中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

天体力学与天体测量 2017年春季学期 2023年春 作业10%签到15%期末75%

陈达星 手机 13485694963
座机 63607175 63600181
0551
email daleccx@ustc.edu.cn

参考书 《天体力学基础》 南大 周济林
《天体测量和天体力学基础》 科学出版社 2010年

教材 《天球参考系变换及应用》 李广宇 2010 科学出版社
《天体力学基础》（试用稿） 李广宇

第一课 绪论 教材 自编讲义

物理研究方法

物理模型 → 数学模型 → 求解 → 物理量与时空的关系。

与观测对比、检验模型，若不符合，改进，认识前进一步。
认识由简→繁，逐步接近真实

物理模型 — 物质世界的结构与演化

特点：由一组基本物理量描述
当它们与时空的函数关系确定，可导出所有物理量与时空的函数关系

例如：$\vec{r}(t)$确定，可导出 $\vec{v}(t), \vec{a}(t), \vec{F}(t)$

数学模型

基本方程 描述（物质之间作用与运动的关系，是关于基本物理量的方程）

求解条件 定
- 初始
- 边界条件
- 衔接条件

-- 关于基本物理量的条件

例如：一个质点： 基本方程 $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}(\vec{r},t)$, $\vec{r}|_0=\vec{r}_0$, $\frac{d\vec{r}}{dt}|_0=\vec{v}_0$

天体中最常见的物理模型：

刚体　流体（理想流体、粘滞流体、湍流、磁流体）

如地球 弹性体　处于热平衡物体和非平衡物体

宇宙
- 有形状大小的天体 如星系
- 星际介质
- 可看成质点的天体

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

天体测量学：建立坐标系，测定物理量与时空关系，限制物理模型

是测量天体位置与运动，建立基本参考系和测定地面坐标的天文学分支。

研究方法：①以静止恒星为惯性系研究N体运动（N体都看成质点）——天体力学

②或在N个质点选取非惯性坐标系。

③考虑天体大小后求解运动——天体物理。

时空坐标系

时间：是一种连续的顺序.

如何测量时间？（计时的依据）

利用自然界中的周期现象，周期性越好，计时性越好。

几种时间

（以太阳系质心为参照）质心力学时（TDB）．（以地球质心为参照）地球力学时（TT）．原子时（TAI）——TT时的具体实现

几种时间的变换关系

①定义

质心坐标时 TCB 质心天球参考系的时间

地心坐标时 TCG

②变换关系

a. TDB与TCB (1.5) (1.6)

$$TDB = TCB - L_B \times (JD_{TCB} - T_0) \times 86400\,s + TDB_0 \quad (1.5)$$

$$TDB_0 = -6.55 \times 10^{-5}\,s \quad (1.6)$$

b. TT与TAI (1.7)

$$TT = TAI + 32.184 \quad (1.7)$$

c. TT与TCG (1.8) (1.9)

d. TCB与TCG (1.10) (1.11)

时间相关概念 PPT—第1课 10页

儒略日 PPT-1-11

年月日求儒略日 PPT-12 儒略日求年月日 PPT-13,14

天体宏观物体及其附近物理模型和基本方程（广义相对论框架下）

宇宙中物质的4种形式：

1. 实物质

离散用 $\vec{r}_i(t)$ 描述，连续用分布函数 $f(\vec{r},\vec{v},t)$ 描述

少量粒子　　大量粒子

2. 电磁场

$\vec{E}$、$\vec{B}$

3. 光子场

光强 I、偏振　Stokes参量

4. 引力场

（广相）$g_{\mu\nu}$，引力势 $\phi$（牛顿）

基本方程。（物质之间作用和运动的关系）

① （实＋电＋光联合对引力的作用）与运动的关系：

这个关系即 Einstein 方程（泊松方程）

└ 用对称性求解

② 实＋电＋引力 对光子作用与运动关系：

弯曲时空下的辐射转移方程（光子 Boltzmann方程）

③ 实＋光＋引力 对电磁作用与运动关系：

弯曲时空下的 Maxwell 方程

④ 电＋光＋引力 对实物质作用与运动关系：

弯曲时空下的 Boltzmann方程

特例　1. 不考虑引力场（平直空间）

$x,t$：$(d\tau)^2=(c\,dt)^2-(dx)^2$

$x',t'$：$(d\tau)^2=(c\,dt')^2-(dx')^2$

Lorentz 变换：$t'=\dfrac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$　　$x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

整体无平直空间，局部有。

2. 实物质为电中性流体、无电磁场、光子场，有引力场，$\frac{v}{c}\ll 1$。

基本方程为广义相对论的一阶后牛顿近似

$$g_{00}=-1+\frac{2w}{c^2}-\frac{2w^2}{c^4}$$

$$g_{0i}=-\frac{4}{c^3}w^i$$

$$g_{ij}=\delta_{ij}\left(1+\frac{2w}{c^2}\right)$$

$w$：标量势　$w^i$ 矢量势

w的表达式 （1.4）



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

第二课　太阳和月亮历表、矩阵、向量、坐标变换、程序设计

本章内容：用观测和理论（唯象）方法解月亮、太阳、地球、其他行星的物理模型（最简单的模型即质点组，可以求解基本物理量 $\vec{r}_i(t)$，并求出所有相关物理量 $\vec{v},\vec{a}$。通常对 $\vec{r},\vec{v}$ 感兴趣）

$\vec{r}_i(t)$，$\dot{\vec{r}}_i(t)$ 以表格形式表示，此表称作历表。

引入向量、矩阵、坐标变换，通过计算机得到每一给定时刻的位矢、速度

宇宙 太阳系的物理模型

宇宙：由恒星、星系、行星、星际介质等组成。通常前四者可看作质点或者有大小的天体。末者可看作流体。（具分类见前）

星系团

天体力学不考虑

星历表定义：

表格只是历表最终产品的一种形式

可以是一组公式、一组算法、一个程序、或它们的组合

星历表定义：　皇家图　天体力学不考虑　的天体。　(头'刀头儿刷)

表格只是历表最终产品的一种形式

可以是一组公式、一组算法、一个程序或它们的组合。

只要对象能提供某时刻(任时刻)所需的位置、速度

数值历表

根据各种物理状态，比如太阳，日冕，对流，广相，章动，给出系列数值历表。《大球》P32－P34

例：DE系列历表 PPT－2－28　它以数值计算为基本方法。

天体(质点)基本物理量位矢 $\vec{r}(t)$ ($\dot{\vec{r}}(t)$) 求出。

例1 如二体(实物质+引力场)

(1) 物理模型

质点组 $\vec{r}_1(t)$，$\vec{r}_2(t)$

(2) 数学模型

万有引力定律，牛二，初始条件

(3) 求出 $\vec{r}_1(t)$，$\vec{r}_2(t)$ $\longrightarrow$ 从而 $\dot{\vec{r}}$，$\ddot{\vec{r}}$

例2 又如在行星运动轨道平面再增加一个质量可忽略的物体(子行星或飞船)。(平面限制性三体问题)

(1) 物理模型

$\vec{r}_1(t)$，$\vec{r}_2(t)$，$\vec{r}_3(t)$

(2) 数学模型

万有引力定律，牛二，初始条件

(3) 求 $\vec{r}_i(t)$，$\dot{\vec{r}}_i(t)$，$i=1,2,3$。

如果物理模型很复杂,如何求 $\vec{r}$

切比雪夫多项式

递归定义: $T_0(x)=1$

$T_1(x)=x$

$T_i(x)=2xT_{i-1}(x)-T_{i-2}(x)$ $|x|\leq 1$ , $i=2,3,\cdots,N-1$

用切比雪夫多项式求复杂情形下的 $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$.

时间换算因子,其值为 $\frac{2}{\Delta}$

$x(t)=a_{10}T_0(t_c)+a_{11}T_1(t_c)+\cdots+a_{1,N-1}T_{N-1}(t_c)$, $\dot{x}(t)=VFac\left(a_{10}\dot{T}_0(t_c)+\cdots+a_{1,N-1}\dot{T}_{N-1}(t_c)\right)$

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{10}&a_{11}&\cdots&a_{1,N-1}\\a_{20}&&&\vdots\\a_{30}&\cdots&\cdots&a_{3,N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_0(t_c)\\T_1(t_c)\\\vdots\\T_{N-1}(t_c)\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\\dot{y}(t)\\\dot{z}(t)\end{pmatrix}=VFac\begin{pmatrix}a_{10}&a_{11}\cdots&a_{1,N-1}\\a_{20}&&\vdots\\a_{30}&\cdots&a_{3,N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{T}_0(t_c)\\\vdots\\\dot{T}_{N-1}(t_c)\end{pmatrix}$$

某些情形下,由上式可精确计算 $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$. → 星历表

说明 (1) 切多项式最高次数取决于所需精度和天体运动复杂性, $N-1$ 是切比雪夫多项式的最高次数

如太阳、火星 $N=11$ (经验)

地月质心、月 $N=13$

(2) $t\in[t_0,t_0+\Delta]$.

$t_c=\frac{2(t-t_0)}{\Delta}-1\in[-1,1]$. 切式自变量

Wannc 图: 子时段 $\begin{cases}\text{分量}\\(1,3)\end{cases}$ $\begin{cases}\text{系数}\\(0,n<1)\end{cases}$

(3) $\dot{T}_0(x)=0$

$\dot{T}_1(x)=1$

$\dot{T}_i(x)=2T_{i-1}(x)+2x\dot{T}_{i-1}(x)-\dot{T}_{i-2}(x)$, $i\geq 2$

怎样用计算机,由历表文件 MSM.dat 读取基本物理量,即t时刻的位置速度. 以月,日,火为例

(1) MSM.dat 数据结构 (见PPT-7)

$N$ (Ncf) = 13. 天体数 3

$\vec{r}$ 或 $\dot{\vec{r}}$ 有三个分量. 一个时段状态的数据组织文件

(2) 基本物理量读取

t时刻位矢,速度 $i=1,2,3$

编程. (见书 P38-40《天球》)

(3) (2)的具体讨论

类 TEMS 的过程 state 用于读取, 并计算t时刻 3个天体在地心天球参考系的位矢和速度 Wanner 图, 见书P41

其中包括过程 Inter(), 这一过程由入口参数 i 表示 (待处理的天体序数)

$i$ 天体序数. 任务有3: 时段指针L, 归一化时间 $t_c$, 计算各自切比雪夫多项式及导数在 $t_c$ 的数值.

主程序见书 P43-44 最后画出 later P过程的 Wanner图

几种形式的DE系列历表. 见 PPT-2-8

行星,月球历表位置误差. 见 PPT-2-12

DE 405/LE 405 运动方程考虑的因素 PPT-2-9

涉及到的观测 PPT-2-10

行星月球历表 (内太阳系) 位矢精度如何? (包括类地行星和月球) PPT-2-11

行星历表 (外太阳系) 精度 PPT-2-12

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

天体(质点)基本物理量的说明

位矢 $\vec{r}(t) \Rightarrow \vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

对于观测，视方便而主观选定坐标系。

不同坐标系得不同结果，矢量本身实与坐标系无关($\vec{r}, \vec{v}$等)，不同坐标系结果之间内在的联系为坐标变换

与矩阵有关的定义

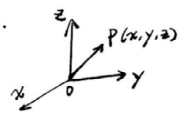
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

记为 $(a_{ij})_{m\times n}$. $a_{ij}$ 称元素.
$m=n$ 时为 $n$ 阶方阵

行列互换，得 $A$ 的转置 $A^T$.

矩阵相等，实数与矩阵的乘积，两个矩阵的和，矩阵线性组合，矩阵乘积，特殊矩阵(行向量，列向量)
$(a_1 \cdots a_n)$　$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
一般 $n=3$

位矢.




P点位矢 $\vec{r} \triangleq \vec{OP} = (x,y,z)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

三个特殊向量 $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. $\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，称标架向量

方向为三个轴向，单位长度，有右手关系。

坐标系记为 $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

位矢运算：平行四边形法则；分量分别运算；位矢长度的定义；单位矢量；矢量运算　极坐标，球坐标

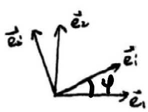
坐标变换：同一物理量在不同坐标系下有不同数值，它们之间的联系由坐标变换给出

已知坐标系，得物理量在坐标系下数值，与观测对比，限制物理模型。

关键是求坐标变换 $x'^{\mu}=x'^{\mu}(x^{\nu})$

变换关系：$T'^{\mu\nu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}T^{\alpha\beta}$, $A'^{\mu}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}A^{\nu}$, $S'=S$

①二维平面直角系的旋转：　这里用到的是绝对时间




$\vec{e}_1', \vec{e}_2'$. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2' = -\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}$$　$R(\varphi)=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

或：$(\vec{e}_1', \vec{e}_2') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)R(-\varphi)$　(1)

$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
$(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

称 $R(\varphi)$ 为旋转矩阵。

特点：$R(\varphi)$ 为正交阵. $R(\varphi)^{-1}=R(\varphi)^T=R(-\varphi)$　$(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=(\vec{e}_1',\vec{e}_2')R(\varphi)$　(2)

记 $\vec{r}$ 在新旧坐标系下坐标分别为 $(x',y')^T$. $(x,y)^T$

则 $\vec{r}=(e_1', e_2')\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. 代入(1),(2)得

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=R(\varphi)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=R(-\varphi)\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

② 空间直角坐标系的旋转（绝对时间）

基本转动

(1) $\vec e_1$不动，$(\vec e_2,\vec e_3)$以$\vec e_1$为轴逆时针转$\varphi$到$(\vec e_2',\vec e_3')$

$(\vec e_1',\vec e_2',\vec e_3')=(\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3)R_1(-\varphi)$.

$$R_1(\varphi)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&\sin\varphi\\0&-\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$$

(2) $\vec e_2$不动，$(\vec e_3,\vec e_1)$绕$\vec e_2$逆时针转到$(\vec e_3',\vec e_1')$.

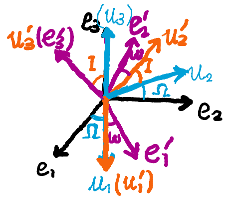
$(\vec e_1',\vec e_2',\vec e_3')=(\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3)R_2(-\varphi)$

$$R_2(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi&0&-\sin\varphi\\0&1&0\\\sin\varphi&0&\cos\varphi\end{pmatrix}$$

(3) $\vec e_3$不动，$(\vec e_1,\vec e_2)$绕$\vec e_3$逆时针转到$(\vec e_1',\vec e_2')$.

$(\vec e_1',\vec e_2',\vec e_3')=(\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3)R_3(-\varphi)$.

$$R_3(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi&0\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$




欧拉角：

(1) $e_3$不动，$(e_1,e_2)$绕$e_3$逆时针转$\Omega$至$(u_1,u_2)$.

$(u_1,u_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)R_3(-\Omega)$

(2) $u_1$不动，$(u_2,e_3)$绕$u_1$逆时针转$I$至$(u_2',e_3')$.

$(u_1,u_2',u_3')=(u_1,u_2,u_3)R_1(-I)$

(3) $e_3'$不动，$(u_1,u_2')$绕$e_3'$逆……$\omega$至$(e_1',e_2')$.

$(e_1',e_2',e_3')=(u_1,u_2',e_3')R_3(-\omega)$

∴ $(e_1',e_2',e_3')=(e_1,e_2,e_3)R_3(-\Omega)R_1(-I)R_3(-\omega)=(e_1,e_2,e_3)R^{-1}(\omega,I,\Omega)$，$(e_1,e_2,e_3)=(e_1',e_2',e_3')R(\omega,I,\Omega)$

极向量：（第三标架指向地球的自转轴方向） $(e_1'e_2'e_3')(x_1',x_2',x_3')^T=(e_1e_2e_3)(x_1,x_2,x_3)^T\Rightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

(1) $e_3$不动，$(e_1,e_2)$绕$e_3$顺时针转$\alpha$至$(u_1,u_2)$，使$u_1$落在$(e_3,e_1')$平面，此时$u_2$也落在$(e_2',e_3')$平面.

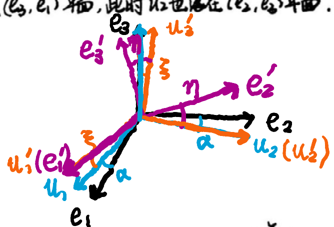
$(u_1,u_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)R_3(\alpha)$

(2) $u_2$不动，$(e_3,u_1)$绕$u_2$顺时针转$\xi$至$(u_3,e_1')$.

$(e_1',u_2,u_3)=(u_1,u_2,e_3)R_2(\xi)$

(3) $e_1'$不动，$(u_2,u_3)$绕$e_1'$逆时针转$\eta$至$(e_2',e_3')$.

$(e_1',e_2',e_3')=(e_1',u_2,u_3)R_1(-\eta)$.




∴ $(e_1',e_2',e_3')=(e_1,e_2,e_3)R_3(\alpha)R_2(\xi)R_1(-\eta)$

$R_3(-\alpha)$不影响极向量坐标，∴ $e_3=(e_1',e_2',e_3')\begin{pmatrix}\sin\xi\\\cos\xi\sin\eta\\\cos\xi\cos\eta\end{pmatrix}\overset{\xi,\eta小}{\approx}(e_1',e_2',e_3')\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\1\end{pmatrix}$

$e_3-e_3'=(\xi,\eta,0)^T$ 称“极移向量”，表极点的位移.

