理量，与基矢的选取无关（转动不变）；**张量的分量**（components）

$$\{\sigma_{jk}|j,k=1,2,3.\}$$

与标准基的选取有关，可以写成3×3的矩阵

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}$$

一般的 2 阶张量$\mathbf{T}$定义为

$$\mathbf{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

有时我们也直接称分量T_{ij}为张量。

类似地定义 3 阶张量

$$\mathbf{T}=T_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$$

以及更高阶的张量。

张量是矩阵的推广。

矢量只有一个指标，是一阶张量。

标量可以看成 0 阶张量。

其它例子：介电张量，转动惯量（2 阶），压电张量（3 阶），弹性张量（4 阶），黎曼曲率张量（4 阶）

4. 张量的坐标变换

在坐标变换时，张量的每一个指标都按照矢量的方式变换，例如二阶张量

$$T_{ij}\to T'_{ij}=R_{ii'}R_{jj'}T_{i'j'}$$

证明：$T'_{ij}=T_{kl}(\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}_k)\big(\boldsymbol{e}'_j\cdot\boldsymbol{e}_l\big)=T_{kl}R_{ik}R_{jl}=R_{ii'}R_{jj'}T_{i'j'}$

有些教材中以上式作为张量的定义。

在坐标变换时，张量的分量会改变，但是张量本身不变。

5. 张量的运算

同阶张量的**加法**（以二阶为例）定义为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$C_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} A_{jk} + B_{jk}$$

数乘定义为

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{B}$$

$$A_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda B_{jk}$$

这样全体二阶张量构成线性空间。

直积（并积、张量积）：

$$\mathbf{P} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{S} = T_{ij} S_{kl} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_l$$

$$P_{ijkl} = T_{ij} S_{kl}$$

缩并（矢量内积的推广）：对张量的两个指标求和得到低阶张量，l 例如

$$P_{ijkk}, P_{iikl}, P_{ijki}$$

每缩并一对指标，张量的阶下降 2。注意不同指标的缩并结果是不一样的，

$$T_{ij} S_{jk} \neq T_{ji} S_{jk}$$

例 三阶张量A_{jkl}与矢量v_i的“内积”有三种，

$$A_{jkl} v_j, \qquad A_{jkl} v_k, \qquad A_{jkl} v_l$$

其中第一、第三种分别是$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$的分量；如果不写分量指标，要表达第二种缩并，书写不太方便。

6. 张量的宇称

考虑矢量在空间反射

$$\boldsymbol{e}_i \to -\boldsymbol{e}_i$$

下的变换，坐标和动量

$$\vec{r} \to \vec{r}' = -\vec{r}$$

$$\vec{p} \to \vec{p}' = m\dot{\vec{r}}' = -\vec{p}$$

是（正常）**矢量**，而角动量则是**赝矢量**，

$$\vec{L} \to \vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p}' = \vec{L}$$

一个n-阶张量，如果在空间反射下变成原来的张量乘以$(-1)^n$，我们称之为张量；如果变成原张量的$(-1)^{n+1}$倍，则称之为**赝张量**（pseudotensor）。用空间反射作用于张量，特征值± 1称为张量的宇称（parity）。

7. 迷向张量

各分量均转动不变的张量称为**迷向张量**（各向同性张量 isotropic tensor）。

SO(3)的**基本迷向张量**为δ_{jk}，ε_{jkl}，（Kronecker 符号，Levi-Civita 符号）

$$R_{jj'}R_{kk'}\delta_{j'k'} = \delta_{jk}$$

$$R_{jj'}R_{kk'}R_{ll'}\varepsilon_{j'k'l'} = \varepsilon_{jkl}$$

来自转动矩阵满足的两个条件：

$$RR^T = R^TR = \mathbf{1}_{3\times3}, \qquad \det R = 1.$$

迷向张量满足下面的恒等式（利用$\det A \det B = \det(AB^T)$可证）

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{i'j'k'} = \det\begin{pmatrix} \delta_{ii'} & \delta_{ij'} & \delta_{ik'} \\ \delta_{ji'} & \delta_{jj'} & \delta_{jk'} \\ \delta_{ki'} & \delta_{kj'} & \delta_{kk'} \end{pmatrix}$$

三维矩阵的行列式（利用$\det(AB) = \det A \det B$可证）

$$A_{ii'}A_{jj'}A_{kk'}\varepsilon_{ijk} = \det A \ \ \varepsilon_{i'j'k'}$$

推论:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \det\begin{pmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}}$$

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,\vec{x} \equiv \det(\vec{x},\vec{b},\vec{c})\,\vec{a} + \det(\vec{a},\vec{x},\vec{c})\,\vec{b} + \det(\vec{a},\vec{b},\vec{x})\,\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \delta_{ij}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\varepsilon_{jlm} + \delta_{il}\varepsilon_{kjm} + \delta_{im}\varepsilon_{klj}$$

（取特例$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \mathbf{1}_{3\times3}$易证，再由等式两边对$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的线性知结论成立）。

8. 场论公式的张量写法

两个矢量的内积和叉乘

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_ib_j\delta_{ij}, \qquad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = a_jb_k\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i$$

梯度、散度和旋度算子

$$\nabla f(\vec{r}) = (\nabla f)_i\boldsymbol{e}_i, \qquad (\nabla f)_i = \partial_i f$$

$$\nabla\cdot\vec{a} = \partial_i a_i, \qquad \partial_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial r_i}$$

$$\nabla\times\vec{a} = (\nabla\times\vec{a})_i\boldsymbol{e}_i, \qquad (\nabla\times\vec{a})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j a_k$$

例：计算$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$，$\nabla\times\left(\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}\right)$

二、 几种常用的坐标系

选择合适的坐标系会使问题的求解变得简单。下面介绍几种常用的正交坐标系。

1. 直角坐标系

✧ 标准基$\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\} \Leftrightarrow \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$

度规张量（metric tensor）定义为基矢的内积，

$$g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{jk}$$

也是基矢$\boldsymbol{e}_i$在$\boldsymbol{e}_j$轴的坐标分量，

$$(\vec{e}_i)_j = \delta_{ij}$$

$$(\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

完备性：

$$g_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \mathbf{1}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{e}_j . \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i . \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_j . \mathbf{1} . \boldsymbol{e}_k \Longrightarrow \left(\vec{e}_j\right)_i (\vec{e}_k)_i = \delta_{jk} \Longrightarrow \vec{e}_i \vec{e}_i^T = \mathbf{1}_{3\times 3}$$

右手系：$\vec{e}_i \cdot \left(\vec{e}_j \times \vec{e}_k\right) = \varepsilon_{ijk}$

体积元

$$dV = dxdydz$$

✧ 质点的位移

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$
$$x = \vec{r} \cdot \vec{e}_x, \qquad y = \vec{r} \cdot \vec{e}_y, \qquad z = \vec{r} \cdot \vec{e}_z$$

✧ 速度

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

✧ 加速度

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

✧ 质点的角动量

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} L_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ L_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ L_x = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{cases}$$

