三、解析函数之积分表示

定理1：$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int f(z(t))z'(t)dt$

$\cancel{\int_{|z-a|=R} \frac{dz}{(z-a)^n} = 2\pi i\,\delta_{n1}\; i(\beta-\alpha)\delta_{n1}}$ $\int_{|z-a|=R} \frac{dz}{(z-a)^n} = 2\pi i\,\delta_{n1}$

$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)||dz|$

定理2：$\int_C f(z)dz = 0$ ，$C+D$ 解析，D是C所围单连通区域

定理3：$\int_{C_a} f(z)dz = 0$ C+所围多连通区域解析

$\int_C f(z)dz = 0$ $C+D$ 解析

$\int_{C:包围a} \frac{dz}{(z-a)^n} = 2\pi i\,\delta_{n1}$

定理4：$f(z)$ 在单域D解析，$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$ 亦解析 $F'(z)=f(z)$ ~~只需C上连续，F(z)即解析~~

定理5：$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$，~~C包围z~~，$C+D$ 解析，$z\in D$

定理6：$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$，$C+D$ 解析，$z\in D$

平均值公式：$f(a) = \frac{1}{2\pi R}\int_{|z-a|=R} f(\zeta)ds$ ：C+D 解析

最大模原理：~~如果~~ $|f(z)|$ 最大值只能在边界C取到，~~D连续~~ 解析，C连续 $f(z)=\text{const}$

柯西不等式：$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!M(R)}{R^n}$ ：D解析，$M(R)$ 为 $|\zeta - z| = R$ 上最大值

定理7：~~整函数在全平面有界，如果~~
$|f(z)| \le M$，$f(z) = \text{const}$

代数学基本定理：复系数多项式 $f(z)=0$ 有根，它可以分解成n个一次因式的乘积

定理8：~~f(z)~~ D内连续，$\int_C f(z)dz = 0$ $C\in D$，那么D解析

定理9：单D解析 $\Leftrightarrow$ $\bar{D}$连续，$\forall C \in D$，$\int_C f(z)dz = 0$

$\lim_{z\to\infty} zf(z) = A$，D连续 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R:|z|=R} f(z)dz = iA\alpha$ $(C_R \in I)$

、调和函数

定理1：f在D解析，Ref，Imf 共轭调和

定理2：f解析，$f' \neq 0$，那么 $u=k_1$，$v=k_2$ 在交点正交

定理3：u在单D调和，$v=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C_2$

使f解析

定理4：$u(z_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_{C:|z-z_0|=R} u(z)ds$ C+D调和

定理5：D调和，C连续，$u \neq const$，那么u只在C上取最值

定理6：$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$ ~~C+D调和，z∈D~~

$|z-z_0|\leq R$ 内调和。

定理7：u_1，u_2 在D调和，C+D连续，u_1 u_2在C上相差不超过 ε

那么在D上 $|u_1(z)-u_2(z)|\leq\varepsilon$.

三、级数展开

定理1：$\sum z_n \to s$ 的充要条件是 $\sum a_n \to a$，$\sum b_n \to b$

定理2：$\sum z_n \to s \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)>0$，s.t. $n\geq N$，$p\in N^+$，$|z_{n+1}+\dots+z_{n+p}|<\varepsilon$

定理3：$\sum|z_n|$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\sum|a_n|$，$\sum|b_n|$ 收敛

定理4：1' 绝对收敛的复数项级数重排，仍绝对收敛

2' 两绝对收敛的 $\sum z_n'=A$，$\sum z_n''=B$，则 $z_n = z_1'z_n''+\dots+z_n'z_1''$

$\sum z_n \to AB$

定理5：$\sum f_n(z)$ 在E上一致收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$，s.t. $n>N$，$\forall z\in E$，$p\in N^+$

$|f_{n+1}(z)+\dots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon$

如果 $\forall z\in E$，$|f_n(z)|\leq M_n$，$\sum M_n$ 收敛，则$\sum f_n(z)$在E一致收敛

$f_n(z)$ 在D连续，$\sum f_n(z)$ 在D一致收敛于 $f(z)$，则 $f(z)$ 在D连续

定理6：$f_n(z)$ 在C连续，$\sum f_n(z)$ 在C一致收敛于 $f(z)$，则 $\int_C f(z)dz=\sum\int_C f_n(z)dz$