$\vec e_3=\vec u_3'\cos\xi+\vec u_1'\sin\xi$

$=(\vec e_3'\cos\eta+\vec e_2'\sin\eta)\cos\xi+\vec e_1'\sin\xi$

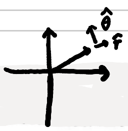
$\approx(\vec e_1',\vec e_2',\vec e_3')\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\1\end{pmatrix}$

$(e_1,e_2,e_3)=(e_1',e_2',e_3')R_1(\eta)R_2(-\xi)R_3(-\alpha)$

$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=R_1(\eta)R_2(-\xi)R_3(-\alpha)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$



平面上的点和方向




$\vec r=r\cos\theta\,\hat x+r\sin\theta\,\hat y=r\hat r$，$\dot{\hat r}=\dot\theta\hat\theta$，$\dot{\hat\theta}=-\dot\theta\hat r$

$\vec v=\dot r\hat r+r\dot\theta\hat\theta$，$\vec a=(\ddot r-r\dot\theta^2)\hat r+(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)\hat\theta$

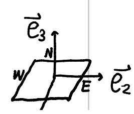
第三课 天球参考系、岁差 章动经典变换

本课内容：要测量系统物理量，必须选取坐标系，为了问题的方便，可用不同坐标系。（主观选择）
如何求给定坐标系下的基本物理量？($\vec r,\dot{\vec r}$)（一般是非惯性系）
选定一个惯性系（至少是近似的惯性系），容易求出基本物理量，由选定坐标系与惯性系的变换关系，可求选定坐标系的基本物理量。
此惯性系可称为国际天球参考系。

坐标系要素：
1. 选原点 O
2. 选基本平面
3. 过原点，垂直基本平面的标架向量$\vec e_3$，称为法向量
4. 在基本平面内选取基本方向($\vec e_1$)

几种坐标系以及为什么选择它们

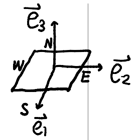
1. 地平坐标系 一个很自然的选择




观测点为原点，地平面为基本平面，铅垂线为法向量，正南为基本方向，左手系。

天体位置：方位角$\alpha$，高度$h$，纬角坐标范围 $-90°\le h\le 90°$ $z=90°-h$ 称天顶距

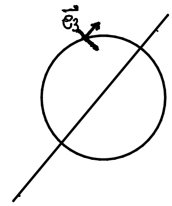
1. 地平坐标系 一个很自然的选择




观测点为原点，地平面为基本平面，铅垂线为法向量，正南为基本方向，左手系.

天体位置：方位角$\alpha$，高度$h$ 的角坐标决定 $-90^\circ<h<90^\circ$ $z=90^\circ-h$，称天顶距

2. 赤道坐标系




观测站(观测点)为原点，北天极 $\vec{e}_3$，以 $\vec{e}_3$ 为法向量的基本平面为天球赤道面，左手系.(这个坐标系脱离地面)

天球的纬度不再改变，经度H随时间均匀地变化，被称为时角，赤道系又叫时角坐标系，而与天球挂钩

3. 站心赤道坐标系 时角变化的原因是基本方向仍为地面联系，为把经度固定下来，应使基本方向和地面脱钩而连接于某个天体，如太阳，从而春分点被选为赤道系的基本方向. $\delta$为赤纬

4. 黄道坐标系 原点仍然选为观测站，基本平面也与赤道坐标系相同

原点和基本方向同赤道系，基本平面为黄道面，黄道面法向为黄极方向

黄赤交角$\varepsilon$为唯象的值，由理论和观测得到. 对特定坐标系 $\begin{cases}\text{赤经 赤纬}\\ \text{黄经 黄纬}\end{cases}$

坐标系间的变换关系：

a. 地平坐标系与时角坐标系

$$\underset{\text{地平}}{\begin{pmatrix}\cos h\cos\alpha\\ \cos h\sin\alpha\\ \sin h\end{pmatrix}} = R_2(-90^\circ+\phi)\underset{\text{时角}}{\begin{pmatrix}\cos\delta\cos H\\ \cos\delta\sin H\\ \sin\delta\end{pmatrix}}$$

(两坐标系原点重合)

地平坐标系 $(x,y,z)=(R\cos h\cos\alpha,\ R\cos h\sin\alpha,\ R\sin h)$

b. 时角坐标系与赤道标架变换

$$\underset{\text{赤道}}{\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha\\ \cos\delta\sin\alpha\\ \sin\delta\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} R_3(LST)\underset{\text{时角}}{\begin{pmatrix}\cos\delta\cos H\\ \cos\delta\sin H\\ \sin\delta\end{pmatrix}}$$

基本方向春分点 基本方向正南

LST：春分点时角

$H=LST-\alpha$

时坐标基本方向为正南

Scanned by CamScanner

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

国际天球参考系：

1. 近似惯性系，原点为太阳系质心
2. 无转动
3. 在理论上方位测量可算出一批天体精确坐标。

} 理想的惯性系

真赤道系：

作为基本平面的天赤道和决定基本方向的春分点在运动。

赤道坐标系标架随时间转动。对于时间t，标架的方向确定

注：为何赤道面和春分点在运动？

国际天球参考系 — 因为惯性系，牛二适用。地球不为正球体，为扁平椭球体。

赤道部分隆起，两极扁平。在空间中运动类似于高速旋转的陀螺，有进动和章动。

进动 → 岁差。

由牛二律可算出真赤道在国际天球参考系中的运动情况

平赤道系：

定义：只考虑岁差，不考虑章动情况下的赤道坐标系。

· 仅代表真赤道系在一段时间内的平均方位

相应的基本平面称平赤道。

基本方向称平春分点。

国际天球参考系的规范定义：

原点为太阳系质心。坐标轴指向对于河外星体固定。

基本平面尽可能靠近 J2000.0 的平赤道面。

基本方向尽可能靠近 J2000.0 的平春分点。

历元平赤道系：

J2000.0 下的平赤道系。

说明：国际天球参考系、历元平赤道系、历元平黄道系不随时间变化。

真赤道系、平赤道系、平黄道系、真黄道系随时间变化。

几种坐标系下坐标变换：

C. 国际天球参考系和历元平赤道系。

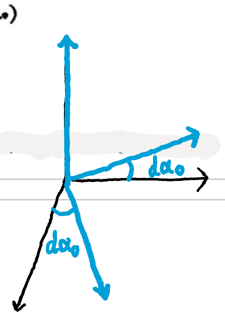
$\{O, e_1, e_2, e_3\}$　$\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$　{原点，三个基矢}

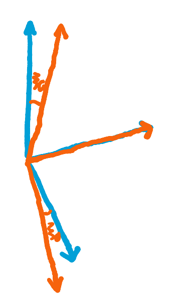
变换由三个量确定 $\{d\alpha_0, \xi_0, \eta_0\}$。$(\xi_0, \eta_0)$ 是历元平天极向量 $\bar{e}_3$ 在国际天球参考系下坐标，也是两个天极 $P, \bar{P}$ 在第一和第二坐标方向上的角距离。称作"历元平天极偏置"。

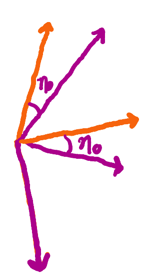
$d\alpha_0$ 是历元平春分点在国际天球参考系下的赤经，称"春分点偏置"。

具体操作（由国际 → 历元）

1　绕第三轴逆时针旋转 $d\alpha_0$。基本平面 $(e_1, e_2)$ 变换矩阵 $R_3(-d\alpha_0)$




10

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

2　绕第二轴逆时针旋转 $\xi_0$。基本平面 $(\bar{e}_1, e_2)$。变换矩阵 $R_2(-\xi_0)$

3　绕第一轴顺时针旋转 $\eta_0$。基本平面 $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$。变换矩阵 $R_1(\eta_0)$

总变换关系：

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) B \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

$$B = R_3(-d\alpha_0) R_2(-\xi_0) R_1(\eta_0).$$

B称作"历元偏置变换"

三个参数由实测给出。
$$d\alpha_0 = (-0.01460 \pm 0.00050)''$$
$$\xi_0 = (-0.0166170 \pm 0.0000100)''$$
$$\eta_0 = (-0.0068192 \pm 0.0000100)''$$


d. 平赤道系与国际天球参考系的四种转换

$\xi_0 = (-0.0166170 \pm 0.0000100)''$

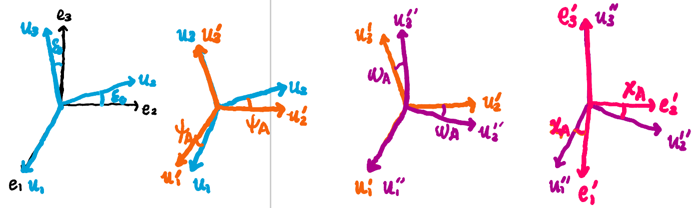
$\eta_0 = (-0.0068192 \pm 0.0000100)''$

d 平赤道系与国际天球参考系的四旋转法

$(O, e_1', e_2', e_3')$ $\qquad$ $(O, e_1, e_2, e_3)$

注：平赤道系为只考虑岁差的赤道系

国→平的变换操作：《天球》




1 $\quad (e_2, e_3)$ 绕第一轴 $e_1$ 逆时针转 $\varepsilon_0$。$\varepsilon_0$ 称"历元黄赤交角"

转至 $(u_2, u_3)$。$(e_1, u_2)$ 在历元黄道面上，$u_3$ 为历元黄极

2 $\quad (e_1, u_2)$ 绕第三轴 $u_3$ 顺时针旋转 $\psi_A$ 至 $(u_1', u_2')$。$\psi_A$ 称"黄经岁差"

$(e_1, u_2, u_3) = (e_1, e_2, e_3) R_1(-\varepsilon_0)$

$(u_1', u_2', u_3) = (e_1, u_2, u_3) R_3(\psi_A)$

3 $\quad (u_2', u_3)$ 绕第一轴 $u_1'$ 顺时针转 $\omega_A$ 至 $(u_2'', e_3')$。$\omega_A$ 为瞬时平赤道面与历元黄道面交角

$(u_1', u_2'', e_3') = (u_1', u_2', u_3) R_1(\omega_A)$

4 $\quad (u_1', u_2'')$ 绕第三轴 $e_3'$ 逆时针旋转 $\chi_A$ 至 $(e_1', e_2')$。$\chi_A$ 称"赤经岁差"

$(e_1', e_2', e_3') = (u_1', u_2'', e_3') R_3(-\chi_A)$

总变换关系：$(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) \cdot P(t)$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$P(t) = R_1(-\varepsilon_0) R_3(\psi_A) R_1(\omega_A) R_3(-\chi_A)$

(即天极绕黄极进动)

其中：$\psi_A$、$\omega_A$、$\chi_A$ 是由地球相对国际天球参考系的岁差运动决定。

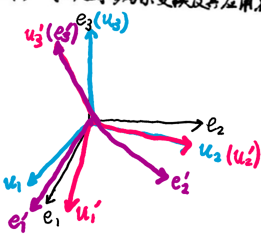
$\psi_A = \cdots$，$\omega_A = \cdots$，$\chi_A = \cdots$。见书 P79.（5.17）（《天球参考系变换及其应用》）

3. 平赤道系 $(O, e_1', e_2', e_3')$ 与国际天球坐标系 $(O, e_1, e_2, e_3)$ 的三旋转法

1 $\quad (e_1, e_2)$ 绕 $e_3$ 顺时针旋转 $\zeta_A$ 至 $(u_1, u_2)$

2 $\quad (e_3, u_1)$ 绕 $u_2$ 逆时针转 $\theta_A$ 至 $(e_3', u_1')$

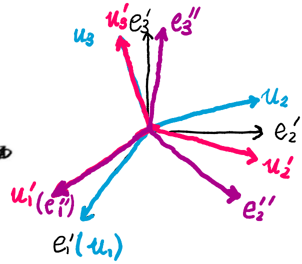
3 $\quad (u_1', u_2)$ 绕 $e_3'$ 顺时针转 $z_A$ 至 $(e_1', e_2')$




$(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) \underbrace{R_3(\zeta_A) R_2(-\theta_A) R_3(z_A)}_{\text{定义为 } P(t)}$

赤道岁差参数 $\zeta_A$，$\theta_A$，$z_A$ 见 P80 （5.20）

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = R_3(-z_A) R_2(\theta_A) R_3(-\zeta_A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$




e. 真赤道系和平赤道系的变换

$(0, e_1'', e_2'', e_3'')$ $(0, e_1', e_2', e_3')$

见《天》P82

真：考虑了岁差＋章动 平：只考虑岁差 . 联系由章动矩阵 $N(t)$ 给出.

分三步：① $(e_2', e_3')$ 绕第一轴 $e_1'$ 逆时针旋转 $\varepsilon_A$ 至 $(u_2, u_3)$. 基本面为黄道面

$(e_1', u_2, u_3) = (e_1', e_2', e_3') R_1(-\varepsilon_A)$ 黄赤交角

② $(e_1', u_2)$ 绕第三轴 $u_3$ 在黄道面内顺时针旋转 $\Delta\psi$ 至 $(e_1'', u_2')$

$(e_1'', u_2', u_3) = (e_1', u_2, u_3) R_3(\Delta\psi)$

③ $(u_2', u_3)$ 绕第一轴 $e_1''$ 顺时针旋转 $\varepsilon_A + \Delta\varepsilon$ 到 $(e_2'', e_3'')$

$(e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1'', u_2', u_3') R_1(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon)$

$\Rightarrow (e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1', e_2', e_3') R_1(-\varepsilon_A) R_3(\Delta\psi) R_1(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon)$

$= (e_1', e_2', e_3')\, \underline{N(t)}$

章动矩阵

坐标变换关系

平赤道系 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = N(t) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ 真赤道系.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = R_1(-\varepsilon_A - \Delta\varepsilon) R_3(-\Delta\psi) R_1(\varepsilon_A) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_A$：平黄赤交角 $\Delta\psi$：黄经章动 $\Delta\varepsilon$：倾角章动 见《天》5.25~5.29

f. 真赤道系和国际天球参考系变换关系

$\{0, e_1'', e_2'', e_3''\} \longleftarrow \{0, e_1, e_2, e_3\}$.

① $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) B$

历元平赤道系 国际天球参考系

② $(e_1', e_2', e_3') = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) P(t)$

平赤道系 历元平赤道系

③ $(e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1', e_2', e_3') N(t)$

真赤道系 平赤道系

$\Rightarrow (e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1, e_2, e_3) B P(t) N(t)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B P(t) N(t) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = N^{-1}(t) P^{-1}(t) B^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

几种坐标系(三)：

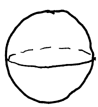
a. 国际地球参考系（非惯性系）

• 为什么建立：为了处理观测数据，还需地面观测站在国际天球参考系中的坐标

三步：① 建立与地球表面固连，随地球周日运动在空间中一起旋转的参考系，在此系中测站位置几乎不随时间变化

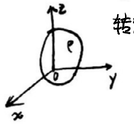
② 建立地球参考系与真赤道系变换关系

③ 建立真赤道系与国际天球参考系变换，求测站在国天系坐标.



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

·引入形状轴、形状极




转动惯量 $I_{ij}=\int \rho x_i x_j dV$ $(i=1,2,3)$ $I_{ij}=\int (r^2\delta_{ij}-x_i x_j)dm$

旋转椭球刚体 $I=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$ 对于地球：$A=B<C$，$\frac{A}{C-A}=304$

A,B,C与时间无关

三轴叫做地球惯性主轴 A、B、C：主转动惯量，与时间无关

C最大，称形状轴，形状轴与地球表面的交点称为形状极

·引入带塞朗平均轴

地球不是刚体，有潮汐、地球是滞弹性体，三个主转动惯量和三个主轴的方向与t有关、物质流动。

物质流动对主轴及主轴方向有小影响，但不能忽略。

将三轴调整，使总效应为0，此轴称带塞朗轴

·国际地球参考系：标架为地球带塞朗轴

b、观测站坐标、

把地球看作旋转椭球体，建立国际地球参考系 $(x,y,z)$

观测站坐标 $(h,\lambda,\phi)$，$h$：海拔高度　$\lambda$：大地经度　$\phi$：大地纬度

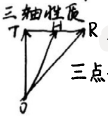
几种坐标系变换关系：

轴、极概念：国际地球参考系建立在形状轴上，要研究其性质，必须研究形状轴在国天系运动(由牛顿定律决定)(惯性系)

(1) 三个轴

自转轴、形状轴、角动量轴 (R、T、H 为三轴的极点)

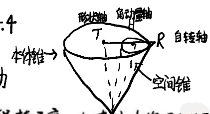
(2) 三轴性质




共面，且满足比例关系 $\frac{TH}{HR}=\frac{A}{C-A}=304.4$

三点共线

空间锥绕本体锥的内表面纯滚动




扁率 $\frac{C-A}{C}$

(3) 在国际天球参考系、如不考虑地球受外力作用，角动量大小、方向保持不变；如有外力作用，角动量进动，由牛二可预报

(4) 在国际地球系，形状轴不动，自转轴绕形状轴转动，轨迹为锥面。

如不考虑地球受外力，角动量轴相对形状轴运动取决于地球动力学状态，理论上无法预报。

(5) 地球参考系取在形状轴上，对椭球地球，角动量轴(H)几乎与自转轴(R)指向同一方向；它们可以看成是真赤道系第三轴。

角动量极H在地球参考系位置由极移矢量 $\vec{p}$ 确定

如果知道 $\vec{p}$，则地球－天球参考系变换关系确定

起中介作用的极H 把形状极T在地球参考系、的运动分为两部分：天文(岁差、章动)＋地球(极移)

$\vec{p}=\vec{p}_c+\vec{p}_f$

$\vec{p}_c$：不可预报(自由运动)

$\vec{p}_f$：可预报(受迫振动)

与H 相应极和轴分别称为中介极和中介轴。

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(6) H作为中介极缺点 ①把可预报$\vec{P}_F$与不可预报$\vec{P}_E$混在一起

②$\vec{P}_F$是由日月引力引起的慢变量，归结为极移后

周日受迫极移：
地球快速运转导致的气体运动

(7) 天球历书极N：完全分离地球参考极了相对天球系的$\vec{P}_E$和$\vec{P}_F$

(周日受迫极移归入天文章动)

无论从地球参考系还是国际天球参考系看，都没有周期接近一日的运动

天球中介极(CIP) 将地球是非刚体，引进天球历书极定义，称为天球中间极(CIP)，

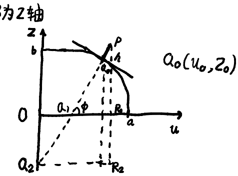
CIP在天球参考系中运动主要由作用于地球的外力矩引起，这个运动只包含大于2日的长周期运动

几种坐标系变换(三)： 在地球参考系中观测，频率介于$-1.5/日\sim 0.5/日$之间，其他高频运动归结为极移

观测站坐标系与国际地球坐标系变换 $(O-xyz)$
$(h,\lambda,\phi)$

a. 设测站或天体为P，建立国际地球系，OB为Z轴

$O-xyz$. $u=\sqrt{x^2+y^2}$




旋转椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad (3.3)$$

导出$(x,y,z)$与$(h,\lambda,\phi)$关系：

$$\frac{2udu}{a^2}+\frac{2zdz}{b^2}=0 \Rightarrow \frac{dz}{du}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{u}{z}$$

在$Q_0$上，$\left|\frac{dz}{du}\right|_0=-\frac{b^2u_0}{a^2z_0}$

$$\Rightarrow \tan\phi=\frac{a^2z_0}{b^2u_0}$$

$$\Rightarrow z_0=(1-e^2)u_0\tan\phi \qquad (3.4) \qquad e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

由(3.3),(3.4)有 $u_0=N\cos\phi \qquad (3.5)$

$$z_0=(1-e^2)N\sin\phi \qquad (3.6)$$

$$\frac{u_0^2}{a^2}+\frac{z_0^2}{b^2}=\frac{N^2\cos^2\phi}{a^2}+\frac{b^2N^2\sin^2\phi}{a^4}=1,\quad N=\frac{a}{\sqrt{\cos^2\phi+\frac{b^2}{a^2}\sin^2\phi}}=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}}$$

式中 $N=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}} \qquad (3.7)$

由图 $|Q_2Q_0|=\frac{u_0}{\cos\phi}=N \quad |Q_1Q_0|=\frac{z_0}{\sin\phi}=(1-e^2)N$

$$|Q_2Q_1|=|Q_2Q_0|-|Q_1Q_0|=e^2N \qquad (3.8)$$

观测(天体)在子午面坐标为

$$\begin{cases} x=(N+h)\cos\phi\cos\lambda \\ y=(N+h)\cos\phi\sin\lambda \\ z=[(1-e^2)N+h]\sin\phi \end{cases} \qquad (3.9)$$

此变换称正变换.