✧ 动能

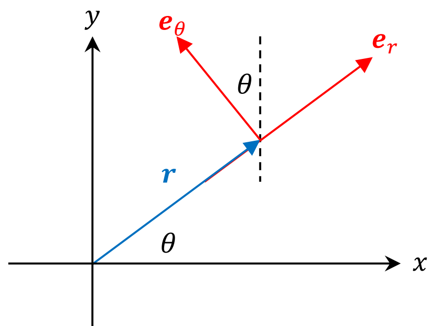
$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

2. 平面极坐标系

常用于天体运动、电磁、核力等有心力场问题。

✧ 与直角坐标系的关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



图表 1 平面极坐标系的标准基

✧ 基矢

$$\boldsymbol{e}_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}, \qquad \boldsymbol{e}_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}$$

基矢在直角坐标系的坐标

$$(\vec{e}_r)_i \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \cdot \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial r_i}{\partial r}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y \end{cases}$$

是一种"本地坐标系"，

$$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\theta), \qquad \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\theta)$$

✧ 正交归一性

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = 1, \qquad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

度规为单位矩阵。

✧ 完备性

$$\vec{e}_r\vec{e}_r^T = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta^T = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_r\vec{e}_r^T + \vec{e}_\theta\vec{e}_\theta^T = \mathbf{1}$$

✧ 面积

$$dS = \det\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right) dr d\theta = r dr d\theta$$

✧ 位移

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

✧ 速度

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{r}\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\dot{\theta}$$

由极坐标基矢的表达式，

$$\begin{cases} d\vec{e}_r = \vec{e}_\theta d\theta \\ d\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r d\theta \end{cases}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

分别为径向速度和角速度。

✧ 加速度

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\{\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

✧ 角动量

$$L_z = rmv_\theta - 0 = mr^2\dot{\theta}$$

✧ 动能

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

3. 柱坐标系

与平面坐标类似，多一个z-分量，

$$\vec{r}(\rho,\theta,z) = \rho\cos\theta\,\vec{e}_x + \rho\sin\theta\,\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

✧ 标准基

$$\vec{e}_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \quad \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = 1\vec{e}_z.$$

这样定义的基矢正交归一（原因是坐标网格线正交）

完备

$$\vec{e}_\rho\vec{e}_\rho^T + \vec{e}_\theta\vec{e}_\theta^T + \vec{e}_z\vec{e}_z^T = \mathbf{1}_{3\times 3}$$

构成右手系：

$$\left(\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\theta\right)\cdot\vec{e}_\varphi = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

体积元

$$dV = \det\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho},\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta},\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right)d\rho d\theta dz = \rho d\rho d\theta dz$$

✧ 位移

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$$

✧ 速度

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

✧ 加速度

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

✧ 角动量

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_R & \boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_z \\ \rho & 0 & z \\ m\dot{\rho} & m\rho\dot{\theta} & m\dot{z} \end{pmatrix} = -m\rho z\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + m(z\dot{\rho} - \rho\dot{z})\boldsymbol{e}_\theta + m\rho^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z$$

✧ 动能

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$

4. 球坐标系

参数选为半径，纬度，经度：(r,θ,φ)

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

✧ 标准基

$$\vec{e}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\Big/\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y + 0\vec{e}_z$$

满足正交归一以及完备性

$\{\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi\}$构成右手系

$$(\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta)\cdot\vec{e}_\varphi = \det(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi) = +1$$

体积元

$$dV = \det\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial r},\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta},\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right)drd\theta d\varphi = r^2\sin\theta\,d\theta d\varphi$$

✧ 位移

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

✧ 速度

$$\vec{v} \overset{\text{def}}{=} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\left(\dot{\theta}\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} + \dot{\varphi}\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\right) = \dot{r}\vec{e}_r + r\left(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right)$$

✧ 加速度

$$\begin{aligned}
\vec{a} &\overset{\text{def}}{=} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right\} \\
&= \left\{\ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\left(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right)\right\} + \left\{\left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\left[\dot{\theta}(-\vec{e}_r) + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi\right]\right\} \\
&\qquad + \left\{\left(\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\left[\dot{\varphi}(-\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\vec{e}_\theta)\right]\right\} \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\theta \\
&\qquad + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

✧ 角动量

$$\boldsymbol{L} = -mr^2\sin\theta\,\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\theta + mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\varphi$$

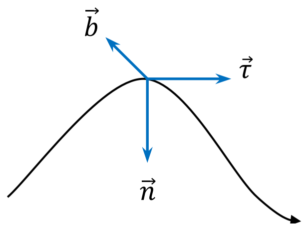
✧ 动能

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

5. 自然坐标系*

使用弧长参数s作为变量，三维空间的曲线可以表示为

$$\vec{r}=\vec{r}(s)$$



图表 2 自然坐标系

✧ 标准基

切向量定义为切线的方向，

$$\vec{\tau}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{d\vec{r}}{ds}$$

曲率矢量

$$\vec{N}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

垂直于切向量，

$$\vec{\tau}^2=1\Longrightarrow 2\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds}=0$$

曲率矢量的大小称为**曲率**，

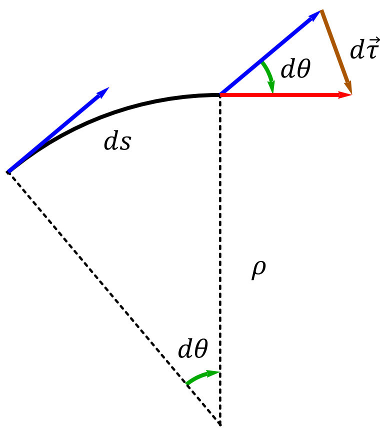
$$N\stackrel{\text{def}}{=}\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|$$

曲率的倒数是长度量纲，称为**曲率半径**，

$$\rho\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{N}=1\Big/\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|$$

如图，曲线可局部近似为圆弧，

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|=\left|\frac{d\vec{\tau}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\right|=\left|\frac{d\vec{\tau}}{d\theta}\right|\left|\frac{d\theta}{ds}\right|=1\cdot\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho}$$



圆的半径倒数即曲率，曲率矢量的方向指向圆心。

归一化的曲率向量称为**法向量**，

$$\vec{n}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\vec{N}}{N}=\rho\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

副法向定义为

$$\vec{b}=\vec{\tau}\times\vec{n}$$

$\{\vec{\tau},\vec{n},\vec{b}\}$构成标准基。（Gauss 曲线论）

挠率矢量

$$\vec{K}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{d\vec{b}}{ds}=\vec{\tau}\times\frac{d\vec{n}}{ds}$$

与$\vec{b},\vec{\tau}$都垂直，其模长称为**挠率**，

$$K\stackrel{\text{def}}{=}\left|\frac{d\vec{b}}{ds}\right|=\frac{1}{\sigma}$$

这里σ称为挠率半径，

$$\vec{K} = \frac{\vec{n}}{\sigma}$$

挠率反应曲线局部偏离平面的程度。

✧ 位移

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \qquad s = s(t).$$

✧ 速度

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\dot{s} = \dot{s}\vec{\tau}$$

✧ 加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{\tau}) = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{ds}\dot{s} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}$$