定理7：$f_n(z)$ 在C连续，$\sum f_n(z)$

定理8：$f_n(z)$在D解析，$\sum f_n(z)$在D一致收敛，则$f^{(p)}(z)=\sum f_n^{(p)}(z)$

定理9：1) 如果$\sum a_n(z-a)^n$在z_0 ($\neq a$) 收敛，则在$|z-a|<|z_0-a|$绝对收敛

2) 在1)，在$|z-a|\leq \rho<|z_0-a|$一致收敛

3) 如果$\sum a_n(z-a)^n$在z_1发散，则在$|z-a|>|z_1-a|$发散

定理10：设 ~~$\sum a_n(z-a)^n$~~ 收敛半径为R，

1) 如果$0<R<\infty$，则在$|z-a|<R$绝对收敛，在$|z-a|>R$发散

2) $R=+\infty$，全平面收敛

3) $R=0$，全平面$|z=a$发散

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r$，$R=1/r$

定理11：设$\sum a_n(z-a)^n$收敛半径$R>0$

1) $f(z)=\sum a_n(z-a)^n$在$|z-a|<R$解析，可逐项求导

2) $a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$

定理12：设函数$f(z)$在a解析，在以a为心，直至解析边界点的圆域内，

$f(z)=\sum a_n(z-a)^n$，$a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

$f(z)$在任一解析点的泰勒展式是唯一存在的

幂级数就是和函数在收敛圆内的泰勒展式

定理13：$f(z)$在D解析 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在D内任一点a可以展成幂级数

定理14：z_0是$f(z)$ m阶零点 $\Leftrightarrow$ $f(z_0)=\dots=f^{(m-1)}(z_0)=0$，$f^{(m)}(z_0)\neq 0$

定理15：z_0是$f(z)$ m阶零点（$f(z)\neq 0$）$\Leftrightarrow$ z_0附近$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$

$g(z)$解析，$g(z_0)\neq 0$

定理16：$f(z)$在z_0解析，且z_0是零点，那么$f(z)$在z_0邻域恒等于0，或者存在一个邻域使z_0是唯一零点。

定理17：$f(z)$在$r<|z-a|<R$解析，那么$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$，$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$

定理18：a是$f(z)$孤立奇点，a是可去奇点 $\Leftrightarrow$ $\exists \rho>0$，$0<|z-a|<\rho$ 内有界

a是孤立奇点，a是可去奇点 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to a} f(z)=a_0$ 有限

定理19：a孤立，a为m本及点 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在某去心域 $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$，$\varphi(z)$

在a解析，$\varphi(a)\neq 0$ $\Leftrightarrow$ a是$g(z)=1/f(z)$的m零点。

a孤奇，a为极点 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$

定理20：a为本性奇点 $\Leftrightarrow$ 不存在(有限)极限 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$

六、留数

定理1. $f(z)$在C解析，D除孤立奇$a_1,\dots,a_n$解析

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum \operatorname{Res}[f(z),a_i]$$

定理2：$\operatorname{Res}[f(z),a]=a_{-1}$

a是$f(z)$的m极点，$\operatorname{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$

$P(z)$、$Q(z)$在a解析，$P(a)\neq 0$、$Q(a)=0$，$Q'(a)\neq 0$，那么

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a\right]=\frac{P(a)}{Q'(a)}$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta \xrightarrow{z=e^{i\theta}} \int_C R\left[\tfrac{1}{2}(z+\tfrac{1}{z}),\tfrac{1}{2i}(z-\tfrac{1}{z})\right]\frac{dz}{iz}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[R(z),a_k]$　$R(x)$有理，无零点，至少x^{-2}

引理1：$C_R: z=Re^{i\theta}$，$\alpha\le\theta\le\beta$，$f(z)$连续，$\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$，则$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$

引理2：$C_\rho: z=a+\rho e^{i\theta}$，$\alpha\le\theta\le\beta$，$f(z)$连续，$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$，则$\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)dz$

$=i(\beta-\alpha)k$

~~设a是$f(z)$~~

引理3：$C_R: |z|=R$，$\operatorname{Im}z>-a$，$g(z)$连续，$\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$，则$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)\exp(imz)dz=0$

$P.\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{imx}dx=2\pi i\sum \operatorname{Res}[R(z)e^{imz},a_k]+\pi i\sum\operatorname{Res}[\cdots,x_k]$

$R(x)$有理，至少x^{-1}，$R(z)$在实轴只有单极点x_k，在上平面有孤立奇点a_k。

定理3：设 a、b 分别为 $f(z)$ 的 m 级、n 级零点，则 a、b 都是 $f'(z)/f(z)$ 的一级极点，且 $Res[f'/f, a]=m$，$Res[f'/f, b]=-n$.