逆问题，由$(x,y,z)$到$(h,\lambda,\phi)$. 地球坐标系→地平坐标系

记$\Delta z=|R_2R_1|=|Q_1Q_2|\sin\phi=e^2N\sin\phi$

由(3.7) $\Delta z=\frac{ae^2\sin\phi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}} \qquad (3.10)$

$\Delta Q_1R_1P$ 中，得 $\sin\phi = \frac{|R_1P|}{|Q_2P|} = \frac{z+\Delta z}{\sqrt{x^2+y^2+(z+\Delta z)^2}}$ (3.11)

由(3.10)(3.11)迭代求解，以 $\Delta z = e^2 z$ 为初值，最后解出 $\sin\phi$

大地经度 $\lambda = \arctan\frac{y}{x}$

海拔高度 $h = \sqrt{x^2+y^2+(z+\Delta z)^2} - N$

大地纬度 $\phi = \arcsin(\sin\phi)$

b. 国际地球参考系和真赤道系变换

$\{o, e_1''', e_2''', e_3'''\}$ $\{o, e_1'', e_2'', e_3''\}$

$(e_1''', e_2''', e_3''') = (e_1'', e_2'', e_3'') R_3(-GST) R_3(-s') R_2(x_p) R_1(y_p)$

与书上4.4.3节比较，增加一个旋转。[为了调整经度起算原点，使成为无转动原点] (地球历书原点)

沿真赤道逆时针转 $s' = -47t$ (微角秒)

李书 P59 (4.65) $\alpha \to -GST - s'$. $\xi \to x_p$. $\eta \to -y_p$

具体变换式见图6.8.(P108)

GST的讨论：

国地系 $(o, e_1''', e_2''', e_3''')$ 基本方向指向经度线 (本初子午线)

真赤道系 $\{o, e_1'', e_2'', e_3''\}$ 指向真赤道系基本平面上的真春分点方向

在地球系春分点随天球顺时针转动。

真春分点与本初子午线的夹角，即真春分点的时角，称作GST(格林尼治恒星时)

定义 $t = \frac{TT - J2000.0}{36525}$ 则 $GST = GSMT + EECT$ 《天球》P109，式(6.25)(6.26)

格林尼治平恒星时 二分差

其中辐角 $\alpha_i = n_{i1}l + n_{i2}l' + n_{i3}F + n_{i4}D + n_{i5}\Omega + n_{i6}L_{VE} + n_{i7}L_E + n_{i8}p_A$ (6.24)

$\Phi = \cdots$ (6.25) $\theta$ 地球自转角

$T_u = UT1 - J2000$

极移矩阵的讨论：

(1) 由(3.14)，极移矩阵 $W(t) \equiv R_3(-s')R_2(x_p)R_1(y_p)$ 产生于复杂的地球物理因素，

一般唯象给出 (2)周期较长的分量为欧拉自由极移。(3.16) 相对国际天球参考系的

(3) 地球自转参数 $\Delta AT$, $x_p$, $y_p$ 可从网站 www.iers.org 下载

地球力学时与世界时之差多项式表达式 地球是非刚体 → 钱德拉摆动

(4) $\Delta AT$ 的表达式见P45，$TT = TAI + 32.184 = UTC + \Delta AT + 32.184$ 还有其他分量

c. 经典地球和天球参考系变换

(5) $\Delta T$ 的表达式 ($\Delta T = TT - UT1$) 见P48

国际地球参考系 $(e_1''', e_2''', e_3''')$

$y = year + \frac{month - 0.5}{12}$，$\Delta T$ 用 $y$(索引变量)表示 见P127表6.14

国际天球参考系 $(e_1, e_2, e_3)$

真赤道系 $(e_1'', e_2'', e_3'')$ 此外，当 $y < -500$ 或 $> 2050$ 时，$\Delta T = -20 + 32\left(\frac{y-1800}{100}\right)^2$

$(e_1''', e_2''', e_3''') = (e_1'', e_2'', e_3'') R_3(-GST) R_3(-s') R_2(x_p) R_1(y_p)$

又 $(e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1, e_2, e_3) B P(t) \underbrace{N(t)}_{章动矩阵} = (e_1, e_2, e_3) Q(t)$

$\Rightarrow (e_1''', e_2''', e_3''') = (e_1, e_2, e_3) Q \underbrace{R_3(-GST)}_{R(t)} \underbrace{R_3(-s') R_2(x_p) R_1(y_p)}_{W(t)}$

$= (e_1, e_2, e_3) Q(t) R(t) W(t)$

$(x, y, z)^T = Q(t) R(t) W(t) (x''', y''', z''')^T$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

心界

第四课 中介参考系和CEO变换 此部分为《变换》第七章

本课内容：引入中介极和中介轨道概念，来取代真天极和真赤道概念.
从而讨论中介赤道系与国际天球参考系的变换，得到新的基于CEO的地-天坐标系变换.

国际

(1) 天球系为惯性系，由牛二得到基本物理量 $r(t)$ ($v(t)$).
若能得到某惯性系与天球系的变换关系，就能得到非惯性系的基本物理量
比如 中介赤道基本物理量即视位置.

• 讨论真赤道系和国天系变换. (1)概述：分两步 真赤道系 → 平赤道系 → 历元平赤道系(与国际天球参考系偏离不远)
真赤道系-天球系的变换可以由原来的变换加以简化和改进.
第一，以CEO变换代替经典变换
第二，以无旋转原点取代春分点.

(2) 传统方法导出天球系 → 真赤道系变换
$(e_1, e_2, e_3)$ $(e_1'', e_2'', e_3'')$

$(e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1, e_2, e_3) B P(t) N(t)$ 变换矩阵 $Q(t) = BP(t)N(t)$

(3) 中间赤道系-国际天球参考系变换
a. 中间赤道系的极相对国天系(惯性系)运动，可以由理论(牛二)和观测唯象给出
如忽略历元偏置和章动，J2000.0时中介极向量与天球极向量重合
t时刻中介极向量在天球参考系的位置由球坐标余纬 $d$ 和经度 $E$ 确定.

$e_3''$: $X = \sin d \cos E$
$Y = \sin d \sin E$
$Z = \cos d$

b. 中间赤道系 $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ 和国天系 $\{O, e_1'', e_2'', e_3''\}$ 的变换 (中间赤道系与真赤道系基本点不同) 无旋转原点 春分点

1) $(e_1, e_2)$ 在天球赤道面内绕 $e_3$ 逆时针转 $E$ 到 $(u_1, u_2)$. 交线 $u_2$ 变为第二方向. $R_3(-E)$
2) $(e_3, u_1)$ 在垂直交线的平面内绕 $u_2$ 逆时针转 $d$，到 $(e_3'', u_1'')$. $R_2(-d)$
天球赤道面转到中介赤道面，极向量 $e_3$ 转至 $e_3''$.
3) $(u_1, u_2)$ 在中介赤道面内绕 $e_3''$ 顺时针转 $E$，到 $(u_1'', u_2'')$. $R_3(E)$
4) $(u_1'', u_2'')$ 在中介赤道面内绕中介极 $e_3''$ 顺时针转 $s$，到 $(e_1'', e_2'')$. $R_3(s)$.

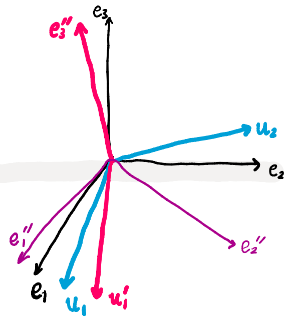
总变换：

$$(e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1, e_2, e_3) R_3(-E) R_2(-d) R_3(E) R_3(s) = (e_1, e_2, e_3) Q(t)$$

称为CEO变换.

[讨论]. s的解释

a. 中介赤道系与真赤道系区别在于：中介赤道系基本方向为天球历书原点 → 无旋转原点，真赤道系为春分点.
为何引入无旋转原点?
因为春分点相对于真赤道在旋转，其度量值为岁差与章动.
若基本点在转动，会增加测量与归算的困难，恒星时概念不可用.
故采用无旋转原点取代春分点，将真赤道系转换为中间赤道系.




中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

b. S的意义和取值.

中介极矢量 $e_3''$ 相对于天球系位置由 $E, d$ 决定. 与时间 $t$ 有关.

$$\vec{\omega} = \dot{E}\vec{e_3} + \dot{d}\vec{u_2}$$

当 $\vec{e_3}''$ 转动时, 标架 $(u_1', u_2, e_3'')$, $(u_1'', u_2'', e_3'')$ 以及中介赤道上所有点以角速度 $\vec{\omega}$ 转动.

幻灯片中(第6页图), 李 $u$ → 陈 $u_2$, 李 $v$ → 陈 $u_1'$, 李 $e_3'$ → 陈 $e_3''$

$\vec{e_3} = \cos d\, \vec{e_3}'' - \sin d\, \vec{u_1}'$ 代入, 得

$$\vec{\omega} = \dot{E}\cos d\, \vec{e_3}'' - \dot{E}\sin d\, \vec{u_1}' + \dot{d}\vec{u_2}$$

两个分量: $\vec{\omega_1} = \dot{E}\cos d\, \vec{e_3}''$　反映中介极绕经度方向转动的角速度

$\vec{\omega_2} = -\dot{E}\sin d\, \vec{u_1}' + \dot{d}\vec{u_2}$　反映沿中介赤道纬度方向的转动 (相对国际天球参考系)

$\vec{\omega_1} \perp \vec{\omega_2}$

设在中介赤道上取一点, 在天球系角速度 $\vec{\omega} = \vec{\omega_2}$, 其随中介赤道在纬度方向移动, 不离开中介赤道

在 $(u_1', u_2, e_3'')$ 或 $(u_1'', u_2'', e_3'')$ 中观测, 其沿中介赤道以 $-\dot{E}\cos d$ 运动.

在天球系观察, 其随中介赤道在纬向摆动, 无经向运动.

$e_1''$ 指向无转动原点, $t_0 = J2000.0$ 时 $u_1'$ 与 $e_1''$ 和 $e_1$ 重合. 至 $t$ 时刻, $u_1'$ 在中介赤道面上转过 $\angle(e_1'', u_1')$ (以角速度 $\dot{E}\cos d$), 当 $d$ 和 $\dot{E}$ 都不变时为 $\cos d\, \dot{E}(t-t_0)$.

表示 $e_1''$ 与 $u_1'$ 成的角度

$d, \dot{E}$ 都随 $t$ 在变, $\therefore \angle(e_1'', u_1') = \int_{t_0}^{t} \dot{E}\cos d \cdot dt = E + \int_{t_0}^{t} (\cos d - 1)\dot{E}\, dt$.

令 $s = \int_{t_0}^{t} (\cos d - 1)\dot{E}\, dt + s_0$.

则 $\angle(e_1'', u_1') = E + s$. $s_0$ 取决于初值, 如果忽略历元偏置和章动则为0. "唯象"

$\angle(u_1'', u_1') = E$. $\angle(e_1'', u_1'') = s$.

c. 用直角坐标表示 $Q(t)$.

$$\begin{cases} X = \sin d\cos E \\ Y = \sin d \sin E \\ Z = \cos d \end{cases}$$

又令 $a = \frac{1}{1+\cos d} = \frac{1}{1+Z}$.

可得
$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1-aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1-aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1-a(X^2+Y^2) \end{pmatrix} R_3(s)$$

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sin d \sin E\, \dot{E} + \cos d \cos E\, \dot{d} \\ \dot{Y} = \cos d \sin E\, \dot{d} + \sin d \cos E\, \dot{E} \\ \dot{Z} = -\sin d\, \dot{d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{E} = \frac{X\dot{Y} - Y\dot{X}}{1-Z^2} = \frac{X\dot{Y} - Y\dot{X}}{\sin^2 d}$$

$s=\int_{t_0}^{t}(\cos d-1)\dot{E}\,dt+s_0=-\int_{t_0}^{t}\frac{X\dot{Y}-Y\dot{X}}{1+Z}\,dt+s_0$

d很小, $Z\approx1$: $\approx\int_{t_0}^{t}Y(t)\dot{X}(t)\,dt-\frac{1}{2}[X(t)Y(t)-X(t_0)Y(t_0)]+s_0$　　$X, Y, s+\frac{XY}{2}$ 可展开为力学时t的级数

基于CEO的地球—天球参考系变换

中介系 $\{O,e_1'',e_2'',e_3''\}$，地球系 $\{O,e_1''',e_2''',e_3'''\}$。

$(e_1''',e_2''',e_3''')=(e_1'',e_2'',e_3'')R_3(-\theta)R_3(-s')R_2(x_p)R_1(y_p)$

其中θ：中介赤道上由地球历书原点TEO到天球历书原点CEO的角度．该两点均无转动，故θ表征地球自转角
(无转动原点)

又真赤道系 $\{O,e_1'',e_2'',e_3''\}$ 与天球参考系 $\{O,e_1,e_2,e_3\}$ 变换：

$(e_1'',e_2'',e_3'')=(e_1,e_2,e_3)BP(t)N(t)$

中介系 $\{O,e_1'',e_2'',e_3''\}$ 与天球参考系 $\{O,e_1,e_2,e_3\}$（CEO变换）：

$(e_1'',e_2'',e_3'')=(e_1,e_2,e_3)\underbrace{R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s)}_{Q(t)}$

基于CEO变换的地 $\{O,e_1''',e_2''',e_3'''\}$ 与天 $\{O,e_1,e_2,e_3\}$ 变换：

$(e_1''',e_2''',e_3''')=(e_1,e_2,e_3)R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s)R_3(-\theta)R_3(-s')R_2(x_p)R_1(y_p)$　(4.6)

基于真赤道系地－天变换

$(e_1''',e_2''',e_3''')=(e_1,e_2,e_3)BP(t)N(t)R_3(-GST)\underbrace{R_3(-s')R_2(x_p)R_1(y_p)}_{W(t)}$　(4.7)

比较(4.6)(4.7)

$BP(t)N(t)R_3(-GST)=R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s)R_3(-\theta)$

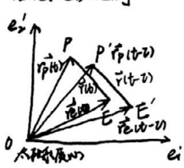
$\Rightarrow BP(t)N(t)=R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s)R_3(-\theta+GST)$

星体在地心中介参考系（真赤道系）的基本物理量 $\vec{r}(t)$（从而速度 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$）的推算：

(1) 视位置：指的是修正了光线时延和偏折后天体关于地心中介参考系（真赤道系）的位置

(2) 光行差：要求视位置，必考虑光速有限和天体关于测站相对运动而引起视位置变化

在固天系观测：




地心中介系（真赤道系）

$\vec{r}(t)=\vec{r}_p(t)-\vec{r}_e(t)$

$\dot{\vec{r}}(t)=\dot{\vec{r}}_p(t)-\dot{\vec{r}}_e(t)$

光线经过时间τ从天体传到地球

$\tau=\frac{P'E}{c}=\frac{1}{c}|\vec{r}_p(t-\tau)-\vec{r}_e(t)|$



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

定义 $\vec{r}_1(t)=\vec{r}-(\dot{\vec{r}}_p-\dot{\vec{r}}_e)\tau$ 为t时刻的视向经

证明：$\vec{r}_1(t)$ 为 $(t-\tau)$ 真向径

$\vec{r}_1(t)=\vec{r}_p(t)-\vec{r}_e(t)-[\dot{\vec{r}}_p(t)-\dot{\vec{r}}_e(t)]\tau=[\vec{r}_p(t)-\dot{\vec{r}}_p(t)\tau]-[\vec{r}_e(t)-\dot{\vec{r}}_e(t)\tau]$

$=\vec{r}_p(t-\tau)-\vec{r}_e(t-\tau)=\vec{r}(t-\tau)$

令 $r=|\vec{r}(t)|$，$\vec{p}=\langle\vec{r}_1(t)\rangle$　视方向 $\vec{p}$ 与真方向 $\langle\vec{r}(t)\rangle$ 差叫光行差