内禀方程

$$a_\tau = \ddot{s}, \qquad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

没有副法向分量。

✧ 常用的曲率半径公式

若以t为参数，

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

则

$$\vec{N} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \left(\frac{1}{\dot{s}}\frac{d}{dt}\right)^2\vec{r} = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}\frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{v^2}\vec{a} - \frac{1}{v^3}\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}\vec{v} = \frac{1}{v^2}\left(\mathbf{1} - \frac{\vec{v}\vec{v}^T}{v^2}\right)\vec{a} = -\frac{1}{v^4}\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{a})$$

又由于

$$P = \mathbf{1} - \frac{\vec{v}\vec{v}^T}{v^2}, \qquad P^2 = P$$

是投影到垂直于速度方向的矩阵（projection matrix），

$$N = \frac{1}{v^2}\sqrt{\vec{a}^T P^2 \vec{a}} = \frac{1}{v^2}\sqrt{\vec{a}^T P \vec{a}} = \sqrt{\frac{a^2v^2 - (\vec{v}\cdot\vec{a})^2}{v^6}}$$

或者

$$N = \frac{1}{v^2}\left|\frac{\vec{v}}{v}\times\left(\frac{\vec{v}}{v}\times\vec{a}\right)\right| = \frac{1}{v^2}\left|\frac{\vec{v}}{v}\times\vec{a}\right| = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{v^3}$$

$$\rho = \frac{1}{N} = \frac{v^2}{a_n} = \sqrt{\frac{v^6}{a^2v^2 - (\vec{v}\cdot\vec{a})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2) - (\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})^2}}$$

如果取弧长参数

$$t = s, \qquad \vec{r} = \vec{r}(s)$$

则

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$$
$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = 0$$

$$\rho = \left(x''^2 + y''^2 + z''^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

对平面曲线$y=y(x)$，相当于取参数$t=x$，

$$\vec{v}=(1,\quad y')^T,\qquad \vec{a}=(0,\quad y'')^T$$

于是有牛顿曲率公式

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

类似地可求得极坐标曲线$r=r(\theta)$的曲率半径为

$$\rho=\frac{(r+r'^2)^{3/2}}{|r^2+2r'^2-rr''|}$$

使用哪一种坐标系取决于问题的场景。取容易将运动方程分离变量的坐标系，或者方便理解问题的坐标系。

三、 黎曼几何简介

1. 曲线坐标系

(1)流形和嵌入

流形（manifold）：在每一点的邻域，都存在n维局部欧几里得坐标的拓扑空间。

Euclid 空间、闵可夫斯基空间、曲线、曲面等都是流形。

惠特尼**嵌入定理**(Whitney, H.)[1]：n-维流形可以嵌入$2\mathrm{n}-k(n)$维欧氏空间$\mathbf{R}^{2\mathrm{n}-k(n)}$。

设n维流形M可嵌入N维欧几里得空间E，

$$N\geq n\geq 1$$

把流形嵌入的欧氏空间改为闵氏空间，则得到伪黎曼空间。本节的讨论同样适用于伪黎曼空间。

(2)欧氏空间的笛卡尔标准基

标准基：

在欧氏空间$\mathbf{R}^{\mathrm{N}}$中任意的矢量$\boldsymbol{v}$可写成

[1] $k(n)$是把n表示成二进制数时含有数字 1 的个数。1985 年科恩完成证明。

$$\boldsymbol{v} = v^i \tilde{\boldsymbol{e}}_i$$

其中

$$\{\tilde{\boldsymbol{e}}_i | i = 1,2,\cdots,N\}$$

是欧氏空间的标准基。

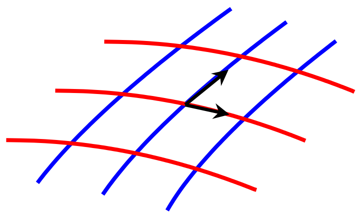
上下指标：

为了方便，我们在讨论一般的流形时，把基矢的指标写在右下角，而把坐标分量的指标写在右上角。以此表明坐标架$\tilde{\boldsymbol{e}}_i$与坐标v^i按互逆的方式变换，从而整个矢量不依赖于坐标架的选取，$v^i \tilde{\boldsymbol{e}}_i$是不变的。

欧氏空间的直角坐标标准基$\{\tilde{\boldsymbol{e}}_i | i = 1,2,\cdots,N\}$与点的位置无关，

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \tilde{\boldsymbol{e}}_i = 0$$

(3)流形的标架场



设n维流形的坐标参数为ξ^α，与嵌入的欧氏空间坐标之间的关系为

$$r^i = r^i(\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^n)$$

本节用希腊字母标记曲线坐标系的指标。

流形的**自然基矢**取为沿参数网格线的矢量（不要求正交归一），

$$\boldsymbol{e}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial r^i}{\partial \xi^\alpha} \tilde{\boldsymbol{e}}_i, \qquad \alpha = 1,2,\cdots,n.$$

与时空点有关，每个点都有一套局部坐标架。

流形的坐标架各点不同（标架场 vierbein），在欧氏空间来看，n个自然基，每一个自然基都有N个分量，

$$\vec{e}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^\alpha}, \qquad \alpha = 1,2,\cdots,n.$$

又称半度规，

$$\boldsymbol{e}_\alpha = (\vec{e}_\alpha)^i \tilde{\boldsymbol{e}}_i$$

(4)坐标变换

若重新选取坐标参数为ξ'^α，则标架场变为

$$\boldsymbol{e}'_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi'^\alpha}$$

由链式法则，

$$\boldsymbol{e}'_\alpha = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \xi'^\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \xi'^\alpha} \boldsymbol{e}_\beta$$

记雅可比矩阵及逆矩阵为

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi'^{\alpha}}{\partial \xi^{\beta}}, \qquad \overline{\Lambda}_{\alpha}^{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \xi'^{\alpha}}$$

满足

$$\overline{\Lambda}_{\gamma}^{\alpha}\Lambda_{\beta}^{\gamma} = \delta_{\beta}^{\alpha}, \qquad \overline{\Lambda}_{\alpha}^{\gamma}\Lambda_{\gamma}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$$

那么自然基的变换为

$$\boldsymbol{e}'_{\alpha} = \overline{\Lambda}_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{e}_{\beta}, \qquad \vec{e}'_{\alpha} = \overline{\Lambda}_{\alpha}^{\beta}\vec{e}_{\beta}$$

δ_{α}^{β}是 Kronecker 符号。

一个矢量物理量是客观存在，不依赖于坐标参数和标架场的选择（具有广义不变性），所以矢量（张量）分量的变换为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v} = v^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha} = v'^{\alpha}\boldsymbol{e}'_{\alpha} \\ \boldsymbol{e}'_{\alpha} = \overline{\Lambda}_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{e}_{\beta} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha} = v'^{\alpha}\overline{\Lambda}_{\cdot\alpha}^{\beta}\boldsymbol{e}_{\beta} \Longrightarrow v^{\beta} = v'^{\alpha}\overline{\Lambda}_{\alpha}^{\beta} \Longrightarrow v'^{\alpha} = \Lambda_{\beta}^{\alpha}v^{\beta}$$

即基矢与分量的变换矩阵互逆。

2. 度规张量

(1)黎曼度规张量

黎曼度规张量（metric tensor），又称度规矩阵，定义为

$$g_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_{\beta} = \vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{e}_{\beta}$$