定理4：$f(z)$ 在 C 内有有限数多个极点，此外解析，且 C 上无零点，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N-P$$

定理5：在4条件，$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$

定理6：$f(z)$ 及 $\varphi(z)$ 在 C+D 解析，C 上有 $|f(z)|>|\varphi(z)|$，则 D 上 $f(z)+\varphi(z)$ 和 $f(z)$ 零点个数相等.

定理7：多项式 $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n$ 在虚轴上无零点，

若 $\Delta_{y(-\infty,+\infty)} \arg P(iy)=2k\pi$，则左半平面有 $\frac{n+k}{2}$ 个零点.

七、解析开拓

定理1：D 内两解析 $f(z)$、$g(z)$ 在 $\{a_n\}$ 上值相等，且 $a_n \to a \in D$，则 $f(z)\equiv g(z)$

f、g 在 D 解析，在 $l\in D$ 上相等，则 D 上相等

在实轴上 $f(x)\equiv g(x)$，$f(z)$、$g(z)$ 全平面解析，则 $f(z)\equiv g(z)$.

定理2：C 是平面上一条逐段光滑的有限长曲线，$f(\zeta)$ 在 C 连续.

$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$，$z\notin C$ 是解析函数，且 $F^{(n)}(z)$

$=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$

定理3：$f(t,z)$ 是 t、z 的连续函数，$a\le t\le b$、$z\in D$，$\forall t$，$f(t,z)$ 在 D 解析，则 $F(z)=\int_a^b f(t,z)dt$ 在 D 解析，且 $F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}dt$.

定理4：如果实函数 $\varphi(t)$，$\forall z\in D$ 有 $|f(t,z)|\le\varphi(t)$，且 $\int_a^{+\infty}\varphi(t)dt$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(t,z)dt$ 在 D 一致收敛

定理5：$f(t,z)$ 是 t、z 连续，$t\ge a$，$z\in D$，$f(t,z)$ 在 D 解析，$\int_a^{+\infty}f\,dt$ 在 D 一致收敛，则 $F(z)=\int_a^{+\infty}f\,dt$ 解析，$F'(z)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}dt$

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}dt \longleftarrow \mathrm{Res}[\Gamma(z),-n]=(-1)^n\frac{1}{n!}$$

1) 余元公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z$

2) 加倍公式 $\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$，$z\neq 0,-\frac{1}{2},-1,\cdots$

3) $\Gamma(z)$ 无零点 $\Gamma(n)=(n-1)!$

4) $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 是整函数

5) $\int_0^1\frac{t^{\xi-1}(1-t)^{\eta-1}}{(a+bt)^{\xi+\eta}}dt=\frac{B(\xi,\eta)}{(a+b)^{\xi}a^{\eta}}$，$\mathrm{Re}\,\xi>0$，$\mathrm{Re}\,\eta>0$

$z^s\int_0^{+\infty}e^{-zt}t^{z-1}dt=\Gamma(z)$

八、保形变换

$f(z)$ 在 D 单叶，则 $f'(z)\neq 0$，$z\in D$

定理1：D 是闭复平面上一个边界至少包含两个点的单连通区域，

黎曼定理：则必有单叶 $w=f(z)$ 将 D 变为 $|w|<1$，若要求 $z_0\in D\to w_0\in D_1$，过该点方向为已知方向，即 $f(z_0)=w_0$，$\arg f'(z_0)=\alpha_0$，则变换唯一。

定理2：$w=\frac{az+b}{cz+d}$，$ad-bc\neq 0$ 给出闭 z 平面 $\to$ 闭 w 平面

分式线性变换是平移，旋转、相似，倒数这四类的乘积

定理3：分式线性变换把圆周变为圆周

引理：z_1,z_2 关于圆周 C 对称 $\Longleftrightarrow$ 过 z_1,z_2 的圆与 C 正交

定理4：分式线性变换把对某一圆周对称的点变为对该圆周的像圆周对称的点

定理5：$\forall$ z 平面上 z_1,z_2,z_3 和 w 平面上 w_1,w_2,w_3，$\exists$ 唯一分式线性变换 $w=w(z)$ 是分式线性变换，且 $w(z_1)=w_1$，$w(z_2)=w_2$，则分式线性变换表示为 $\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}$

$\alpha < \arg z < \beta$, $[\beta-\alpha \le \frac{2\pi}{n}]$ $\xrightarrow{w=z^n}$ $n\alpha < \arg w < n\beta$