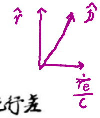
$$\frac{}{c} = \frac{1}{c}\left[\vec{r}_p(t) - \dot{\vec{r}}_p(t)\tau - \vec{r}_e(t)\right] = \frac{1}{c}|\vec{r}(t)|$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t-\tau) = \vec{r} - \dot{\vec{r}}(t)\tau = \vec{r} + \dot{\vec{r}}_e\tau, \quad \tau = \frac{|\vec{r}|}{c}$$

$$\vec{r}_1 = |\vec{r}|\left(\langle\vec{r}\rangle + \frac{\dot{\vec{r}}_e}{c}\right)$$

$\langle\vec{r}\rangle$标$\vec{r}$的方向

$$\vec{p} = \langle\vec{r}_1\rangle = \langle\langle\vec{r}\rangle + \frac{1}{c}\dot{\vec{r}}_e(t)\rangle$$




视位置和光行差随地球周年运动速度$\dot{\vec{r}}_e(t)$而变，叫周年光行差

因地球自转产生的光行差：周日光行差

(3) 星历表的任务

对于地球时t求天体视位置（相对中介赤道系），即真地心距$r$，关于地心的视赤经$\alpha$，视赤纬$\delta$

(4) 一个计算星历表实例（日，月，火），具体步骤：

① 选t时刻天体天球参考系，基本物理量：位置，速度$\vec{r}(t)$，$\dot{\vec{r}}(t)$

转化为地心位置和速度$\vec{r}(t)$、$\dot{\vec{r}}(t)$

② 计算真地心距 $r = |\vec{r}|$

③ 求$\vec{r}_1 = \vec{r}(t-\tau)$，计算视方向单位矢$\vec{p} = \langle\vec{r}_1\rangle$

④ 真赤道系$(O, e_1'', e_2'', e_3'')$与天球参考系$(O, e_1, e_2, e_3)$变换

$$(e_1'', e_2'', e_3'') = (e_1, e_2, e_3)\,B\,P(t)\,N(t) \equiv (e_1, e_2, e_3)\,Q$$

$$Q(t) = R_3(-E)\,R_2(-d)\,R_3(E)\,R_3(S) \quad [\text{注：}E, d, S\text{唯象}]$$

$$Q^{-1} = Q^T = R_3(-S)\,R_3(-E)\,R_2(d)\,R_3(E)$$

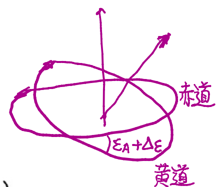
⑤ 由国天系 → 真赤道系，$\because (e_1'', e_2'', e_3'')\,Q^{-1} = (e_1, e_2, e_3)$

$P_1 = Q^{-1}P$  $P_1$：真赤道坐标，  $P$：国天坐标，

⑥ 化矢量$P_1$为球坐标，经角：赤经$\alpha$，纬角：赤纬$\delta$

⑦ 如果求天体黄道坐标，→ 黄道系 $P_2 = R_1(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon)\,P_1$

平黄赤交角　倾角章动　（唯象给出）




⑧ 化$P_2$为球坐标，经角：黄经$\lambda$，纬角：黄纬$\beta$

(4) 求出天体关于地平坐标系基本物理量 $\vec{r}(t)$ 和速度 $\vec{v}(t)$

① 由测站大地坐标 $\lambda, \phi$ 计算地心坐标 $\vec{r}_{s0} = (x_{s0}, y_{s0}, z_{s0})^T$ 　$\lambda$ 从本初子午线算起

② 由真赤道系（中间赤道系）⟶ 国际地球参考系

基本方向 真春分点、　无转动原点、　$(e_1''', e_2''', e_3''')$

$(e_1''', e_2''', e_3''') = (e_1'', e_2'', e_3'')W(t)$

$\vec{r}_s$ — 中间赤道系　$\vec{r}_s = W(t)\vec{r}_{s0}$ — 地球参考系

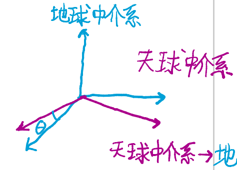
③ 计算天球中介系 — 天球历书原点、— 天球参考系变换矩阵

$Q(t) = R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s)$ 　（E、d、s 唯象）

(天)地球中介系基本方向为(天)地球历书原点，二者角距离为 $\theta$，由书(6.29)计算 (都是无转动原点) (自转角)

地球中介系 — 天球参考系变换矩阵

$Q_T = QR_3(-\theta)$ 　　$Q_T^{-1} = R_3(\theta)Q^{-1}$




天球中介系→地球中介系
绕 $e_3$ 逆时针转 $\theta$ 　$R_3(-\theta)$

④ 从月日火历表文件读得 t 时刻地心天球系 $\vec{r}_{p0}$，$\dot{\vec{r}}_{p0}$

⑤ 由③可有天体地球中介系向径 $\vec{r}_p = Q_T^{-1}\vec{r}_{p0}$

⑥ 天体站心向径 $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_s$

⑦ 由 $\tau = \dfrac{|\vec{r}_p(t-\tau) - \vec{r}_s(t)|}{c}$ 迭代计算光行时 $\tau$

⑧ 按①→⑦步重新计算可得天体天球中介系中位置 $\vec{r}_p(t)$，从而求出 $\vec{r}(t-\tau) \rightarrow \vec{P}_0 = \langle \vec{r}(t-\tau) \rangle$

由于 $\lambda$ 为天体子午面与地球参考系第一方向夹角，而格林尼治恒星时 GST 为本初子午面与地球第一方向夹角。
系

$LST = GST + (\lambda - GST) = \lambda$. 　($\lambda$ 与书(5.2)不同)

⑨ 由书(5.2)有 $\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_3(-\lambda)\vec{P}_0$

⑩ 由书(5.1)，$P = R_2(90° - \phi)P_1$ 　　$P_1$：时角系 → $P$：地平系

⑪ 化 P 为球坐标，经角 — 地平经度 $\alpha$，纬角 — 地平高度 $h$

这部分 2023年 没有讲

天体升落和中天时刻：

(1) 概述

在固天(惯性系)，天体基本物理量为 $\vec{r}(t)$，$\dot{\vec{r}}(t)$，由牛二导出。

(2) 时角坐标和与地平坐标系关系（由(5.1)）.

$$\underset{\text{时角}}{\begin{pmatrix} \cos\delta\cos H \\ \cos\delta\sin H \\ \sin\delta \end{pmatrix}} = R_2(90° - \phi)\underset{\text{地平}}{\begin{pmatrix} \cos h\cos\alpha \\ \cos h\sin\alpha \\ \sin h \end{pmatrix}}$$

由上式，有 $\sin h = \sin\phi\cos\delta + \cos\phi\cos\delta\cos H$.

又时角 → 真赤道系：

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} R_3(LST)\begin{pmatrix} \cos\delta\cos H \\ \cos\delta\sin H \\ \sin\delta \end{pmatrix}$$

$H = LST - \alpha = GST + \lambda - \alpha$

若 $\lambda, \delta, \alpha$ 为常数，$\Delta H = \Delta GST = -\dfrac{\Delta h\cos h}{\cos\phi\cos\delta\sin H}$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

第五课 天体力学基础知识

本课复习物理学研究方法，给出圆周运动的物理模型，基本方程和推论，讨论有大小的天体与引力场构成的系统

物理学研究方法

物理模型 → 数学模型 → 求解 → 物理量与时空的函数关系

与观测对比，不符合则改进

科学过程 —— 不断观测、不断改进物理模型的过程

物理模型 —— 物质世界的结构和演化

(机制,图像) 基本特点：由基本物理量描述

若物理量与时空的函数关系确定，可推演出所有相关物理量与时空的函数关系

数学模型 ——（作用与运动的关系的动力学方程）基本方程

求解条件：初始、边界、衔接条件 都是关于基本物理量的条件

质点：基本方程：牛顿定律

求解条件：初始位置和速度

常见物理模型（天体）

刚体（地球） 流体（理想流体，粘滞流体，湍流，磁流体）（星际介质、吸积盘、

弹性体、质点、处于非热平衡物体、质点组 宇宙：非热力学平衡物体

天体测量学内容

由物理模型的定义，建立合适的坐标系，观测物理量随时间的函数关系，将理论与观测/实验对比，限制物理模型，观测即天体测量学的内容。

天体力学内容

由于国际天球参考系为惯性系（至少为近似的），此时牛顿定律适用，容易建立数学模型求解。实际上为非惯性系（观测站），若给出观测站坐标系与国天系的变换关系，就能给出观测站基本物理量。

天体力学研究对象

1. 有形状、大小的天体
2. 可看作质点的天体
3. 它们的组合（质点组、刚体、流体、引力场）

天体力学发展历史 （不断观测、改进物理模型）

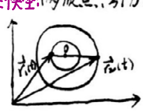
亚里士多德 → 托勒密 → 哥白尼 → 第谷 → 伽利略 → 开普勒 → 牛顿 → 拉格朗日 → ……

开普勒：三定律；牛顿：三定律及万有引力定律；拉普拉斯

圆周运动的研究 两质点彼此绕转，做圆周运动

(1) 基本物理量

物理模型：两质点、引力场。




$m_i$, $\vec{r}_i(t)$, $i=1,2$. 引力势 $\phi(\vec{r}, t)$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(2) 基本方程

二体问题

(3) 求解方程方法：结合初始条件求出 $\vec{r}(t)$, $\varphi(\vec{r},t)$，再求其他量

数学模型 (令 $\vec{r}=\vec{r}_2(t)-\vec{r}_1(t)$)

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = -\dfrac{\mu\vec{r}}{r^3} \quad (r=\text{const} \overset{=R}{}) \\ \vec{r}|_{t=0} = R\hat{r} \\ \dot{\vec{r}}|_{t=0} = v\hat{\theta} \end{cases}$$

其中 $\mu = G(m_1+m_2)$ 二质点的质心为惯性系(国际天球参考系)

$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{c}_1 t + \vec{c}_2$. ($\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$ 由初始条件定)

解出 $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$, $\phi(\vec{r},t)$. $\Rightarrow$ 所有相关物理量

由理论力学，$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

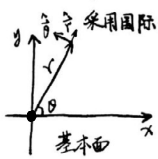
$$\Rightarrow \begin{cases} r^2\dot{\theta} = h \text{(常数)} \\ -\dfrac{\mu\vec{r}}{r^3} = -\dfrac{\mu}{r^2}\hat{r} = (\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\mu}{r^2} = \ddot{r}-r\dot{\theta}^2 = \ddot{r}-\frac{h^2}{r^3}$$

又 $\vec{r} = r\hat{r}$ $\quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

初始条件：$t=0$ 时 $r=R$, $\dot{\vec{r}} = v\hat{\theta}$ $\quad \Rightarrow r(t)=R$. $h = r^2\dot{\theta} = Rv$

圆周运动 $\Rightarrow \dot{r}=0 \Rightarrow \ddot{r}=0$ $\quad \Rightarrow h^2 = \mu R = R^2v^2 = R^4\omega^2$ $\quad \Rightarrow R^3\omega^2 = \mu = G(m_1+m_2)$

另一种方法证明：




采用国际天球参考系

$$\hat{r} = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad \hat{\theta} = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = R\hat{r} = \begin{pmatrix}R\cos\theta \\ R\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}} = R\dot{\hat{r}} = R\frac{d\hat{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \begin{pmatrix}-R\omega\sin\theta \\ R\omega\cos\theta\end{pmatrix} = R\omega\hat{\theta}$$

$$\ddot{\vec{r}} = R\ddot{\hat{r}} = -R\omega^2\hat{r}$$

(4) 应用

设卫星和地球绕质心做圆周运动，角速度为 $\omega$. 两者相距 $r_1+r_2=R$. $m_1 = m_{Earth}$, $m_2 = m_{satellite}$

则有 $R^3\omega^2 = Gm_1\left(1+\dfrac{m_2}{m_1}\right)$

(5) 质点 $m$，地球 $M$. 当质点由 $\vec{r}_A \to \vec{r}_B$ (相对地球) 系统状态由 $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$, $\varphi$ 描述 $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

引力做功 $W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$= \int_{r_A}^{r_B} -\frac{GmM}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{GMm}{r^3}\cdot r\,dr = -\int_{r_A}^{r_B}\frac{GMm}{r^2}dr = GMm\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

W 只与位置有关，与路径无关

—— 引力为保守力

定义 $r_A$, $r_B$ 处势能差 $W = V_g(r_A) - V_g(r_B)$

若定义无穷远处为势能零点，则 $V_g(r) = -\dfrac{GMm}{r}$

定义引力势：单位质量的引力势能，则 $\phi(r) = -\dfrac{GM}{r}$. 且可证明 $\vec{F}_g = -\nabla\phi$

(6) 卫星m ~~二体~~总能量

$E(r)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}$

圆轨道上有 $v^2=\frac{G(M+m)}{r}\overset{M\gg m}{\approx}\frac{GM}{r}$ . 代入上式得 $E(r)\approx-\frac{1}{2}\cdot\frac{GMm}{r}$

§ 天体为有限大小，系统基本物理量，基本方程，推论

一个刚性天体（有大小）与引力场系统

(1) 基本物理量

离散分布时 —— $m_i, \vec{r}_i$ $(i=1,2,\cdots,N)$

连续分布时 —— $\rho(\vec{r})$ , $\phi(\vec{r})$

(2) 基本方程

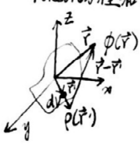
(i) 物质激发引力场（$\rho=0$时为 Laplace 方程）

$\nabla^2\phi=4\pi G\rho$ （Poisson 方程）

(ii) 引力场作用于物质

牛顿定律

Poisson方程和 Laplace 方程的推导：




$\vec{r}'$处 $dV$ 的质量元在 $\vec{r}$ 处产生的引力加速度 $d\vec{A}=\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}G\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'$

总的引力加速度 $\vec{A}=G\iiint_V\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'$

又有 $\vec{A}=-\nabla\phi$ . $\phi=-G\int\frac{\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'}{|\vec{r}'-\vec{r}|}$ （积分形式）

$\nabla_r\cdot\vec{A}=G\int\left[\nabla_r\cdot\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}\right]\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'$ （$\nabla_r$不作用于 $\rho(\vec{r}')$）

$\nabla_r\cdot\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}=-\frac{3}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}+\frac{3(\vec{r}'-\vec{r})\cdot(\vec{r}'-\vec{r})}{|\vec{r}'-\vec{r}|^5}$

当 $\vec{r}'\neq\vec{r}$ , 上式 $=0$

$\nabla_r\cdot\vec{A}=G\rho\iiint_{|\vec{r}'-\vec{r}|\leq h}\nabla_r\cdot\frac{(\vec{r}'-\vec{r})}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}d^3\vec{r}'$ 积分包括了 $\vec{r}'=\vec{r}$ 的那一点，所以是有值的 $(h\to0)$

$=-G\rho\iint\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}\cdot d\vec{S}'$ （Gauss 定律）

$=-G\rho\frac{h}{h^3}\cdot4\pi h^2$

$=-4\pi G\rho$

$\because\nabla^2\phi=-\nabla_r\cdot\vec{A}=4\pi G\rho$ （微分的形式）

特例：点源. $\rho(\vec{r})=m\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

$\phi(\vec{r})=-\frac{Gm}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

Possion 方程的另一种形式（引力场中的高斯定律）

$\oiint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=-4\pi Gm$

$4\pi G\iiint\rho d^3\vec{r}=\iiint\nabla^2\phi d^3\vec{r}=\oiint\nabla\phi\cdot d\vec{S}$

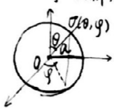
$\oiint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=-4\pi Gm$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(3) 求解的方法(由$\rho$求$\Phi$)

—— 联立求解基本方程(Poisson方程与牛顿方程)

例. 求解无限薄球壳的引力势




建立数学模型：

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = 0 \quad (r \neq a) \\ \phi|_{r=a^-} = \phi(a^+) \\ \phi|_{r=0}, \ \phi|_{r=\infty} \ 有限 \ (自然边界条件) \\ \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{a^+} - \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{a^-} = 4\pi G\sigma(\theta,\varphi) \end{cases}$$

衔接条件

由数理方程知识，解上方程，得

$r \leq a$. $\phi(r,\theta,\varphi) = -4\pi G a \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \sum_{m=-n}^{n} \frac{\sigma_{nm}}{2n+1} Y_n^m(\theta,\varphi)$

$r \geq a$. $\phi(r,\theta,\varphi) = -4\pi G a \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^{n} \frac{\sigma_{nm}}{2n+1} Y_n^m(\theta,\varphi)$

$\sigma_{nm}$ (展开系数)

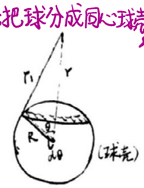
$$\sigma(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \sigma_{nm} Y_n^m(\theta,\varphi).$$

例. 任意形状刚体. (利用薄球壳的结果积分. 略).

例. 由引力势求引力

球对称引力场 等效于所有质量集中于球心的情形.
天体外部

先把球分成同心球壳




圆环面积 $ds = 2\pi R\sin\theta \cdot R d\theta$.

$V$为引力势. 则 $dV = -\frac{G\sigma ds}{r_1} = -\frac{G\cdot\sigma\cdot(2\pi R^2\sin\theta d\theta)}{r_1}$

其中 $\theta \in [0,\pi]$. $r_1 \in [r-R, r+R]$.

$r_1^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$. 取微分.

$r_1 dr_1 = rR\sin\theta d\theta$

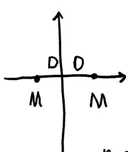
$\therefore dV = -\frac{G\sigma\cdot 2\pi R}{r} dr_1$

$V_{shell} = \int_{r-R}^{r+R} -\frac{G\sigma\cdot 2\pi R}{r} dr_1 = -\frac{G\sigma\cdot 4\pi R^2}{r} = -\frac{GM_{shell}}{r}$

$\therefore V_{sphere} = \sum -\frac{GM_{shell}}{r} = -\frac{G}{r}\sum M_{shell} = -\frac{GM_{sphere}}{r}$

也可由高斯定律推出

例：两个质量为M，距离为2D的天体，求引力.