是两个半度规的缩并。

度规张量（场）指标交换对称，

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$$

例 对三维欧氏空间，如果使用笛卡尔坐标，度规矩阵及其逆矩阵都是单位矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 狭义相对论中的四维 Minkowski 空间（伪欧氏空间）度规为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

对（伪）黎曼几何，度规张量描述了空间的全部局部性质，不再需要考虑嵌入空间E和半度规$\partial\vec{r}/\partial\xi^{\alpha}$，一切性质都是内禀的。

(2) 距离

邻近点的距离平方为

$$ds^2 = \delta_{jk} dr^i dr^j = \delta_{jk} \frac{\partial r^i}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha \frac{\partial r^j}{\partial \xi^\beta} d\xi^\beta = \delta_{jk} \frac{\partial r^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial r^j}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta d\xi^\alpha d\xi^\beta$$
$$= g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

是正定二次型。

黎曼空间的度规矩阵是正定对称矩阵，并且非奇异，

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \qquad \det g \neq 0$$

度规矩阵的逆矩阵为

$$\left(g^{\alpha\beta}\right) \stackrel{\text{def}}{=} g^{-1}$$

也是对称矩阵，

$$g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$$

并且有

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$$

(3) 基矢的完备性

按度规的定义，

$$\left(g^{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta\right) . \boldsymbol{e}_\gamma = g^{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\alpha g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \boldsymbol{e}_\alpha = \boldsymbol{e}_\gamma$$
$$\left(g^{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta^T\right) \vec{e}_\gamma = g^{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha \left(\vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_\gamma\right) = g^{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha g_{\beta\gamma} = g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} \vec{e}_\alpha = \delta^\alpha_\gamma \vec{e}_\alpha = \vec{e}_\gamma$$

再由$\{\boldsymbol{e}_\gamma | \gamma = 1,2,\cdots,n\}$在黎曼空间的完备性，

$$g^{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \mathbf{1}, \qquad g^{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta^T = \mathbf{1}_{n\times n}$$

3. 协变和逆变

(1) 度规张量的坐标变换

度规张量的变换为

$$g'_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}'_\alpha \cdot \boldsymbol{e}'_\beta = \bar{\Lambda}^\mu_\alpha \bar{\Lambda}^\nu_\beta \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = \bar{\Lambda}^\mu_\alpha \bar{\Lambda}^\nu_\beta g_{\mu\nu}$$

$g_{\alpha\beta}$的两个下指标均按基矢的方式变换，称为二阶**协变张量**（covariant tensor）。

度规矩阵的逆矩阵满足

$$g'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu g^{\mu\nu}$$

$g^{\alpha\beta}$的两个上指标均按坐标的方式变换，称为二阶**逆变张量**。

Sylvester **惯性定理** 对称矩阵正、负、零特征值的个数，在合同变换下不变。

故参数变换不改变度规矩阵正、负、零特征值的个数。

选择合适的参数可以使得度规成为对角矩阵，且对角元取± 1。

(2) 指标的升降

矢量的分量在参数变换下作逆变换，

$$v'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} v^{\beta}$$

称v^{α}为**逆变矢量**（contravariant vector）。

将矢量的坐标与度规张量缩并，定义

$$v_{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} v^{\beta}$$

在坐标变换下

$$v'_{\alpha} = g'_{\alpha\beta} v'^{\beta} = \overline{\Lambda}^{\mu}_{\alpha} \overline{\Lambda}^{\nu}_{\beta} g_{\mu\nu} \Lambda^{\beta}_{\gamma} v^{\gamma} = \overline{\Lambda}^{\mu}_{\alpha} \left(\overline{\Lambda}^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\beta}_{\gamma} \right) g_{\mu\nu} v^{\gamma} = \overline{\Lambda}^{\mu}_{\alpha} \delta^{\nu}_{\gamma} g_{\mu\nu} v^{\gamma} = \overline{\Lambda}^{\mu}_{\alpha} g_{\mu\nu} v^{\nu} = \overline{\Lambda}^{\mu}_{\alpha} v_{\mu}$$

v_{α}是**协变矢量**。

反之，一个协变矢量u_{α}，可以通过降指标成为

$$u^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta} u_{\beta}$$

在坐标变换下，

$$u'^{\alpha} = g'^{\alpha\beta} u'_{\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} g^{\mu\nu} \overline{\Lambda}^{\gamma}_{\beta} u_{\gamma} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \delta^{\gamma}_{\nu} g^{\mu\nu} u_{\gamma} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} u^{\mu}$$

是逆变矢量。

一般的，我们可以用度规张量升降张量的指标，

$$T_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma} = g_{\alpha\mu} T^{\mu\beta\gamma}$$

$$T^{\beta\cdot\gamma}_{\cdot\alpha} = g_{\alpha\mu} T^{\beta\mu\gamma}$$

其中“·”是指标占位符，以显示第几个指标被升降，

$$T_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma} \neq T^{\beta\cdot\gamma}_{\cdot\alpha}$$

上指标称为**逆变指标**，下指标称为**协变指标**。上下指标都有的张量，称为**混合张量**。

欧氏空间的直角坐标系中，度规是单位矩阵，所以笛卡尔张量无需考虑上下指标的区别。

例 基矢的完备性

$$g^{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_{\alpha} \boldsymbol{e}_{\beta} = \mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{e}^{\alpha} \boldsymbol{e}_{\alpha} = \mathbf{1}$$

基矢的内积

$$\boldsymbol{e}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{e}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \boldsymbol{e}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{e}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$$

可见$\boldsymbol{e}^{\alpha}$是$\boldsymbol{e}_{\alpha}$的对偶矢量（dual vector），

$$\boldsymbol{e}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_{\beta}$$

$$\vec{e}^{\alpha}=g^{\alpha\beta}\vec{e}_{\beta}$$

将$\vec{e}^{\alpha}$以α为列指标排成矩阵$V\in\mathbf{R}^{N\times n}$，

$$\left(g_{\alpha\beta}\right)=V^{T}V,\left(g^{\alpha\beta}\right)=\left(V^{T}V\right)^{-1}$$

$$\vec{e}^{\alpha}=g^{\alpha\beta}\vec{e}_{\beta}=\left(V^{T}V\right)^{-1}V^{T}$$

基矢内积

$$\vec{e}^{\alpha}\cdot\vec{e}_{\beta}=\delta_{\beta}^{\alpha}\Leftrightarrow\{\left(V^{T}V\right)^{-1}V^{T}\}V=\mathbf{1}_{n\times n}$$

这里的$n\times N$矩阵$\{\left(V^{T}V\right)^{-1}V^{T}\}$，是$N\times n$矩阵$V$的广义逆（Penrose 逆、伪逆、左逆）。

例 Kronecker 符号是复合张量，

$$\Lambda_{\mu}^{\alpha}\overline{\Lambda}_{\beta}^{\nu}\delta_{\nu}^{\mu}=\Lambda_{\mu}^{\alpha}\overline{\Lambda}_{\beta}^{\mu}=\delta_{\beta}^{\alpha}$$