$\alpha < \arg z < \beta$ $\xrightarrow{w=\sqrt[n]{z}}$ $\frac{\alpha+2k\pi}{n} < \arg w < \frac{\beta+2k\pi}{n}$

$a < \mathrm{Im} z < b$, $b-a \le 2\pi$ $\xrightarrow{w=e^z}$ $a < \arg w < b$

$a < \arg z < b$, $b-a \le 2\pi$ $\xrightarrow{w=\mathrm{Ln} z}$ $2n\pi+a < \mathrm{Im} w < 2n\pi + b$

儒可夫斯基变换 $w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ 将单位圆内部变换为除$[-1,1]$平面，将圆内射线变换为双曲线(1/4)，同心圆族与双曲线族正交。

反函数 $z=w+\sqrt{w^2-1}$，$z=w-\sqrt{w^2-1}$ 将 D 变为 $|z|<1$，另一支变为$|z|>1$。

~~许竞变换~~

定理6：如果 $w=f(z)$ 把 $\mathrm{Im} z>0$ 变到有界多边形，此多边形在顶点 A_k 处内角 $\beta_k\pi$，$\sum\beta_k=n-2$，且对应实轴上 a_k，则

$$f(z)=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\beta_1-1}\cdots(z-a_n)^{\beta_n-1}dz+B$$

多边形有一个顶点是∞的像，可以少掉一个因子

多边形顶点在无穷远时，直线交角为有限点交角乘-1

九、拉氏变换

$$L[f(t)]=F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$$

$$L^{-1}[F(p)]=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}dp$$

条件：~~使之存在，须~~ $f(t)$ 逐段光滑，指数增长型，即$\exists K>0$，$c\ge0$，对$t\ge0$，$|f(t)|\le Ke^{ct}$

定理1：$f(t)$条件，$F(p)$在 $\mathrm{Re}\,p>C$ 解析

$$\int_0^{+\infty}|f(t)e^{-pt}|dt=\frac{K}{\sigma-C}, \quad \lim_{p\to\infty}F(p)=0$$

L、L^{-1}是线性的

相似定理：$L[f(t)]=F(p)$，$\forall\alpha>0$，$L[f(\alpha t)]=\frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha})$，$\mathrm{Re}\,p>\alpha C$

本函数的微分方法：$f(t)$，$f'(t)$条件，$L[f(t)]=F(p)$，则 $L[f'(t)]=pF(p)-f(+0)$

$$L[f^{(n)}(t)]=p^nF(p)-\sum_{0}^{n-1}p^i f^{(n-1-i)}(+0)$$

本函数的积分法：$L[f(t)]=F(p)$，$L[\int_0^t f(t)dt]=F(p)/p$

像函数的微分法：$f(t)$条件，$F'(p)=L[-tf(t)]$，$F^{(n)}(p)=L[(-t)^n f(t)]$

像函数的积分法：$f(t)$条件，$\int_p^{\infty}F(p)dp$收敛，$Re\,p>C$，$t\to 0$，$|f(t)/t|$有界，则 $L[\frac{f(t)}{t}]=\int_p^{\infty}F(p)dp$

若 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$ 存在，则 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^{+\infty}F(p)dp$

定理2　设 $L[f(t)]=F(p)$，则 $L[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}F(p)$

位移定理：$L[f(t)]=F(p)$，则 $L[e^{\lambda t}f(t)]=F(p-\lambda)$

$f(t)$在$[0,+\infty)$周期T，$f(t)$在一周期逐段光滑，则 $L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt$

卷积定理　f_1，f_2条件，$L[f_1 * f_2]=L[f_1]\cdot L[f_2]$

有理真分式函数一定存在本函数

定理3．$f(t)$条件，$L[f(t)]=F(p)$，$\forall\sigma>C$，在连续点，$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}dp$

定理4　$F(p)$除$Re\,p\le\sigma$内有奇点$p_1,\dots,p_n$外处处解析，当$p\to\infty$，$F(p)\to 0$，且 $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)dp$ 绝对收敛，则$F(p)$是 $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}dp$ 的像函数，$f(t)=\sum Res[F(p)e^{pt},p_k]$

定理5　$F(p)$在∞解析，$F(p)=\sum_1^{+\infty}\frac{C_k}{p^k}$（$\infty$邻域），则 $f(t)=\sum_1^{\infty}\frac{C_k}{(k-1)!}t^{k-1}$

~~逆定理成立~~

$L[f(t)]=F[f(t)e^{-\sigma t}]$