$V = -GMm\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$

$r_1^2 = r^2 + D^2 + 2rD\cos\theta$

$r_2^2 = r^2 + D^2 - 2rD\cos\theta$

$r_1 \approx 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{r}\right)^2 - 2\frac{D}{r}\cos\theta\right] + \frac{3}{2}\left(\frac{D}{r}\right)^2\cos^2\theta$

$r_2 \approx 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{r}\right)^2 + 2\frac{D}{r}\cos\theta\right] + \frac{3}{2}\left(\frac{D}{r}\right)^2\cos^2\theta$

$V = -\frac{GMm}{r}\left[2 + \left(\frac{D}{r}\right)^2(3\cos^2\theta - 1)\right]$

$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta}.$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

## 第六课 二体问题

研究两质点体系(二体)与引力场系统，给出物理模型、基本物理量、基本方程、推论

两质点体系与引力场系统：

(1) 基本物理量

$m_i, \vec{r}_i \ (i=1,2)$ ，$\phi(\vec{r},t)$

(2) 基本方程（牛顿框架下）

a. 两质点对引力场作用与运动关系（两质点激发引力场）

$$\phi(\vec{r},t) = -\frac{Gm_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \overset{(6.3)}{-} \frac{Gm_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} \qquad (6.1)$$

b. 引力场对质点有力的作用，作用与运动关系（牛二律）

$$-m_1\nabla\phi_1(\vec{r}_1,t) = m_1\ddot{\vec{r}}_1$$
$$-m_2\nabla\phi_2(\vec{r}_2,t) = m_2\ddot{\vec{r}}_2 \qquad (6.2)$$

其中$\phi_1$，$\phi_2$不包括自身的引力场.

将(6.1)代入(6.2)，得

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = +\frac{Gm_1m_2}{r^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1) \qquad (6.4)$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = +\frac{Gm_1m_2}{r^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \qquad (6.5)$$ 其中 $r=|\vec{r}_1-\vec{r}_2|$

求解方法：先由(6.4),(6.5)求出$\vec{r}_1(t)$，$\vec{r}_2(t)$，再代入(6.1)得$\phi(\vec{r},t)$.

(3) 初始条件

$$\vec{r}_1|_{t=0} = \vec{r}_{10}, \quad \vec{r}_2|_{t=0} = \vec{r}_{20}$$
$$\dot{\vec{r}}_1|_{t=0} = \vec{v}_{10}, \quad \dot{\vec{r}}_2|_{t=0} = \vec{v}_{20} \qquad (6.6)$$

(4)（由基本方程得）推论

a. 动量积分（质心运动积分）

C.~~基本方程另一种形式~~.若

(6.4)+(6.5)： $m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0$

积分： $m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = \vec{P} \equiv (m_1+m_2)\frac{d\vec{r}_c}{dt}$

$\Rightarrow m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{C}_1 t + \vec{C}_2$

其中$\vec{P}$，$\vec{C}_1$，$\vec{C}_2$可由初始条件确定.

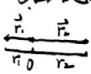
$\vec{r}_c = \frac{\vec{P}}{m_1+m_2}t + \vec{r}_{c0}$ . $\vec{r}_{c0}$也由初始条件确定. $\frac{m_1}{(1+\frac{m_2}{m_1})^2}$ ：$m_1$的约化质量

b. $\vec{r}_1-\vec{r}_2$表示两质点相对位置，导出关于$\vec{r}_1-\vec{r}_2$的基本方程.

(6.4)−(6.5)： $$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = -\frac{G(m_1+m_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \qquad (6.8)$$

若坐标系原点为天体之一，则此系为非惯性系.

c. 设两质点体系为孤立体系，则惯性系原点可取质心




$|\vec{r}_1-\vec{r}_2| = r_1+r_2$

由质心定义，$r_1+r_2 = r_1(1+\frac{r_2}{r_1}) = r_1(1+\frac{m_1}{m_2})$

可得 $m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}\hat{r}_1 = -\frac{Gm_1}{r_1^2}\cdot\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}\hat{r}_1$

Def. $M_{R_2} = \frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2} = \frac{m_2}{(1+\frac{m_1}{m_2})^2}$ 称为$m_2$的约化质量

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{GM_{R_2}}{r_1^2}\hat{r}_1 \qquad (6.9)$$

同理 $\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{GM_{R_1}}{r_2^2}\cdot\hat{r}_2$ (6.10)

其中 $M_{R_1} = \frac{m_1}{(1+\frac{m_2}{m_1})^2}$ 称为 $m_1$ 的约化质量

(6.8) (6.9) (6.10) 可统一写成 $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\hat{r}}{r^2}$，其中 $\mu = GM$.

若原点为一个天体，$M = m_1 + m_2$

若原点为质心，M 为施力天体的约化质量

d. 角动量积分（动量矩积分）

由上，$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}$

有 $\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}\times\vec{r} = 0$

$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$

$\Rightarrow \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{h} = const.$

$\vec{h}$：单位质量的角动量，称为比角动量

e. 比角动量与基本物理量的关系

$\vec{r} = r\hat{r}$

$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$v = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$

$\vec{h} = \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\times(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = r^2\dot{\theta}\hat{\omega}$ . $\vec{\omega} = \hat{r}\times\hat{\theta}$

$\vec{h}$ 为常矢量 $\Rightarrow \hat{\omega}$ 为常矢量，$r^2\dot{\theta} = h$

f. 面积速度与基本物理量关系


$n_A\,dt = |\frac{1}{2}\vec{r}\times\dot{\vec{r}}dt| = \frac{1}{2}h\,dt$

$\Rightarrow n_A = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$

g. 拉普拉斯矢量 $\vec{e}$ 的引入.

由 $\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}$,

$\ddot{\vec{r}}\times\vec{h} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{r}\times\vec{h}$

又 $\hat{r}\times\vec{h} = \hat{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \vec{r}(\hat{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\hat{r}\cdot\vec{r}) = \dot{r}\vec{r} - \dot{\vec{r}}r$

又 $\frac{d}{dt}(\frac{\vec{r}}{r}) = \frac{r\dot{\vec{r}} - \dot{r}\vec{r}}{r^2}$

$\therefore \hat{r}\times\vec{h} = -r^2\frac{d}{dt}(\frac{\vec{r}}{r}) = -r^2\frac{d\hat{r}}{dt}$

$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}\times\vec{h} = \mu\frac{d\hat{r}}{dt}$

$\vec{h}$ 为常矢量 $\therefore$ 积分得 $\dot{\vec{r}}\times\vec{h} = \mu(\hat{r} + \vec{e})$ （$\vec{e}$ = 常矢量）

$\Rightarrow \vec{e} = \frac{1}{\mu}\dot{\vec{r}}\times\vec{h} - \hat{r}$，称为 Laplace 矢量

将 $\vec{h} = \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$ 代入上式，得 $\vec{e} = \frac{1}{\mu}\dot{\vec{r}}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) - \hat{r} = (\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r})\vec{r} - \frac{r\dot{r}}{\mu}\dot{\vec{r}}$

$\vec{e}$ 为常矢量，与 t 无关

h. 能量积分

$$\frac{d^2\vec r}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\hat r$$

两边点乘 $\dot{\vec r}$ ($\vec v$)， $\frac{d^2\vec r}{dt^2}\cdot\frac{d\vec r}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\hat r\cdot\frac{d\vec r}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac12 v^2\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{\mu}{r}\right)\cdot\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right)$$

积分： $\frac12 v^2 - \frac{\mu}{r} = \varepsilon = const$ . $\varepsilon$为比能量，由初始条件决定

(上) 基本方程推论(第二部分) — 轨道方程

方案1：用$\vec e$推出轨道方程

$$\dot{\vec r}\times\vec h = \mu(\hat r + \vec e)$$

用$\vec r$点乘： $\vec r\cdot(\dot{\vec r}\times\vec h) = \mu(r + \vec r\cdot\vec e)$

$$\vec r\cdot\vec e = re\cos f = re\cos(\theta-\omega)$$

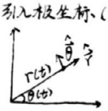
又 $\vec r\cdot(\dot{\vec r}\times\vec h) = \vec h\cdot(\vec r\times\dot{\vec r}) = h^2$

$$\Rightarrow r = \frac{h^2/\mu}{1+e\cos f} = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\omega)} \quad \text{--- 圆锥曲线}$$

方案2：以分量形式导出轨道方程

$$\ddot{\vec r} = -\frac{\mu}{r^3}\vec r$$

引入极坐标 $(r(t), \theta(t))$




$$\ddot{\vec r} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\hat r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\hat\theta$$

代入得 $\begin{cases}\ddot r - r\dot\theta^2 = -\frac{\mu}{r^2}\\ \frac1r\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot r - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2}\\ h = r^2\dot\theta\end{cases}$

$u=\frac1r$，则

令 $\dot r = \frac{d}{dt}\left(\frac1u\right) = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac1u\right) = \frac{h}{r^2}\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{du}{d\theta}$

$$\ddot r = \frac{d}{dt}\dot r = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\dot\theta\frac{d}{d\theta}\left(\frac1u\right)\right) = -\frac{h}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(hu^2\cdot 1\cdot\frac{1}{u^2}\right)\frac{du}{d\theta} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

代入 $\ddot r - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}$ (Binet 公式)

解得 $u = \frac{\mu}{h^2}[1+e\cos(\theta-\omega)]$.

e：偏心率， ω：近点角距 —— 由初始条件定

$\Rightarrow r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\omega)}$ . $p = \frac{h^2}{\mu}$ (半通径)

← 圆锥曲线方程

[讨论]： $e=0$. $p=a$ . 圆

$0<e<1$. $p=a(1-e^2)$ 椭圆

$e=1$. $p=2a$. 抛物线

$e>1$ $p=a(e^2-1)$ 双曲线

直角坐标系下轨道方程：

$r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\omega)}$ . $x = r\cos(\theta-\omega)$ $y = r\sin(\theta-\omega) \Rightarrow x^2+y^2 = (p-ex)^2$

$\Rightarrow (1-e^2)x^2 + 2pex + y^2 = p^2$

$e=0$： $x^2+y^2=p^2$

$e=1$： $-2px = y^2-p^2$

$e<1$. $\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$e>1$. $\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

见《天》3.11

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http: www.ustc.edu.cn

不同轨道下的参量

因为基本物理量 $\vec{r}(t)$ ($\dot{\vec{r}}(t)$) → 轨道 → 一些参量

1) 椭圆轨道 ($0<e<1$)

当 $e=0$，由前述，$r=p=a$.

$p=\frac{h^2}{\mu}$ ⇒ $v=\sqrt{\frac{\mu}{r}}=\sqrt{\frac{\mu}{a}}$

对椭圆，当 $f=\pi$，($f=\theta-\omega$)，$r_A=\frac{p}{1-e}$，$f=0$ 时 $r_B=\frac{p}{1+e}$，$a=\frac{r_A+r_B}{2}$ ⇒ $p=a(1-e^2)$

开普勒第二定律：$n_A=\frac{h}{2}$

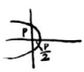
椭圆面积，$A=\pi ab$ ∴ $n_A\cdot T=\pi ab=\frac{h}{2}\cdot T$ $n_A=\frac{h}{2}$

Def. 平均角速度 $n=\frac{2\pi}{T}=\frac{h}{ab}$.

又 $\frac{h}{b}=\frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{a\sqrt{1-e^2}}=\sqrt{\frac{\mu}{a}}$

⇒ $a^3n^2=\mu$ ( Kepler's third law)

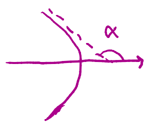
2) 抛物线轨道 ($e=1$)

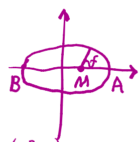


$r=\frac{p}{1+e\cos f}=\frac{p}{1+\cos f}$

近心距 $q=\frac{p}{2}$. 当 $f=\frac{\pi}{2}$，$r=p$ (半通径)

3) 双曲线轨道





$r=\frac{p}{1+e\cos f}$. $p=a(e^2-1)$.

当 $r\to\infty$. $1+e\cos f=0$ def. $\alpha=f$. → $\alpha=\arccos(-\frac{1}{e})$

$MA \xrightarrow{f=0} \frac{p}{1+e}=\frac{a(e^2-1)}{1+e}=a(e-1)$

$MB = \frac{p}{1-e}=\frac{a(e^2-1)}{1-e}=a(e+1)$

(6) 基本方程的推论 (第三部分) —— 能量积分与活力公式

下面证明：$\varepsilon=\frac{1}{2}v^2-\frac{\mu}{r}=\frac{\mu(e^2-1)}{2p}$ (常数) (6.23)

$\vec{r}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{f}\hat{\theta}$ $f$: 真近点角

又 $r=\frac{p}{1+e\cos f}$ ∴ $\dot{r}=\frac{pe\sin f}{(1+e\cos f)^2}\dot{f}$

且 $h=r^2\dot{f}$ ⇒ $\dot{f}=\frac{h}{r^2}=\frac{h^2}{p^2}(1+e\cos f)^2$ ⇒ $\dot{r}=\frac{h}{p}e\sin f=\sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin f$ $p=\frac{h^2}{\mu}$ (定义)

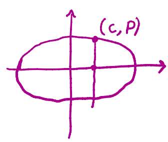
比角动量

$r\dot{f}=\frac{h}{r}=\frac{h}{p}(1+e\cos f)=\sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e\cos f)$

$v^2=\dot{r}^2+(r\dot{f})^2=\frac{\mu}{p}[e^2\sin^2 f+e^2\cos^2 f+1+2e\cos f]=\frac{\mu}{p}(1+2e\cos f+e^2)$

单位质量能量 $=\frac{1}{2}v^2-\frac{\mu}{r}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu}{p}(1+e^2+2e\cos f)-\frac{\mu}{p}(1+e\cos f)$

$=\frac{\mu}{2p}(e^2-1)$ (6.24) (活力公式)

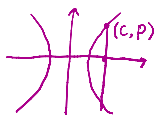


[讨论]

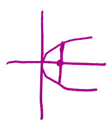
(1) 对椭圆. $p=a(1-e^2)$. $\varepsilon=\frac{\mu}{2a(1-e^2)}(e^2-1)=-\frac{\mu}{2a}$

(2) 对双曲线. $\varepsilon=\frac{\mu}{2a}$

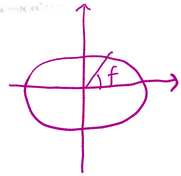
$p=a(e^2-1)$ 见天 3.35



(3) 对抛物线，$e=1$，$\varepsilon=0$



[练习] 证明：$\dot{\vec{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\begin{pmatrix} -\sin f \\ e+\cos f \end{pmatrix}$




证：$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{f}\hat{\theta}$

$$= \dot{r}\begin{pmatrix} \cos f \\ \sin f \end{pmatrix} + r\dot{f}\begin{pmatrix} -\sin f \\ \cos f \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin f\begin{pmatrix} \cos f \\ \sin f \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1+e\cos f)\begin{pmatrix} -\sin f \\ \cos f \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\begin{pmatrix} -\sin f \\ e+\cos f \end{pmatrix} \qquad (6.25)$$

## 第七课 Kepler方程

本课研究二体问题一个重要推论 —— Kepler方程（椭圆、双曲线、抛物线）及求解

偏近点角引入和开普勒方程（椭圆）：

$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}$ h = 比角动量

将活力公式 $v^2 = \mu(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})$ 代入，注：$h = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$ 可得 $\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} = \mu(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})$

$$\dot{r}^2 = -\frac{\mu a(1-e^2)}{r^2} + \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu}{ar^2}\left[a^2e^2 - (r-a)^2\right]$$

定义平均角速度 $n = \frac{2\pi}{T}$.

开普勒第三定律：$n^2a^3 = \mu = G(m_1+m_2)$

$\Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{\mu}{ar^2}[a^2e^2 - (r-a)^2]$

$\Rightarrow n\,dt = \frac{r\,dr}{a\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}$ $\Rightarrow \dot{r}^2r^2 = n^2a^2[a^2e^2-(r-a)^2]$

$\Rightarrow \dot{r}r = na[a^2e^2-(r-a)^2] \Rightarrow n\,dt = \frac{r\,dr}{a\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}$

引入 $r = a(1-e\cos E)$

容易有 $E - e\sin E = nt + M_0 \equiv n(t-\tau) \equiv M$（平近点角）

$f = \theta - \omega$：真近点角 ω为常数 E：偏近点角

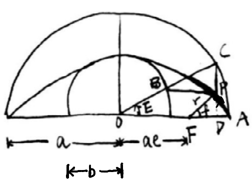
又由 $r = \frac{p}{1+e\cos f} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$

$\Rightarrow re\cos f = a(1-e^2) - r = a(1-e^2) - a(1-e\cos E)$

$\Rightarrow r\cos f = a(\cos E - e)$ $r = a(1-e\cos E)$

$$r\sin f = \sqrt{r^2 - r^2\cos^2 f} = \sqrt{a^2\left[(1-e\cos E)^2 - (\cos E - e)^2\right]} = a\sqrt{1-e^2}\sin E = b\sin E \qquad (7.3)$$

由上式可得E与f的几何关系，如图所示.




$r\cos f = FD = OD - OF = OC\cos E - OF$
$= a\cos E - ae = a(\cos E - e)$

$r\sin f = PD = b\sin E$

练习1：证明以偏近点角表达中心距和真近点角的关系式

$$r=a(1-e\cos E) \qquad \begin{pmatrix}\cos f\\ \sin f\end{pmatrix}=\frac{1}{1-e\cos E}\begin{pmatrix}\cos E-e\\ \sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix} \qquad \tan\frac{f}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$$

证明：由E的定义有 $r=a(1-e\cos E)$.