4. 张量密度

Levi-Civita 符号在坐标变换时，

$$\left.\begin{array}{r}\varepsilon_{\alpha_{1}\alpha_{2}\cdots\alpha_{n}}\rightarrow\varepsilon'_{\alpha_{1}\alpha_{2}\cdots\alpha_{n}}\equiv\varepsilon_{\alpha_{1}\alpha_{2}\cdots\alpha_{n}}\\ \overline{\Lambda}_{\alpha_{1}}^{\beta_{1}}\overline{\Lambda}_{\alpha_{2}}^{\beta_{2}}\cdots\overline{\Lambda}_{\alpha_{n}}^{\beta_{n}}\varepsilon_{\beta_{1}\beta_{2}\cdots\beta_{n}}=(\det\Lambda)^{-1}\varepsilon_{\alpha_{1}\alpha_{2}\cdots\alpha_{n}}\end{array}\right\}\Longrightarrow\varepsilon'_{\alpha_{1}\alpha_{2}\cdots\alpha_{n}}=(\det\Lambda)^{+1}\overline{\Lambda}_{\alpha_{1}}^{\beta_{1}}\overline{\Lambda}_{\alpha_{2}}^{\beta_{2}}\cdots\overline{\Lambda}_{\alpha_{n}}^{\beta_{n}}\varepsilon_{\beta_{1}\beta_{2}\cdots\beta_{n}}$$

$$\varepsilon'^{\alpha_{1}\alpha_{2}\cdots\alpha_{n}}=(\det\Lambda)^{-1}\Lambda_{\beta_{1}}^{\alpha_{1}}\Lambda_{\beta_{2}}^{\alpha_{2}}\cdots\Lambda_{\beta_{n}}^{\alpha_{n}}\varepsilon^{\beta_{1}\beta_{2}\cdots\beta_{n}}$$

当

$$\det\Lambda\neq1$$

时，不符合张量的定义，相差雅可比行列式$(\det\Lambda)^{w}$，称为**张量密度**。w称为张量密度的**权重**。

度规矩阵的行列式

$$\det g=\det\left(g_{\mu\nu}\right)$$

也不是标量，

$$g'_{\mu\nu}=\overline{\Lambda}_{\mu}^{\alpha}\overline{\Lambda}_{\nu}^{\beta}g_{\alpha\beta}$$

$$g'=\overline{\Lambda}^{T}g\overline{\Lambda}$$

$$\det g'=(\det\Lambda)^{-2}\det g$$

是权重为(-2)的张量密度。

因此在黎曼几何中，广义协变的 **Levi-Civita 张量**应该定义为

$$\epsilon_{\alpha_{1}\alpha_{2}\cdots\alpha_{n}}\overset{\text{def}}{=}\sqrt{\det g}\,\varepsilon_{\alpha_{1}\alpha_{2}\cdots\alpha_{n}}$$

$$\epsilon^{\alpha_{1}\alpha_{2}\cdots\alpha_{n}}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{\det g}}\varepsilon^{\alpha_{1}\alpha_{2}\cdots\alpha_{n}}$$

两个矢量的叉乘

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\overset{\text{def}}{=}u^{\alpha_{1}}v^{\alpha_{2}}\epsilon_{\alpha_{1}\alpha_{2}\cdots\alpha_{N}}\boldsymbol{e}^{\alpha_{3}}\boldsymbol{e}^{\alpha_{4}}\cdots\boldsymbol{e}^{\alpha_{n}}=\sqrt{\det g}\,u^{\alpha_{1}}\epsilon_{\alpha_{1}\alpha_{2}\cdots\alpha_{N}}\boldsymbol{e}^{\alpha_{3}}\boldsymbol{e}^{\alpha_{4}}\cdots\boldsymbol{e}^{\alpha_{n}}$$

体积元

$$d\xi'^1 d\xi'^2 \cdots d\xi'^N = \det\Lambda\, d\xi^1 d\xi^2 \cdots d\xi^n$$

权重为 1，故标量体积元定义为

$$\sqrt{\det g}\, d\xi^1 d\xi^2 \cdots d\xi^n$$

有向面积

$$\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} d\xi^{\alpha_1} d\xi^{\alpha_2} = \sqrt{\det g}\, \varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} d\xi^{\alpha_1} d\xi^{\alpha_2}$$

5. 协变导数*

(1)联络

矢量场$\boldsymbol{v}$在两个点的差是坐标参数变换的不变量，

$$d\boldsymbol{v} = d\left(v^\beta \boldsymbol{e}_\beta\right) = \left\{\left(\partial_\alpha v^\beta\right)\boldsymbol{e}_\beta + v^\beta\left(\partial_\beta \boldsymbol{e}_\alpha\right)\right\} d\xi^\alpha$$

利用投影算符

$$\boldsymbol{P} \overset{\text{def}}{=} g^{\mu\nu}\boldsymbol{e}_\mu \boldsymbol{e}_\nu = \boldsymbol{e}^\lambda \boldsymbol{e}_\lambda$$

从嵌入的欧几里得空间投影到流形的切空间，

$$d\boldsymbol{v} = d\xi^\beta\left\{\left(\partial_\beta v^\alpha\right)\boldsymbol{e}_\alpha + v^\alpha\left(\partial_\beta \boldsymbol{e}_\alpha\right)\cdot \boldsymbol{e}^\lambda \boldsymbol{e}_\lambda + v^\alpha\left(\partial_\beta \boldsymbol{e}_\alpha\right)\cdot\left(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{e}^\lambda \boldsymbol{e}_\lambda\right)\right\}$$

定义 **Christoffel 联络**

$$\Gamma^{\lambda}_{\cdot\,\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \left(\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta\right)\cdot \boldsymbol{e}^\lambda$$

以及

$$H^\sigma_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \left(\partial_\beta \boldsymbol{e}_\alpha\right)\cdot \boldsymbol{e}^{\perp\sigma}$$

其中$\boldsymbol{e}^\perp_\sigma$是正交补空间的基矢，

$$\boldsymbol{e}^\perp_\sigma = \left(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{e}^\lambda \boldsymbol{e}_\lambda\right)\cdot \boldsymbol{e}^\perp_\sigma$$

则

$$\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \Gamma^{\lambda}_{\cdot\,\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\lambda + H^\sigma_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}^\perp_\sigma$$

$$d\boldsymbol{v} = \left\{\left(\partial_\alpha v^\beta\right)\boldsymbol{e}_\beta + v^\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\lambda + v^\beta H^\sigma_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}^\perp_\sigma\right\} d\xi^\alpha$$

Christoffel 联络的两个下标是对称的，

$$\Gamma^{\lambda}_{\cdot\,\alpha\beta} = \left(\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta\right)\cdot \boldsymbol{e}^\lambda = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial\xi^\alpha \partial\xi^\beta}\cdot \boldsymbol{e}^\lambda$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\cdot\,\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\cdot\beta\alpha}$$

(2)协变导数

如果

$$H^\sigma_{\alpha\beta} = 0$$

那么

$$\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \Gamma^{\lambda}_{\cdot\,\alpha\beta}\boldsymbol{e}_\lambda$$

$$d\boldsymbol{v} = \left\{\left(\partial_\alpha v^\beta\right) + v^\lambda \Gamma^{\beta}_{\cdot\,\alpha\lambda}\right\}\boldsymbol{e}_\beta d\xi^\alpha$$

可见$\partial_\alpha v^\beta$与$\Gamma^{\lambda}_{\cdot\,\alpha\beta}$都不是张量，但这时

$$\partial_\alpha v^\beta + \Gamma^{\beta}_{\cdot\alpha\lambda} v^\lambda$$

是张量。因此定义协变导数

$$\nabla_\alpha v^\beta \overset{\text{def}}{=} v^\beta_{;\alpha} = \partial_\alpha v^\beta + \Gamma^{\beta}_{\cdot\alpha\lambda} v^\lambda$$

有

$$\nabla_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = 0$$

$$\nabla_\alpha v_\beta \equiv v_{\beta;\alpha} = \partial_\alpha v_\beta - \Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} v_\lambda$$

对二阶张量可得

$$\nabla_\alpha T^{\beta\gamma} \equiv \partial_\alpha T^{\beta\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\cdot\alpha\lambda} T^{\lambda\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\cdot\alpha\lambda} T^{\beta\lambda}$$

零阶张量

$$\nabla_\alpha f \equiv \partial_\alpha f$$

(3)联络的表达式

记

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^{\lambda}_{\cdot\beta\gamma} g_{\lambda\alpha} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \left(\partial_\beta \boldsymbol{e}_\gamma\right)$$

可得

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha\left(\boldsymbol{e}_\beta \cdot \boldsymbol{e}_\gamma\right)$$
$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \Gamma_{\gamma\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} ①$$
$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} ②$$
$$\partial_\beta g_{\gamma\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\gamma\beta\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\gamma\alpha\beta} ③$$

② + ③ − ①，得

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(-\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha}\right)$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\gamma}\left(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}\right)$$

例 曲线坐标系的牛顿方程

使用广义坐标表示质点的位移，

$$\vec{r} = \vec{r}\left(q^1(t), q^2(t), \cdots, q^n(t)\right)$$

则自然基为

$$\boldsymbol{e}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial r^i}{\partial q^\alpha} \tilde{\boldsymbol{e}}_i$$

度规为

$$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = \frac{\partial r^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial r^j}{\partial q^\alpha} \delta_{ij}$$

质点的速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr^i}{dt} \boldsymbol{e}_i = \dot{q}^\alpha \frac{\partial r^i}{\partial q^\alpha} \tilde{\boldsymbol{e}}_i = \dot{q}^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$$

加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\dot{q}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}=\ddot{q}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}+\dot{q}^{\alpha}\frac{d\boldsymbol{e}_{\alpha}}{dt}=\ddot{q}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}+\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\frac{\partial\boldsymbol{e}_{\alpha}}{\partial q^{\beta}}=\ddot{q}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}+\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta}\boldsymbol{e}_{\lambda}$$

$$a^{\mu}=\ddot{q}^{\mu}+\Gamma^{\mu}_{\cdot\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$$

得运动方程

$$F^{\mu}=m\left(\ddot{q}^{\mu}+\Gamma^{\mu}_{\cdot\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\right)$$

如果是保守力，

$$V=V(q)$$

$$F^{\mu}=g^{\mu\nu}F_{\nu}=-g^{\mu\nu}\frac{\partial V}{\partial q^{\nu}}$$

$$m\left(\ddot{q}^{\mu}+\Gamma^{\mu}_{\cdot\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\right)+g^{\mu\nu}\frac{\partial V}{\partial q^{\nu}}=0$$

练习 $\nabla_{\alpha}g^{\mu\nu}=?$ $\nabla_{\alpha}A^{\mu}B^{\nu}=?$ $\nabla_{\alpha}\boldsymbol{e}^{\beta}=?$

6. 曲率张量*

(1)黎曼曲率张量

计算得

$$\left(\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}-\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\right)A^{\mu}=R_{\alpha\beta\nu}{}^{\mu}A^{\nu}$$

黎曼曲率张量为

$$R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}=\partial_{\alpha}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu}-\partial_{\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}+\Gamma^{\nu}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu}-\Gamma^{\nu}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\mu}$$
$$R_{\alpha\beta\mu\nu}\stackrel{\text{def}}{=}g_{\nu\gamma}R_{\alpha\beta\mu}{}^{\gamma}$$

(2)曲率张量的对称性

指标的交换对称性

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=R_{\mu\nu\alpha\beta}=-R_{\beta\alpha\mu\nu}$$

Bianchi 第一恒等式

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}+R_{\alpha\nu\beta\mu}+R_{\alpha\mu\nu\beta}=0$$

Bianchi 第二恒等式

$$\nabla_{\gamma}R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}\nabla_{\alpha}R_{\beta\gamma\mu}{}^{\nu}++\nabla_{\beta}R_{\gamma\alpha\mu}{}^{\nu}+\nabla_{\gamma}R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}=0$$

Ricci 张量

$$R_{\beta\mu}\stackrel{\text{def}}{=}g^{\alpha\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

曲率标量

$$R \overset{\text{def}}{=} g^{\beta\mu}R_{\beta\mu} = g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

(3)例子

例 三维 Euclid 空间球坐标参数，

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

自然基对应的标架场

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

度规张量场

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det g} = r^2\sin\theta$$

体积元

$$dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

逆变度规张量

$$\left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

非零的导数项

$$\partial_1 g_{22} = 2r, \qquad \partial_1 g_{33} = 2r\sin^2\theta\,, \qquad \partial_2 g_{33} = r^2\sin 2\theta$$

联络的非零分量

$$\Gamma_{122} = -r, \qquad \Gamma_{133} = -r\sin^2\theta$$

$$\Gamma_{212} = r, \qquad \Gamma_{221} = r, \qquad \Gamma_{233} = -\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta$$

$$\Gamma_{313} = r\sin^2\theta\,, \qquad \Gamma_{323} = \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta\,, \qquad \Gamma_{331} = r\sin^2\theta\,, \qquad \Gamma_{332} = \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta$$

黎曼曲率分量$R_{ijkl} = 0$。

7. 梯度、散度和旋度*

标量场的微分的意义两个点处的数值差，不依赖于坐标架，

$$df = \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\beta = \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} \boldsymbol{e}^\alpha \cdot d\xi^\beta \boldsymbol{e}_\beta$$

所以梯度为

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$$

矢量的散度

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \nabla_\alpha v^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_\alpha \sqrt{\det g}\, v^\alpha$$

Laplace 算符

$$\nabla^2 f = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_\alpha \sqrt{\det g}\, \partial^\alpha f$$

矢量的旋度（三维空间）

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = \epsilon^{ijk} \left(\nabla_i v_j\right) \boldsymbol{e}_k = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \varepsilon^{ijk} \left(\nabla_i v_j\right) \boldsymbol{e}_k$$

练习 计算

$$\frac{1}{\sqrt{\det g}} \left(\partial_\alpha \sqrt{\det g}\right)$$

提示：利用行列式的微分公式

$$(\det A)\boldsymbol{1} = A \operatorname{adj}^{\mathrm{T}}(A) = \operatorname{adj}(A)\, A^T \Longrightarrow$$
$$d(\det \mathrm{A}) = (\det \mathrm{A}) \operatorname{tr}(\mathrm{A}^{-1} \mathrm{dA})$$

四、 微分形式[2]

1. 外代数

(1) 叉乘表示为外积

两个矢量的叉乘

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

表示以矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为边的平行四边形的有向面积，对两个矢量交换反对称，可以表示成“外积”，