又由 $r\cos f=a(\cos E-e)$，$r\sin f=b\sin E$

$$\Rightarrow \cos f=\frac{a(\cos E-e)}{r}=\frac{\cos E-e}{1-e\cos E} \qquad (7.4)$$

$$\sin f=\frac{b\sin E}{r}=\frac{b\sin E}{a(1-e\cos E)}=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E} \qquad (7.5)$$

$$\tan\frac{f}{2}=\frac{\sin f}{1+\cos f}=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{\cos E-e+1-e\cos E}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\frac{\sin E}{1+\cos E}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{E}{2}$$

练习2：证明从真近点角表达偏近点角的关系式：

$$\begin{pmatrix}\cos E\\ \sin E\end{pmatrix}=\frac{1}{1+e\cos f}\begin{pmatrix}\cos f+e\\ \sqrt{1-e^2}\sin f\end{pmatrix}$$

证明：由(7.4) $\cos f(1-e\cos E)=\cos E-e \quad \Rightarrow \cos E=\frac{1}{e\cos f+1}(\cos f+e)$

由(7.5) $\sin f=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E} \quad \Rightarrow \sin E=\frac{1}{1+e\cos f}\cdot\sqrt{1-e^2}\sin f$

练习3：证明速度向量：$\dot{\vec r}=a\dot E\begin{pmatrix}-\sin E\\ \sqrt{1-e^2}\cos E\end{pmatrix}$ $\qquad r=a(1-e\cos E)$

证明：取天球参考系(惯性系)

$$\vec r=\begin{pmatrix}r\cos f\\ r\sin f\end{pmatrix}=\frac{r}{1-e\cos E}\begin{pmatrix}\cos E-e\\ \sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos E-ae\\ a\sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec r}=\begin{pmatrix}-a\dot E\sin E\\ a\sqrt{1-e^2}\dot E\cos E\end{pmatrix}=a\dot E\begin{pmatrix}-\sin E\\ \sqrt{1-e^2}\cos E\end{pmatrix}$$

练习4：动量矩(角动量) $h=a^2\sqrt{1-e^2}(1-e\cos E)\dot E=br\dot E$

证明：$h=r^2\dot f$ 又 $r=a(1-e\cos E)$

由(7.5) $\cos f\dot f=\sqrt{1-e^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin E}{1-e\cos E}\right)=\sqrt{1-e^2}\frac{\cos E\dot E-e\dot E}{(1-e\cos E)^2}$

由(7.4) $\cos f\dot f=\dot f\frac{\cos E-e}{1-e\cos E}$

$$\Rightarrow \dot f=\frac{\sqrt{1-e^2}\dot E}{1-e\cos E}$$

$$\therefore h=r^2\dot f=a^2(1-e\cos E)^2\cdot\frac{\sqrt{1-e^2}\dot E}{1-e\cos E}=a^2\sqrt{1-e^2}(1-e\cos E)\dot E \qquad (7.6)$$

练习5：证明偏近点角变率 $\dot E$ 满足：$(1-e\cos E)\dot E=n$

证明：对t时刻的开普勒方程求导：

$$E-e\sin E=nt+M_0 \Rightarrow \dot E-e\cos E\dot E=n \Rightarrow (1-e\cos E)\dot E=n$$

关于天球参考系(惯性系)任一基本物理量 $\vec r(t)$ ($\dot{\vec r}(t)$) 的推导：

先求出轨道坐标系的基本物理量 $\vec r(t)$ ($\dot{\vec r}(t)$)，然后由两坐标系的变换关系，求出天球坐标系的基本物理量，后可求出任意坐标系的基本物理量.

下求轨道系的 $\vec r(t)$ ($\dot{\vec r}(t)$)，它们由初始条件决定，具体结果由 $a, e, M_0$ 决定.

由 $a, e, M_0$ 求 $\vec r$ ($\dot{\vec r}$) 的步骤：

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(1) $a^3 n^2 = \mu \Rightarrow n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$

(2) 由 $M = M_0 + n(t-t_0) \Rightarrow M$

(3) 解开普勒方程 $E - e\sin E = M \Rightarrow E$

(4) 由 $\vec{r} = a\begin{pmatrix} \cos E - e \\ \sqrt{1-e^2}\sin E \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}$

(5) 计算 $r = |\vec{r}|$

(6) $\dot{\vec{r}} = a\dot{E}\begin{pmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1-e^2}\cos E \end{pmatrix}$ 求出速度 $\dot{\vec{r}}$

练习6：证明 $\frac{df}{dM} = \sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2$

证明：$E - e\sin E = M \Rightarrow \frac{dM}{dE} = 1 - e\cos E \Rightarrow \frac{dE}{dM} = \frac{1}{1-e\cos E}$

由练习4，$\dot{f} = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\dot{E}}{1-e\cos E} \Rightarrow \frac{df}{dE} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}$

$\therefore \frac{df}{dM} = \frac{df}{dE}\cdot\frac{dE}{dM} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos E)^2} = \sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2$

为了求轨道坐标系的基本物理量 $\vec{r}(t)$（$\dot{\vec{r}}(t)$），求解 Kepler 方程数值解：

a. 简单求解法

初值 $E_0 = M$，第 $n$ 次与 $n-1$ 次迭代值有如下公式：$E_n = M + eE_{n-1}$ $E = M + e\sin E \approx M + eE$

此法简单，但在 $e$ 接近 1 时收敛较慢

b. 牛顿求解法

设 $f(E) = E - e\sin E - M$（注意：与书上不同，书上 $f(E) = M - E + e\sin E$）

求解 Kepler 方程即求 $f(E) = 0$ 的根。

一般，取初值 $E_0 = M$，第 $n$ 次与第 $n-1$ 次迭代值的关系：$E_n = E_{n-1} + \Delta E$

其中 $\Delta E$ 由下式决定：

$f(E_n) = f(E_{n-1} + \Delta E) = f(E_{n-1}) + f'(E_{n-1})\Delta E + O(\Delta E^2) \approx 0$

即 $\Delta E = -\frac{f(E_{n-1})}{f'(E_{n-1})} = -\frac{E_{n-1} - e\sin E_{n-1} - M}{1 - e\cos E_{n-1}}$

引入 Kepler 方程后椭圆轨道的一些参数：

$P,\ e,\ \omega,\ a,\ h,\ T$(或$n$)，$f, M, E, \tau$(或$M_0$)

它们之间的关系：$h = \sqrt{\mu P} = \sqrt{\mu(1-e^2)a}$

$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = n^2 a^3 = \mu = G(m_1 + m_2)$

$E - e\sin E = nt + M_0 = n(t-\tau) = M$

$f = \theta(t) - \omega$

$r(t) = a(1 - e\cos E(t))$

$r(t) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta(t) - \omega)}$

其中含 $r(t)$、$\theta(t)$ 的量中有初始条件参数：

$r|_{t=0} = r_0$，$\theta|_{t=0} = \theta_0$

$\dot{r}|_{t=0} = v_0$，$\dot{\theta}|_{t=0} = \omega_0$

注意：$f, E$ 中含 $a, e, t$

$M$ 中含 $a, \tau, t$.

月夜/color of the ink

双曲线轨道

(1) 积分常数

$e, h, E_h$(相当于偏近点角), $f, p, n, \tau$ 由初始条件给定

(2) 开普勒方程

$(e>1)$

$$r=\frac{p}{1+e\cos f} \Rightarrow \dot r=\frac{pe\sin f\,\dot f}{(1+e\cos f)^2}=\frac{r^2}{p}e\sin f\,\dot f=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,e\sin f$$

$$\dot r^2=\frac{\mu}{p}e^2\sin^2 f=\frac{\mu}{p}\left(e^2-\left(\frac{p}{r}-1\right)^2\right)=\frac{\mu}{ar^2}\left[(r+a)^2-a^2e^2\right]$$

另一种方法：

$$v^2=\dot r^2+r^2\dot\theta^2=\dot r^2+\frac{h^2}{r^2}$$

活力公式 $\mu\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right)$

故 $\dot r^2+\frac{h^2}{r^2}=\mu\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right)$

它与上面划线式等价

如何解方程：引入平运动轨道频率 $\nu$．定义：$\nu^2a^3=\mu=G(m_1+m_2)$

有 $\nu\,dt=\frac{r\,dr}{a\sqrt{(a+r)^2-a^2e^2}}$，引入偏近点角：$r(t)=a(e\cosh E_h-1)$

将此式代入积分式积分，得

$$e\sinh E_h-E_h=\nu(t-\tau)\quad(\text{双曲轨道的开普勒方程})$$

(3) 在因断天球参考系的基本物理量 $\vec r(t)$，可求出 $\vec v(t)=\dot{\vec r}(t)$，比角动量 $\vec h=\vec r\times\dot{\vec r}$

证明：$\vec r=-a\begin{pmatrix}\cosh E_h-e\\ -\sqrt{e^2-1}\sinh E_h\end{pmatrix}$　$\dot{\vec r}=-a\dot E_h\begin{pmatrix}\sinh E_h\\ -\sqrt{e^2-1}\cosh E_h\end{pmatrix}$

证明：$\vec r=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos f\\ r\sin f\end{pmatrix}$

又 $r=\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos f}$

$\Rightarrow re\cos f=a(e^2-1)-r=a(e^2-1)-a(e\cosh E_h-1)=ae^2-ae\cosh E_h$

$\Rightarrow r\cos f=ae-a\cosh E_h$

又 $r=a(e\cosh E_h-1)$

$\Rightarrow r\sin f=\sqrt{r^2-r^2\cos^2 f}=a\sqrt{e^2-1}\sinh E_h$

$\therefore \vec r=\begin{pmatrix}r\cos f\\ r\sin f\end{pmatrix}=-a\begin{pmatrix}\cosh E_h-e\\ -\sqrt{e^2-1}\sinh E_h\end{pmatrix}$

求导易有 $\dot{\vec r}=-a\dot E_h\begin{pmatrix}\sinh E_h\\ -\sqrt{e^2-1}\cosh E_h\end{pmatrix}$

比角动量 $\vec h=\vec r\times\dot{\vec r}$

$$=-a\begin{pmatrix}\cosh E_h-e\\ -\sqrt{e^2-1}\sinh E_h\end{pmatrix}\times(-a\dot E_h)\begin{pmatrix}\sinh E_h\\ -\sqrt{e^2-1}\cosh E_h\end{pmatrix}$$

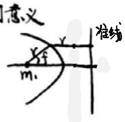
$$=a^2\sqrt{e^2-1}\,(e\cosh E_h-1)\dot E_h\cdot\hat{\omega}\qquad(\hat\omega=\hat i\times\hat j)$$

抛物线 Kepler 方程

(1) 基本积分常数

$e=1$, $f$, $\vec n$, $p$, $h$, $\tau$ 由初始条件决定

(2) 几何意义




(3) 基本方程推论

$$r=\frac{p}{1+\cos f}=\frac{p}{2}\sec^2\frac{f}{2}\qquad(7.13)$$

令 $E_p=\tan\frac{f}{2}$　(7.14)

$$r=q(1+E_p^2)$$

其中 $q=p/2$，为近心距，$f$ 为真近点角

对(7.14)求导 $\dot f=\frac{2\dot E_p}{1+E_p^2}$　(7.15)

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

又 $h=\sqrt{\mu p} = r^2\dot\theta = r^2\dot f = r^2 \frac{2\dot E_p}{1+E_p^2} = q^2(1+E_p^2)\cdot 2\dot E_p$ , $h=\sqrt{\mu p}=\sqrt{2\mu q}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}\,dt = (1+E_p^2)\,dE_p$ (7.16) 积分得 $\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t-t_0) = E_p + \frac{E_p^3}{3}$

记 $n_p \equiv \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} = \frac12\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}$ , $M_p \equiv n_p(t-t_0)$

则 (7.16) $\Rightarrow M_p = \frac12 E_p + \frac16 E_p^3$ —— 抛物线情况下的Kepler方程

练习：证明 $\dot E_p = \frac1r\sqrt{\frac{\mu}{p}}$ , $r\dot r = \sqrt{\mu p}\,E_p$

证明：由(7.16) $\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} = (1+E_p^2)\dot E_p$

$\therefore \dot E_p = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}}{1+E_p^2} = \frac{q}{r}\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} = \frac1r\sqrt{\frac{\mu}{p}}$   $r=q(1+E_p^2)$

$\dot r = q\cdot 2E_p\cdot\dot E_p = q\cdot 2E_p\cdot\frac1r\sqrt{\frac{\mu}{p}}$

$\Rightarrow r\dot r=\sqrt{\mu p}\,E_p$

(P51)练习. 若 $\vec r_1,\vec r_3$ 为抛物线轨道两个向径, $\vec s=\vec r_3-\vec r_1$ , $r_1,r_3,s$ 分别为它们的长度. 约定 $0\le f_3-f_1\le\pi$ .

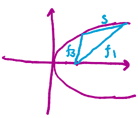

$0\le f_3-f_1\le\pi$

求证 (讲义5.59): $\frac{q}{\sqrt{r_1r_3}}(1+E_{p1}E_{p3}) = \cos\frac{f_3-f_1}{2}$   见5.59~5.62

证明: $1+E_{p1}E_{p3} = 1+\tan\frac{f_1}{2}\tan\frac{f_3}{2} = \frac{\tan\frac{f_1}{2}-\tan\frac{f_3}{2}}{\tan(\frac{f_1}{2}-\frac{f_3}{2})}$

又 $r=q(1+E_p^2)$ $\Rightarrow \sqrt{r_1r_3} = q\sqrt{(1+E_{p1}^2)(1+E_{p3}^2)}$

$\therefore \frac{q}{\sqrt{r_1r_3}}(1+E_{p1}E_{p3}) = \frac{\frac{\tan\frac{f_1}{2}-\tan\frac{f_3}{2}}{\tan(\frac{f_1}{2}-\frac{f_3}{2})}}{\sqrt{(1+E_{p1}^2)(1+E_{p3}^2)}}$




$E_p=\tan\frac{f}{2}$

代入 $1+E_{p1}^2=\frac{1}{\cos^2\frac{f_1}{2}}$ , $1+E_{p3}^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{f_3}{2}}$

整理得 $\frac{q}{\sqrt{r_1r_3}}(1+E_{p1}E_{p3}) = \cos\frac{f_3-f_1}{2}$

求证 (讲义5.60): $2q(1+E_{p3}E_{p1}) = \sqrt{(r_1+r_3+s)(r_1+r_3-s)}$

证明: $\vec s=\vec r_3-\vec r_1$

$s=\sqrt{\vec s\cdot\vec s} = \sqrt{r_3^2+r_1^2-2\vec r_1\cdot\vec r_3} = \sqrt{r_1^2+r_3^2-2r_1r_3\cos(f_3-f_1)}$

又 $\sqrt{(r_1+r_3+s)(r_1+r_3-s)} = \sqrt{(r_1+r_3)^2-s^2} = \sqrt{2r_1r_3[1+\cos(f_3-f_1)]} = 2\sqrt{r_1r_3}\cos\frac{f_3-f_1}{2}$

$=2\sqrt{r_1r_3}\cdot\frac{q}{\sqrt{r_1r_3}}(1+E_{p1}E_{p3}) = 2q(1+E_{p1}E_{p3})$

求证 (5.61) $E_{p3}-E_{p1} = \frac{1}{\sqrt{2q}}(\sqrt{r_1+r_3+s}-\sqrt{r_1+r_3-s})$

证明: 即要证 $(E_{p3}-E_{p1})^2 = \frac{1}{2q}(2r_1+2r_3-2\sqrt{(r_1+r_3+s)(r_1+r_3-s)})$

[$r=q(1+E_p^2)$]  右边 $=\frac{1}{2q}[2q(1+E_{p1}^2)+2q(1+E_{p3}^2)-4q(1+E_{p1}E_{p3})]$

$=\frac{1}{2q}\cdot 2q(E_{p1}^2-2E_{p1}E_{p3}+E_{p3}^2)$

$=(E_{p1}-E_{p3})^2$

= 左边

#

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

求证 (5.62) $6\sqrt{\mu}(t_3-t_1)=(r_1+r_3+s)^{3/2}-(r_1+r_3-s)^{3/2} \triangleq l_1^3 - l_2^3$

证明: 右边 $=(l_1-l_2)(l_1^2+l_1l_2+l_2^2)$

$=(\sqrt{r_1+r_3+s}-\sqrt{r_1+r_3-s})(2r_1+2r_3+\sqrt{(r_1+r_3+s)(r_1+r_3-s)})$

$=\sqrt{2q}(E_{p_3}-E_{p_1})[2q(1+E_{p_1}^2)+2q(1+E_{p_3}^2)+2q(1+E_{p_1}E_{p_3})]$

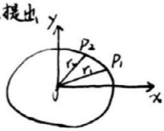
$=(2q)^{3/2}(E_{p_3}-E_{p_1})(3+E_{p_1}^2+E_{p_3}^2+E_{p_1}E_{p_3})$

$=2q\sqrt{2q}[3(E_{p_3}-E_{p_1})+E_{p_3}^3-E_{p_1}^3] = 2q\sqrt{2q}\,3\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t_3-t_1)=6\sqrt{\mu}(t_3-t_1)$

Kepler方程: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t-\tau)=\frac{1}{2}E_p+\frac{1}{6}E_p^3$ . 代入可证明右边=左边

椭圆运动中的一个重要推论 —— Lamber 定理

(1) 问题提出




$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

求天体由$P_1$运动至$P_2$所用时间$\Delta t$

(2) 求解

由Kepler方程，在$t_1$, $t_2$时刻，有

$nt_1=E_1-e\sin E_1$

$nt_2=E_2-e\sin E_2$

$\Rightarrow n\Delta t = E_2-E_1-2e\cos\frac{E_2+E_1}{2}\sin\frac{E_2-E_1}{2}$

引入新变量 $\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=e\cos\frac{E_1+E_2}{2}$ $e\cos(\frac{E_1+E_2}{2})<1$, 故可以作代换

$\alpha_2-\alpha_1=E_2-E_1$

则有 $n\Delta t=\alpha_2-\alpha_1-2\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$

$=\alpha_2-\alpha_1-(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)$

若新变量$\alpha_1$, $\alpha_2$能表示为$r_1$, $r_2$, $a$的函数，问题得解

(3) 一些有用的公式的证明

a. $r_1+r_2=2a(1-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2})$ (7.19)

证明: ∵ $r_1=a(1-e\cos E_1)$

$r_2=a(1-e\cos E_2)$

∴ $r_1+r_2=a(2-e\cos E_1-e\cos E_2)=a(2-2e\cos\frac{E_1+E_2}{2}\cos\frac{E_1-E_2}{2})=2a(1-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2})$

b. 弦长 $P_1P_2=2a\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$ (7.20)

证明: $\vec{P_1P_2}=\vec{r_2}-\vec{r_1}=(r_2\cos f_2-r_1\cos f_1)\vec{i}+(r_2\sin f_2-r_1\sin f_1)\vec{j}$

∴ $P_1P_2=\sqrt{(r_2\cos f_2-r_1\cos f_1)^2+(r_2\sin f_2-r_1\sin f_1)^2}=a\sqrt{(\cos E_2-\cos E_1)^2+(1-e^2)(\sin E_2-\sin E_1)^2}$

又 $\begin{pmatrix} r\cos f\\ r\sin f\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\cos E-e\\ \sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix}$

$=2a\sqrt{\sin^2\frac{E_2-E_1}{2}\sin^2\frac{E_2+E_1}{2}+(1-e^2)\sin^2\frac{E_2-E_1}{2}\cos^2\frac{E_2+E_1}{2}}$

代入得 $|P_1P_2|^2=4a^2\sin^2\frac{E_2-E_1}{2}(1-e^2\cos^2\frac{E_1+E_2}{2})=4a^2\sin^2\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\sin^2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$

$\Rightarrow P_1P_2=2a\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.

c. $\sin\frac{\alpha_2}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1+r_2+P_1P_2}{a}}$ (7.21)

$\sin\frac{\alpha_1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a}(r_1+r_2-P_1P_2)}$ (7.22)

证明：(7.21)：右边 $=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)+2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\alpha_2}=\sin\frac{\alpha_2}{2}=$ 左边. #

同理可证(7.22)

## 第八课 状态矢量、轨道根数、星历表计算

本课求解二体运动的基本物理量，其中参数为轨道根数，由初始条件决定，状态参量为轨道根数的函数

若已知状态参量，可求出轨道根数，反之亦然.