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}) = a^i b^j \left(\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i\right) \stackrel{\text{def}}{=} a^i b^j \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j$$

反对称张量有重要的几何意义，为此数学家专门引进外积和外矢量的概念。

[2] 可参考陈省身、陈维恒《微分几何讲义》。

(2) 反对称算子

对m个指标$Z=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，定义反对称化算子

$$\hat{A}_m\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m!}\sum_{\hat{\sigma}\in S_m} \operatorname{sng}\hat{\sigma}\cdot\hat{\sigma}\alpha$$

其中S_m是集合Z的所有元素置换，

$$\operatorname{sng}\hat{\sigma} = \begin{cases} +1, & \hat{\sigma}\text{是奇置换;} \\ -1, & \hat{\sigma}\text{是偶置换.} \end{cases}$$

(3) 外矢量

高次外矢量可以递归定义。k次外矢量

$$\xi = \xi^{i_1 i_2\cdots i_k}\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_k}$$

与l次外矢量

$$\eta = \eta^{j_1 j_2\cdots j_l}\boldsymbol{e}_{j_1}\wedge\boldsymbol{e}_{j_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j_l}$$

的**外积**（exterior product, wedge, Hermann Grassmann）为

$$\xi\wedge\eta \overset{\text{def}}{=} \xi^{i_1 i_2\cdots i_k}\eta^{j_1 j_2\cdots j_l}\frac{(k+l)!}{k!\,l!}\hat{A}_{k+l}\left(\left(\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_k}\right)\otimes\left(\boldsymbol{e}_{j_1}\wedge\boldsymbol{e}_{j_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j_l}\right)\right)$$

按此定义，我们先计算基矢的外积，

$$\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i$$

三个基矢的外积为

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\right)\wedge\boldsymbol{e}_k &= \frac{3!}{2!\,1!}\hat{A}_3\left(\left(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i\right)\otimes\boldsymbol{e}_k\right) = \frac{3!}{2!\,1!}2!\,\hat{A}_3\left(\left(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\right)\otimes\boldsymbol{e}_k\right) = 3!\,\hat{A}_3\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k \\ &= \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k+\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k-\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i\end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\right)\wedge\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i\wedge\left(\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k\right)}$$

满足结合律，可记作$\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k$。

一般地，

$$\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_k} \overset{\text{def}}{=} k!\,\hat{A}_k\boldsymbol{e}_{j_1}\boldsymbol{e}_{j_2}\cdots\boldsymbol{e}_{j_k} = \sum_{\hat{\sigma}\in S_k}\operatorname{sng}\hat{\sigma}\cdot\hat{\sigma}\boldsymbol{e}_{j_1}\boldsymbol{e}_{j_2}\cdots\boldsymbol{e}_{j_k} = \delta^{j_1 j_2\cdots j_k}_{i_1 i_2\cdots i_k}\boldsymbol{e}_{j_1}\boldsymbol{e}_{j_2}\cdots\boldsymbol{e}_{j_k}$$

其中广义 Kronecker 符号为

$$\delta^{i_1 i_2\cdots i_k}_{j_1 j_2\cdots j_k} = \begin{cases} +1, & (j_1,j_2,\cdots,j_k)\text{是}(i_1,i_2,\cdots,i_k)\text{的偶排列;} \\ -1, & (j_1,j_2,\cdots,j_k)\text{是}(i_1,i_2,\cdots,i_k)\text{的奇排列;} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

满足性质[3]（n是线性空间的维数）

$$\delta^{i_1 i_2\cdots i_k l}_{j_1 j_2\cdots j_k l} \equiv (n-k)\delta^{i_1 i_2\cdots i_k}_{j_1 j_2\cdots j_k}$$

$$\delta^{i_1 i_2\cdots i_n}_{j_1 j_2\cdots j_n} = \varepsilon^{i_1 i_2\cdots i_n}\varepsilon_{j_1 j_2\cdots j_n}$$

[3] $i_1,i_2,\cdots,i_k$确定后，l有$n-k$种取法。

(4) 性质

外积满足（证明略）

❶分配律：

$$(\xi_1+\xi_2)\wedge\eta=\xi_1\wedge\eta+\xi_2\wedge\eta$$

❷交换律：

$$\xi\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\xi$$

❸结合律：

$$(\xi\wedge\eta)\wedge\zeta=\xi\wedge(\eta\wedge\zeta)$$

两个外矢量的外积为

$$\begin{aligned}\xi\wedge\eta&=\left(\xi^{i_1i_2\cdots i_k}\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_k}\right)\wedge\left(\eta^{i_1i_2\cdots i_l}\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_l}\right)\\&=\xi^{i_1i_2\cdots i_k}\eta^{i_{k+1}i_{k+2}\cdots i_{k+l}}\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_{k+l}}\end{aligned}$$

由于反对称性，在三维空间中，外矢量最低为零次，最高为 3 次。

例 两个矢量的外积

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=a^ib^j\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j=a^ib^j\left(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i\right)=\left(a^ib^j-a^jb^i\right)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

三个矢量的外积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}&=a^ib^jc^k\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k\\&=\left(a^ib^jc^k+a^jb^kc^i+a^kb^ic^j-a^ib^kc^j-a^jb^ic^k-a^kb^jc^i\right)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\end{aligned}$$

(5) 应用：相关性判别[4]

定理 矢量$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k$线性相关的充要条件是

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_k=0$$

证明 若这组矢量线性相关，不妨设ω_k是$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{k-1}$的线性组合，则必有

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_k=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_k\wedge(\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2\cdots+\alpha_k\omega_k)=0$$

反之，设这组矢量线性无关，则可以扩充成n维空间的完备基$\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k,\omega_{k+1},\cdots,\omega_n\}$，由于

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n\neq0$$

所以

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_k\neq0$$

2. 微分形式

(1) 1-形式

嘉当（E. Cartan）为了推广微分，把dx^i看成是沿着自然基方向、长度为dx^i的矢量，称为**微分 1-形式**。

矢量场可以表示 1-形式，

$$V_idx^i$$

这里dx^i是 1-形式的基。

(2) 2-形式

[4] 也可以用消元法判别独立性和计算方程组的秩。

1-形式的外积为微分 2-形式（differential 2-form），

$$dx^i \wedge dx^j$$

是 2-形式的一组基。

二阶反对称张量场可以表示为 2-形式，

$$T_{ij}\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \to T_{ij}dx^i \otimes dx^j = \frac{1}{2!}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)dx^i \otimes dx^j = \frac{1}{2!}T_{ij}\left(dx^i \otimes dx^j - dx^i \otimes dx^j\right)$$

$$= \frac{1}{2!}T_{jk}dx^i \wedge dx^j$$

(3)　k次形式

一个k阶全反对称张量可以写成

$$T = \frac{1}{k!}T_{i_1 i_2 \cdots i_k}dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

在n维流形上，可以定义 0-形式（标量），1-形式，……，n-形式，更高阶的微分形式为零。

(4)　例

在三维流形直角坐标系，两个 1-形式的外积

$$\left(a_x dx + a_y dy + a_z dz\right) \wedge \left(b_x dx + b_y dy + b_z dz\right)$$
$$= \left(a_x b_y - a_y b_x\right)dx \wedge dy + \left(a_y b_z - a_z b_y\right)dy \wedge dz + (a_z b_x - a_x b_z)dz \wedge dx$$

实为两个矢量的叉乘。

三个 1-形式的外积，

$$\left(a_x dx + a_y dy + a_z dz\right) \wedge \left(b_x dx + b_y dy + b_z dz\right) \wedge \left(c_x dx + c_y dy + c_z dz\right)$$
$$= \left\{\left(a_x b_y - a_y b_x\right)c_z + \left(a_y b_z - a_z b_y\right)c_x + (a_z b_x - a_x b_z)c_y\right\}dx \wedge dy \wedge dz$$
$$= \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\,dx \wedge dy \wedge dz$$

是混合积。

3. 外微分

(1)　外微分

外微分d（exterior derivative, exterior differential）把k次微分形式映射为$k+1$次微分形式，满足

❶0-形式$f(x)$的外微分即梯度，

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

❷线性：对任意两个微分形式ω_1, ω_2有

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$$

❸设ω_1是r次外微分式，则

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2$$

❹0-形式$f(x)$的 2 次外微分为零，

$$d(df) = 0 \Leftrightarrow d\left(dx^i\right) = 0$$

注意第四条性质，与微积分中$d^2 f(x)$一般不为零不同，

$$d(df)=d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\right)=d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\wedge dx^i+\frac{\partial f}{\partial x^i}d\left(dx^i\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}dx^j\wedge dx^i=0$$

例 矢量场可写成 1-形式，

$$A=A_i dx^i$$

它的外微分

$$dA=\partial_j A_i dx^j\wedge dx^i$$

在三维空间，

$$\partial_j A_i dx^j\wedge dx^i=\left(\partial_x A_y-\partial_y A_x\right)dx\wedge dy+\left(\partial_y A_z-\partial_z A_y\right)dy\wedge dz+(\partial_z A_x-\partial_x A_z)dz\wedge dx$$

是矢量的旋度。

(2) 对偶

例 对微分 2-形式

$$F=\frac{1}{2!}F_{ij}dx^i\wedge dx^j$$

求外微分，

$$dF=\frac{1}{2!}\left(dF_{ij}\right)\wedge\left(dx^i\wedge dx^j\right)=\frac{1}{2!}\left(\partial_k F_{ij}dx^k\right)\wedge\left(dx^i\wedge dx^j\right)=\frac{1}{2!}\partial_k F_{ij}dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k$$

在三维空间，

$$\frac{1}{2!}\partial_k F_{ij}dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k=\frac{1}{2}(\partial_1 F_{23}+\partial_2 F_{31}+\partial_3 F_{12}-\partial_1 F_{32}-\partial_2 F_{13}-\partial_3 F_{21})dx\wedge dy\wedge dz$$

利用张量的反对称性

$$F_{ij}=-F_{ji}$$

化简得

$$dF=(\partial_1 F_{23}+\partial_2 F_{31}+\partial_3 F_{12})dx\wedge dy\wedge dz$$

我们来看这有什么几何意义。由于

$$\begin{aligned}F=\frac{1}{2!}F_{ij}dx^i\wedge dx^j&=\frac{1}{2}(F_{12}-F_{21})dx\wedge dy+\frac{1}{2}(F_{23}-F_{32})dy\wedge dz+\frac{1}{2}(F_{31}-F_{13})dz\wedge dx\\&=F_{12}dx\wedge dy+F_{23}dy\wedge dz+F_{31}dz\wedge dx\end{aligned}$$

定义**星映射**（Hodge star operator）

$$B_i=(*F)_i\stackrel{\text{def}}{=}\varepsilon^{jk}{}_i F_{jk}$$

为它的对偶（F dual）

$$B_1=\frac{1}{2!}(F_{23}-F_{32}),\qquad B_2=\frac{1}{2!}(F_{31}-F_{13}),\qquad B_3=\frac{1}{2!}(F_{12}-F_{21})$$

那么

$$\frac{1}{2!}F_{ij}dx^i\wedge dx^j=B_1 dx\wedge dy+B_2 dy\wedge dz+B_3 dz\wedge dx$$

则

$$dF=\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

是矢量场

$$B=B_i dx^i$$
的散度。

例 二维空间中的映射$p(x,y),q(x,y)$，其外微分的外积

$$dp\wedge dq=\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy\right)\wedge\left(\frac{\partial q}{\partial x}dx+\frac{\partial q}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial p}{\partial x}dx\wedge\frac{\partial q}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial y}dy\wedge\frac{\partial p}{\partial x}dx$$
$$=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right)dx\wedge dy=\frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)}dx\wedge dy$$

霍奇对偶 Hodge duality

$$(*\,\xi)_{i_1i_2\cdots i_{n-k}}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{k!}\epsilon^{j_1j_2\cdots j_k}{}_{i_1i_2\cdots i_{n-k}}\xi_{j_1j_2\cdots j_k}$$
$$**\,\xi\equiv(\operatorname{sgn}\det g)(-1)^{k(n-k)}\xi$$
三维空间
$$*\,(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\qquad *\,(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$$
$$*\,\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

(3) 庞加莱引理

定理 （Poincaré）
$$d^2=0$$
即对任意微分形式ω，
$$d(d\omega)=0$$
证明 设
$$\omega=f_{i_1i_2\cdots i_r}(x)dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$
则
$$d\omega=\frac{\partial f_{i_1i_2\cdots i_r}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$
$$d^2\omega=\frac{\partial^2 f_{i_1i_2\cdots i_r}}{\partial x^j\partial x^k}dx^k\wedge dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$
由于求偏导可交换，而微分形式的基是反对称的，
$$d^2\omega=0$$

推论 三维空间中 0-形式满足
$$d^2f=0\Leftrightarrow\nabla\times\nabla f=\vec{0}$$
1-形式满足
$$d^2A=0\Leftrightarrow\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)=0$$

4. 可积性

定理 （弗罗本尼斯 Frobenius 可积性条件）一次微分形式ω（法夫 Pfaff 形式）可积的充要条件是
$$\omega\wedge d\omega=0.$$
（其中流形维数需大于或等于 3）

定理 如果$\Omega \overset{\text{def}}{=} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k \neq 0$，则法夫形式$\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k\}$构成完全可积组的充要条件是[5]

$$\Omega \wedge d\omega_j = 0, \qquad j = 1,2,\cdots,k.$$

（其中流形维数n需大于或等于k+2）

证明略。Frobenius 定理考虑了在方程组前乘以积分因子之后可积的情况。

推论：三个自由度的情形

$$\omega = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

可积条件为

$$\omega \wedge d\omega = \vec{F} \cdot \left(\nabla \times \vec{F}\right) dx \wedge dy \wedge dz = 0$$

$$\vec{F} \cdot \left(\nabla \times \vec{F}\right) = 0$$

5. Stokes 公式*

设D是m维定向流形M中的带边区域，ω是M上有紧致支集的$m-1$次外微分式，则

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

其中若$\partial D = \emptyset$，则规定右边的积分为零。

高等数学中的 Stokes 定理和高斯散度定理是这个定理的特例。

[5] 陈省身、陈维恒，《微分几何讲义》p229