由基本物理量，可求出星历表

[复习]

· 怎样求任意坐标系下的基本物理量？ $(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t))$.

先在惯性系(国际天球参考系)中求 $\vec{r}(t)$（由牛顿定律），后利用给定坐标系与国天系的坐标变换关系，求给定坐标系的 $\vec{r}(t)$，$\dot{\vec{r}}(t)$.

几种坐标系：

(1) 国际天球参考系，

(2) 轨道坐标系，

(3) 黄道坐标系

变换关系，

(1) 轨道系与黄道系

$(\hat{p},\hat{q},\hat{w})\leftarrow(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3)$

第一步：$(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3)$ 绕 $\hat{e}_3$ 逆转 $\Omega$ 至 $(N,N',\hat{e}_3)$.

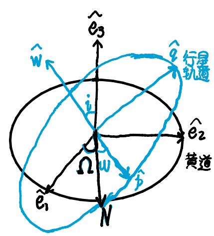
$(N\ N'\ \hat{e}_3)=(\hat{e}_1\ \hat{e}_2\ \hat{e}_3)R_3(-\Omega)$

第二步：$(N\ N'\ \hat{e}_3)$ 绕 $N$ 逆转 $i$ 至 $(N\ N''\ \hat{w})$

$(N\ N''\ \hat{w})=(N\ N'\ \hat{e}_3)R_1(-i)$

第三步：$(N\ N''\ \hat{w})$ 绕 $W$ 逆转 $\omega$ 至 $(\hat{p}\ \hat{q}\ \hat{w})$

$(\hat{p}\ \hat{q}\ \hat{w})=(N\ N''\ \hat{w})R_3(-\omega)$




总变换：$(\hat{e}_1\ \hat{e}_2\ \hat{e}_3)R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega)=(\hat{p}\ \hat{q}\ \hat{w})$

$\hat{w}=(\sin i\sin\Omega\quad -\sin i\cos\Omega\quad \cos i)^T$

$\hat{e}_3=(\sin i\sin\omega\quad \sin i\cos\omega\quad \cos i)^T$

坐标变换 $\vec{r}_{ec}=R(\Omega,i,\omega)\vec{r}$

$\dot{\vec{r}}_{ec}=R(\Omega,i,\omega)\dot{\vec{r}}_{ec}$

(2) 天球系与黄道系

$\vec{r}_{eq}=R(-\varepsilon_0)\vec{r}_{ec}$ $\varepsilon_0$：历元黄赤交角

(3) 天球系与轨道系($\vec{r}$)

$\because \vec{r}_{ec}=R(\Omega,i,\omega)\vec{r}$

$\therefore \vec{r}_{eq}=R(-\varepsilon_0)R(\Omega,i,\omega)\vec{r}$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

注意，由初始条件确定轨道系中 $(a, e, M)$

$\Rightarrow \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)$（轨道系）$\Rightarrow \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)$（固天系）$\Rightarrow \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)$（任意坐标系）

由关于天球系的状态参量 $\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)$ 求轨道根数 $a, e, M, \omega, \Omega, i$.

二体问题有6个初始条件，

可确定 $\vec{r} = \vec{r}(a, e, M, \Omega, \omega, i; t)$，$\dot{\vec{r}}$　基本物理量是轨道根数的函数

> 由状态矢量 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 计算轨道根数 $a, e, M, \omega, \Omega, i$.（求反函数）

对椭圆轨道 (a) 已知 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 可求 $r = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$，$v^2 = \dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}$

由活力公式 $a = \dfrac{1}{\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}}$ $\Rightarrow a$　(8.6)

(b) 计算平运动角速度

$n = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}}$

(c) 求偏心率 $e$ 和平近点角 $E$

由 $r = a(1 - e\cos E)$

$\Rightarrow e\cos E = 1 - \dfrac{r}{a}$

又 $\vec{r} = a\begin{pmatrix}\cos E - e \\ \sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix}$，$\dot{\vec{r}} = a\dot{E}\begin{pmatrix}-\sin E \\ \sqrt{1-e^2}\cos E\end{pmatrix}$

$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = a^2\dot{E}\sin E(1 - e\cos E)e$

又 $(1 - e\cos E)\dot{E} = n = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}}$

$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = a^2 e\sin E\sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\mu a}\, e\sin E$

$e\sin E = \dfrac{1}{\sqrt{\mu a}}\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu a}} r\dot{r}$　(8.9)

$\Rightarrow E, e$

(4) 由开普勒方程，$M = E - e\sin E$ $\Rightarrow M$

(5) 由真近点角公式求 $f$：

$\begin{pmatrix}\cos f \\ \sin f\end{pmatrix} = \dfrac{1}{1 - e\cos E}\begin{pmatrix}\cos E - e \\ \sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix}$　(8.10)

(6) 利用 $R(\varepsilon_0)$ 求出黄道系状态参量

（黄道）$\vec{r}_{ec} = R(\varepsilon_0)\vec{r}$（轨道）　(8.11)

$\dot{\vec{r}}_{ec} = R(\varepsilon_0)\dot{\vec{r}}$　(8.12)

计算 $i, \omega$.

由 $\hat{e}_3 = (p_3\ \ q_3\ \ \omega_3)^T = (\sin i\sin\omega\ \ \sin i\cos\omega\ \ \cos i)^T$.

而 $\vec{r}\cdot\vec{r} \Rightarrow p_3, q_3$　∴可推出 $i, \omega$.

由书(5.10) (5.11)

又 $\vec{r}_{ec} = R(\varepsilon_0)\vec{r}$，$\dot{\vec{r}}_{ec} = R(\varepsilon_0)\dot{\vec{r}}$

$\vec{r}_{ec}\times\dot{\vec{r}}_{ec} = h\vec{\omega} = h(\sin i\sin\Omega\ \ -\sin i\cos\Omega\ \ \cos i)^T$

可定出 $\Omega$.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

> 由2个位置矢量计算轨道根数

(1) 概述

$\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ 可表为轨道根数的函数. $\vec{r}=\vec{r}(a, e, M, \omega, \Omega, i, t)$

由 $\vec{r}_1=\vec{r}_1(a, e, M, \omega, \Omega, i, t_1)$

$\vec{r}_2=\vec{r}_2(a, e, M, \omega, \Omega, i, t_2)$

六个等式, 可解出6个轨道根数

(2) 步骤

设天体在黄道系下 $\vec{r}_i=(x_i, y_i, z_i)^T \quad (i=1,2)$.

> 黄道系下轨道法向 $\hat{\omega}=(\sin i\sin\Omega, -\sin i\cos\Omega, \cos i)^T$

又 $\vec{r}_1\times\vec{r}_2=r_1r_2\sin(f_2-f_1)\times(\sin i\sin\Omega, -\sin i\cos\Omega, \cos i)^T$

又 $\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2=r_1r_2\cos(f_2-f_1)$

可计算出 $i, \Omega, f_2-f_1$

$\vec{r}_i=R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega)\times(r_i\cos f_i, r_i\sin f_i, 0)^T$

$R_3(\Omega)\vec{r}_i=R_1(-i)R_3(-\Omega)(r_i\cos f_i, r_i\sin f_i, 0)^T$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_i\cos\Omega+y_i\sin\Omega \\ -x_i\sin\Omega+y_i\cos\Omega \\ E_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_i\cos(\omega+f_i) \\ r_i\cos i\sin(\omega+f_i) \\ r_i\sin i\sin(\omega+f_i) \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \Omega, f_1, f_2$

又 $r_i=\dfrac{P}{1+e\cos f_i}$ $\Rightarrow P=r_i(1+e\cos f_i)=r_1(1+e\cos f_1)=r_2(1+e\cos f_2)$ $(i=1,2)$ $\Rightarrow e=\dfrac{r_1-r_2}{r_2\cos f_2-r_1\cos f_1}$

$a=\dfrac{P}{1-e^2}=\dfrac{r_1(1+e\cos f_1)}{1-e^2}$

至此，求出了所有轨道根数

> 状态传递

(1) 概述

初始条件 $t_0\ \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0 \Rightarrow t_0+\Delta t$ 时刻 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$

(2) 方法 (轨道根数为中介)

先由 $\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0$ 求出轨道根数, 再由轨道根数求 $t+\Delta t$ 的平近点角, 再由轨道根数求新的状态参数.

(3) 步骤

设 $\vec{r}=f\vec{r}_0+g\dot{\vec{r}}_0$

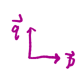
$\dot{\vec{r}}=\dot{f}\vec{r}_0+\dot{g}\dot{\vec{r}}_0$

其中 f, g 为待定函数. $f=f(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, t)$. $g=g(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, t)$. 称拉格朗日系数.

求 $f=?$

$\vec{r}\times\dot{\vec{r}}_0=f\vec{r}_0\times\dot{\vec{r}}_0=f\vec{h}$ (8.14)

又 $\vec{r}=(\vec{p}\ \ \vec{q})\,a\begin{pmatrix}\cos E-e\\ \sqrt{1-e^2}\sin E\end{pmatrix}$ $\quad \dot{\vec{r}}=(\vec{p}\ \ \vec{q})\,a\dot{E}\begin{pmatrix}-\sin E\\ \sqrt{1-e^2}\cos E\end{pmatrix}$



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

$\Rightarrow \vec{r}\times\dot{\vec{r}}_0 = (\vec{p}\,a(\cos E - e) + \vec{q}\,a\sqrt{1-e^2}\sin E)\times(\vec{p}\,a\dot{E}_0(-\sin E_0) + \vec{q}\,a\dot{E}_0(\sqrt{1-e^2}\cos E_0))$

代入h和$r_0$的表达式 $= \frac{ah}{r_0}[(\cos E - e)\cos E_0 + \sin E\sin E_0]\,\vec{\omega}$

又 $\vec{r}\times\dot{\vec{r}}_0 = f\vec{h} = fh\vec{\omega}$

$\Rightarrow f = \frac{a}{r_0}[\cos(E-E_0) \underline{- e\cos E_0}] = 1 - \frac{a}{r_0}(1-\cos\Delta E)$ (8.16)

$r_0 = a(1-e\cos E_0)$

$\underline{-e\cos E_0} = \frac{r_0}{a} - 1$

$\Delta E = E - E_0$

下求 $g = ?$

用 $\vec{r}_0\times\vec{r} = \vec{r}_0\times g\dot{\vec{r}}_0 = g\vec{h}$ (8.17)

又 $\vec{r}_0\times\vec{r} = [\vec{p}\,a(\cos E_0 - e) + \vec{q}\,a\sqrt{1-e^2}\sin E_0]\times[\vec{p}\,a(\cos E - e) + \vec{q}\,a\sqrt{1-e^2}\sin E]$

$= a^2\sqrt{1-e^2}[\sin\Delta E - e\sin E - \sin E_0)]\,\vec{\omega} = gh\vec{\omega}$

$\Rightarrow g = \frac{1}{n}[\sin\Delta E - e(\sin E - \sin E_0)]$ (8.18)

由 Kepler方程，$E - e\sin E = n(t-t_0)$ $\Rightarrow e(\sin E - \sin E_0) = \Delta E - \underbrace{n\Delta t}_{\Delta M}$

$\therefore g = \Delta t - \frac{1}{n}(\Delta E - \sin\Delta E)$ (8.19)

(8.16) 和 (8.19) 对 t 求导，得

$\dot{f} = \frac{d}{dt}[1 - \frac{a}{r_0}(1-\cos\Delta E)] = -\frac{a}{r_0}\dot{\Delta E}\sin\Delta E$

$\dot{g} = \frac{d}{dt}[\Delta t - \frac{1}{n}(\Delta E - \sin\Delta E)]$

$\Delta t = t - t_0$

$= 1 - \frac{1}{n}(1-\cos\Delta E)\cdot\dot{E}$

又 $E - e\sin E = n(t-t_0)$

$\Rightarrow \dot{E}(1-e\cos E) = n$

$\Rightarrow \dot{E} = \frac{na}{r}$

$\Rightarrow \dot{g} = 1 - \frac{a}{r}(1-\cos\Delta E)$

$\dot{f} = -\frac{a^2 n}{r_0 r}\sin\Delta E$

若 $\Delta E$ 求出，则可得 $f, g, \dot{f}, \dot{g}$.

$t$: $M = E - e\sin E$

$t_0$: $M_0 = E_0 - e\sin E_0$

$\Delta M = \Delta E - e[\sin(E_0+\Delta E) - \sin E_0] = \Delta E - e\cos E_0\sin\Delta E + e\sin E_0(1-\cos\Delta E)$

$\Rightarrow n\Delta t = \Delta E - C_1\sin\Delta E + C_2(1-\cos\Delta E)$

其中 $C_1 = 1 - \frac{r_0}{a}$ $\quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu a}}\vec{r}_0\cdot\dot{\vec{r}}_0$

$e\cos E = 1 - \frac{r}{a}$

$e\sin E = \frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{na}$

可由牛顿迭代法求 $\Delta E$，然后求 $f, g, \dot{f}, \dot{g}$.

练习：$f\dot{g} - g\dot{f} = 1$

$f\dot{g} - g\dot{f} = [1 - \frac{a}{r_0}(1-\cos\Delta E)][1 - \frac{a}{r}(1-\cos\Delta E)] - [\Delta t - \frac{1}{n}(\Delta E - \sin\Delta E)][-\frac{a^2 n}{r_0 r}\sin\Delta E]$

$= 1 - \frac{a^2}{r r_0}[-e\cos E_0 - e\cos E + e\cos(E-\Delta E) + e\cos(E+\Delta E)]$

$= 1$ $\qquad \Delta E = E - E_0$

# 第九课 火箭动力学初步

研究火箭物理模型、数学模型，航天器和行星轨道转移方法是求出行星之间轨道基本物理量。求出基本方程相同、初态不同时的速度增量$\Delta v$。

## 火箭的物理模型

组成部分：燃料舱，氧化剂舱，发动机，反作用发动机，载荷等.

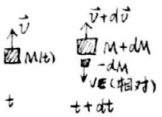
火箭运行时，(可看成)质点+流体（燃料）+电磁场

基本物理量：$\vec{r}(t)$，燃料 $P$，$\rho$，$T$，$v_e$

基本方程：

牛顿定律，流体力学方程，电磁场方程

情形1：单级火箭基本方程，初始条件和推论，不考虑重力，直线运动




动量守恒（无外力）

$t$：$M\vec{v}$

$t+dt$：$(M+dM)(\vec{v}+d\vec{v})+dM(\vec{v}-\vec{v}_E)$

$$\Rightarrow M\,dv=-dM\,v_E \qquad (9.1)$$

其中 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$，$v_E$ 为流体相对火箭速度.

初始条件. $t=0$，$v_0=0$

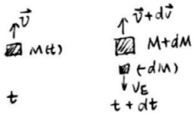
$$M|_{t=0}=\underset{\text{燃料}}{M_F}+\underset{\text{火箭}}{M_R}+\underset{\text{载荷}}{M_P}$$

推论. $v_{终值}=?$ $\quad M|_{终}=M_R+M_P$

由 $\frac{dM}{M}=-\frac{dv}{v_E}$ $\Rightarrow$ $\ln\frac{M_{终}}{M_{初}}=-\frac{v_{终}-0}{v_E}$.

$$\Rightarrow v_{终}=v_E\ln\lambda,\quad \lambda=\frac{M_F+M_R+M_P}{M_R+M_P} \qquad (9.2)$$

情形2. 有重力情况.




冲量定理：$(M+dM)(\vec{v}+d\vec{v})+dM(\vec{v}-\vec{v}_E)-M\vec{v}=-Mg\,dt \qquad (9.3)$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v_E}=-\frac{dM}{M}-\frac{g}{v_E}dt$$

定义比冲量 $\tau_s=\frac{v_E}{g}$ $\Rightarrow \frac{dv}{v_E}=-\frac{dM}{M}-\frac{dt}{\tau_s} \qquad (9.4)$

燃料为流体，$v=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$，考虑到工作出口压力较低，增加一个因子$\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}$.

$\gamma\approx1.3$ $\Rightarrow v_E\approx3000\ m/s$. $\Rightarrow \tau_s\approx\frac{3000}{10}s=300s$

对(9.4)积分，得 $\frac{v_{终}}{v_E}=\ln\lambda-\frac{\tau_B}{\tau_s}$ (9.5)，$\tau_B$ 为燃料耗尽时间.

情形3. 二级火箭

| | 质量比 | $\tau_B$ |
|---|---|---|
| 第一级 | $\lambda_1$ | $\tau_{B1}$ |
| 第二级 | $\lambda_2$ | $\tau_{B2}$ |

$$\frac{v_{1-终}}{v_E}=\ln\lambda_1-\frac{\tau_{B1}}{\tau_s} \qquad (9.6)$$

$$\frac{v_{2-终}}{v_E}=\frac{v_{1-终}}{v_E}+\ln\lambda_2-\frac{\tau_{B2}}{\tau_s} \qquad (9.7)$$

假定两级火箭 $\tau_s$ 与 $v_E$ 一样，且 $\lambda_1\approx\lambda_2=\lambda$，$\tau_{B1}\approx\tau_{B2}=\tau_B$

则有 $\frac{v_{2-终}}{v_E}=2\ln\lambda-2\frac{\tau_B}{\tau_s}$

上式说明，使用多级火箭，可用较少的燃料（相对单级）运送更多的载荷.

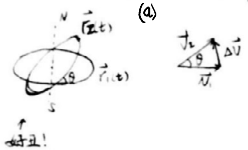
火箭分类：根据不同燃料流体分类.

研究航天器和行星轨道转移方法：

先求出系统各个轨道基本物理量 $\vec{r}(t)$，$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}$（注：不同轨道基本方程相同，只是初始条件不同）

继而求出所有相关物理量，包括速度增量。

情形 1. 改变卫星的轨道平面（赤道轨道变到倾斜轨道，求出速度增量）



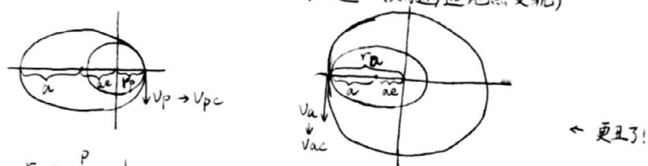

$\frac{1}{2}|\Delta\vec{v}|=|\vec{v}|\sin\frac{\theta}{2}$ (9.8)

特例 a. $\theta=\frac{\pi}{2}$，$|\Delta\vec{v}|=\sqrt{2}|\vec{v}|$ (9.9)

b. $\theta$ 很小，$|\Delta\vec{v}|=|\vec{v}|\theta$ (9.10)

情形 2. 在同一平面将卫星由一条轨道转移至另一条轨道。

在此讨论将 椭圆轨道 → 圆轨道（又分近/远地点变轨）




$r_p=\frac{p}{1+e\cos f}\Big|_{f=0}=a(1-e)$

$r_a=\frac{p}{1+e\cos f}\Big|_{f=\pi}=a(1+e)$

椭：$v_p^2=\mu\left(\frac{2}{r_p}-\frac{1}{a}\right)=\frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}$

$v_a^2=\mu\left(\frac{2}{r_a}-\frac{1}{a}\right)=\frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}$

圆轨道：$v_{pc}^2=\frac{\mu}{r_p}=\frac{\mu}{a(1-e)}$

$v_{ac}^2=\frac{\mu}{r_a}=\frac{\mu}{a(1+e)}$

大小关系：$v_p>v_{pc}$ $\qquad$ $v_a<v_{ac}$

$\Delta v$ $\quad \Delta v=v_p-v_{pc}$ (9.11) $\qquad \Delta v=v_{ac}-v_a$ (9.12)

情形 3. 由地球轨道逃逸（椭圆轨道 → 抛物线轨道）（又分近/远地点逃逸）

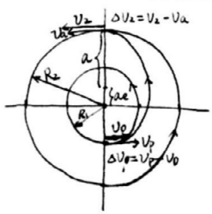
抛物线轨道有：$\varepsilon=\frac{1}{2}v^2-\frac{\mu}{r}=0$

∴ 近地点 $\frac{1}{2}v_{pE}^2=\frac{\mu}{a(1-e)}$ $\qquad$ 远地点 $\frac{1}{2}v_{AE}^2=\frac{\mu}{a(1+e)}$ (9.13)

椭圆轨道：$v_p^2=\frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}$ (9.14) $\qquad v_a^2=\frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}$ (9.14)

∴ $\Delta v_p=v_{pE}-v_p$ (9.15) $\qquad \Delta v_a=v_{AE}-v_a$ (9.17)

情形 4. 近圆轨道间转移 — 霍曼轨道转移




$R_1=a-ae$

$R_2=a+ae$ $\quad\Rightarrow a=\frac{1}{2}(R_1+R_2)$，$1-e=\frac{R_1}{a}$ $\quad 1+e=\frac{R_2}{a}$

$v_p^2=\frac{\mu}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)=\frac{2\mu}{R_1+R_2}\cdot\frac{R_2}{R_1}$

$v_0^2=\frac{\mu}{R_1}$

∴ $\Delta v_1=v_p-v_0=v_0\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}}-1\right)$

$v_a^2=\frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}=\frac{2\mu}{R_1+R_2}\cdot\frac{R_1}{R_2}$

$v_2^2=\frac{\mu}{R_2}$

∴ $\Delta v_2=v_2-v_a=v_0\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\left(1-\sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_2}}\right)$

$\Delta v=\Delta v_1+\Delta v_2=v_0\left[\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}}+\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\left(1-\sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_2}}\right)-1\right]$

$\frac{a^3}{T^2}=\frac{\mu}{4\pi^2}$ $\Rightarrow T=\pi\sqrt{\frac{(R_1+R_2)^3}{2\mu}}$

$\Delta t=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(R_1+R_2)^3}{2\mu}}$

$=\frac{\pi}{2v_0}\sqrt{\frac{(R_1+R_2)^3}{2R_1}}$

练习：幻灯片37页。

3+9

中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　　邮编：230026

电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

练习1：某天体表面的逃逸速度为 1.118 km/s，假设此天体的密度与地球相同（$5.52\,g/cm^3$），试求其半径.（幻灯片38页）

解：抛物线运动，刚好逃逸.

由抛物线活力公式 $\varepsilon = \frac{1}{2}V_{逃}^2 - \frac{\mu}{r} = 0$ ， $\mu = GM$

$\Rightarrow V_{逃} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = R\sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}$

$\Rightarrow R = 6378\,km$

练习2：见幻灯39页　　地月距离 $d$，轨道高度 $h$　　不计月球本身影响　　求速度增量和时间

练习3：（幻灯40页）若速度由高度为 $h$ 的圆轨道速度 $v_c$ 增加到 $v_p = v_c(1+x)$，试求转移轨道的偏心率、半长轴、近点速度和远点速度各为多少？

解：机动在近地点，实施，圆轨道半径 $r_p$.

对圆轨道，$v_{圆} = v_c = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e)}} = \sqrt{\frac{\mu}{R_E+h}}$

对椭圆轨道，$v_p = \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}} = v_c\sqrt{1+e} = v_c(1+x)$

$\Rightarrow \sqrt{1+e} = 1+x$　　$e = x(x+2)$　　(9.22)

$a = \frac{R_E+h}{1-e} = \frac{R_E+h}{1-2x-x^2}$　　(9.23)

远地点速度 $v_a = v_p\frac{1-e}{1+e} = v_p\frac{1-x(x+2)}{(x+1)^2} = v_c\frac{1-x^2-2x}{1+x}$　　(9.24)

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www

行星际探测研究

(1) 概述

四个问题，见幻灯41页

(2) 探测（以木星为例）

第一步：航天器环绕地球圆周运动，基本物理量 $\vec{r}_E(t)$.

$$V_E = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E}} \approx 7.9\,km/s$$

$$\sqrt{GM_E} = V_E\sqrt{R_E} \approx 631.31 \ km^{3/2}/s \qquad (9.25)$$

第二步：地球绕太阳公转（圆周运动），地球基本物理量 $\vec{r}_0(t)$.

$V_0 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_0}}$，其中 $R_0 \approx 1.496\times10^8\,km = 1AU$

$T_0 = 1年 = 3.154\times10^7 s \quad \Rightarrow V_0 = \frac{2\pi R_0}{T_0} = 29.778\,km/s$

$\therefore \sqrt{GM_S} = V_0\sqrt{R_0} \approx 3.64\times10^5 \qquad (9.26)$

可由(9.25)、(9.26)估计 $M_S = 333000 M_E$

$V = V_0 + V_E = 29.778 + 7.708$（赤道低轨上速度）$= 37.49\,km/s$

第三步：航天器逃离太阳系，最低解为抛物线.

$V_{逃} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{GM_S}{R_0}} = \sqrt{2}V_0 = 42.074\,km/s$

第四步：航天器由地球轨道进入到木星的 Hohmann 转移轨道


$R_J = 778\times10^6\,km$

$R_0 = 150\times10^6\,km$

$a = \frac{1}{2}(R_J + R_0) = 464\times10^6\,km$

$a(1+e) = R_J \Rightarrow e = 0.677$

$V_A = \sqrt{\frac{GM_S}{R_J}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = 5.73\,km/s$

$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{T_0}{2}\sqrt{\frac{a^3}{R_0^3}} = 2.72\ years$

$T_J = 11.9\ years$. 航天器在经 $\Delta t$ 到达交会点时，木星也应到达此点，则航天器发射时，木星应在交会点前方 $n_J\Delta t = 0.528\times2.72 = 1.436\,rad = 82.29\ deg$

$n_{JE} = n_E - n_J = 2\pi - 0.528 = 5.755\ rad/year$

$\therefore T_{JE} = \frac{2\pi}{n_{JE}} \approx 1.092\ years \approx 13\ months$

此为发射窗口出现的周期

计算弹弓效应：物理模型：质点组 $\vec{r}_1, \vec{V}_1, \vec{r}_2, \vec{V}_2$


$V_J > V$. 在木星参考系，航天器迎面撞来，弹性碰撞后，$V_1 = V_J - V$.

原惯性系：$V_2 = 2V_J - V = 2\times13.05 - 5.73 = 20.37\,km/s$ 　　$e = \frac{V_1 - V}{V - V_J} = 1$

即获得了2倍木星速度的增量.

而木星轨道上逃逸速度 $V_e = 18.45\,km/s < V_2$. —— 足够逃逸.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

## 第10课 级数展开及其应用．普通摄动理论

本课研究二体问题．$\vec{r}(t)$．($\dot{\vec{r}}(t)$)．基本方程 ⇒ 三个推论

① 拉格朗日系数展开式

② 偏近点角为平近点角正弦级数

③ 真近点角为偏近点角正弦级数 中心差

推论1：将拉格朗日系数展开为幂级数（向径展开为时间的幂级数）

$\vec{r} = f\vec{r}_0 + g\dot{\vec{r}}_0$ （$\Delta t = t - t_0$ 为小量）

$f$．$g$ 称为拉格朗日系数（待定），下求 $f$．$g$：

基本方程：$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}$

又由 $r^2 = \vec{r}\cdot\vec{r}$ ⇒ $\dot{r} = \frac{1}{r}\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}$ ⇒ $\ddot{r} = -\frac{\dot{r}}{r^2}\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} + \frac{1}{r}\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} + \frac{1}{r}\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}}$

⇒ $\ddot{r} = \frac{1}{r}(v^2 - \dot{r}^2 - \frac{\mu}{r})$

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{d}{dt}\ddot{\vec{r}} = \frac{3\mu}{r^4}\dot{r}\vec{r} - \frac{\mu}{r^3}\dot{\vec{r}}$$

$$\frac{d^4\vec{r}}{dt^4} = \left(-\frac{12\mu}{r^5}\dot{r}^2 + \frac{3\mu}{r^4}\ddot{r}\right)\vec{r} - \frac{\mu}{r^3}\ddot{\vec{r}} + \frac{6\mu}{r^4}\dot{r}\dot{\vec{r}}$$

$$= \left[-\frac{15\mu}{r^7}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})^2 - \frac{2\mu^2}{r^6} + \frac{3\mu}{r^5}v^2\right]\vec{r} + \frac{6\mu}{r^5}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}}$$

$$\vec{r}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{d^n\vec{r}}{dt^n}\right|_{t=t_0}(\Delta t)^n$$

$$= \vec{r}_0 + \dot{\vec{r}}_0\Delta t - \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu}{r_0^3}(\Delta t)^2\vec{r}_0 + \frac{1}{6}(\Delta t)^3\left[\frac{3\mu}{r_0^5}(\vec{r}_0\cdot\dot{\vec{r}}_0)_0\vec{r}_0 - \frac{\mu}{r_0^3}\dot{\vec{r}}_0\right] + \cdots\cdots$$

推论2：偏近点角展开为平近点角的正弦级数

$E(M) - M = e\sin E(M)$

$E(M+2\pi) - (M+2\pi) = e\sin E(M+2\pi)$

$E - M = e\sin E$ 为周期函数，将 $e\sin E$ 展开为 $M$ 的正弦级数：

$$e\sin E = 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k(e)\sin kM$$

其中 $b_k(e) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e\sin E\sin kM\,dM$

又 $\int_0^{\pi}\sin k'M\sin kM\,dM = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(k'+k)M - \cos(k'-k)M]\,dM = \frac{1}{2}\pi\delta_{k'k}$

$b_k(e) = \frac{1}{k\pi}[-\int_0^{\pi} e\sin E\,d\cos kM] = \frac{1}{k}J_k(ke)$ ← 这一步挺复杂，书上一句"变形得"

$= \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi} e\cos kM\,d\sin E$

$= \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi} e\,\frac{1}{2}[\cos(kM+E) - \cos(kM-E)]\,dE$

$= \frac{1}{2k\pi}\int_0^{\pi} e\{\cos[k(E - e\sin E) + E] - \cos[k(E - e\sin E) - E]\}\,dE$

$= \frac{e}{2k}[J_{k+1}(ke) - J_{k-1}(ke)] = \frac{e}{2k}\,\frac{1}{ke}\,2k\,J_e(ke)$

$= \frac{1}{k}J_k(ke)$.

用到公式 $2J_{k-1}(z) - 2J_{k+1}(z) = 2J_{k+1}(z)$ ✓

故 $e\sin E = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}J_k(ke)\sin kM$

$E = M + e\sin E = M + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}J_k(ke)\sin kM$

$E = M + 2J_1(e)\sin M + J_2(2e)\sin 2M + \frac{2}{3}J_3(3e)\sin 3M + O(e^4)$

$= M + (e - \frac{e^3}{8})\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M + \frac{3e^3}{8}\sin 3M + O(e^4)$ (10.5)

推论3：真近点角展为平近点角的正弦级数，中心差

$r^2\dot{f} = h = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$， $a^3n^2 = \mu$

$\therefore r^2\dot{f} = r^2\frac{df}{dt} = na^2\sqrt{1-e^2}$

又 $M = n(t - t_0)$ $\frac{dM}{dt} = \dot{M} = n$

⇒ $\frac{df}{dM} = \sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2$

Scanned by CamScanner

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

$\frac{dE}{dM} = \frac{\dot{E}}{n}$　　而 $r = a(1-e\cos E)$

又 $E - e\sin E = M$.　　$\dot{E} - e\cos E\,\dot{E} = n$

$\therefore \frac{a}{r} = \frac{1}{1-e\cos E} = \frac{\dot{E}}{n} = \frac{dE}{dM}$　　(10.7)

把(10.5)代入(10.7)，得 $\frac{a}{r} = 1+(e-\frac{e^3}{8})\cos M + e^2\cos 2M + \frac{9e^3}{8}\cos 3M + O(e^4)$

$\therefore (\frac{a}{r})^2 = 1+\frac{e^2}{2} + (2e+\frac{3e^3}{4})\cos M + \frac{5e^2}{2}\cos 2M + \frac{13e^3}{4}\cos 3M + O(e^4)$

代入(10.6)，得 $\frac{df}{dM} = 1+(2e-\frac{e^3}{4})\cos M + \frac{5e^2}{2}\cos 2M + \frac{13e^3}{4}\cos 3M + O(e^4)$

积分得 $f = M + (2e-\frac{e^3}{4})\sin M + \frac{5e^2}{4}\sin 2M + \frac{13e^3}{12}\sin 3M + O(e^4)$

由上式可得中心差 $f-M$.


推论3的应用：

考虑地月质心关于太阳的运动(惯性系)。$\vec{r}(t)$ 定出轨道根数　(见PPT)(25页)(或见书113页)

将e代入中心差公式得

$f-M = 114.9'\sin M + 1.2'\sin 2M + O(e^3)$

由 $M = L - \tilde{\omega}$,

近日点平黄经 $\tilde{\omega} = 102.93768193 + 0.32327364T$　　$\omega = \tilde{\omega} - \Omega$　$M = L - \tilde{\omega}$　　$t = TT - 2451545.0$

平黄经 $L = 100.46457166 + 35999.37244981T$

$\Rightarrow M = 357.52688973 + 35999.04917617T$　　(10.15)

$\lambda = \tilde{\omega} + f = \tilde{\omega} + M + 114.9'\sin M + 1.2'\sin 2M$.

(太阳关于历元平春分点的黄经)

由 $\lambda$ 表达式，将M代入可得对应时刻太阳的黄经 $\lambda$.

太阳视半径 $s$.　$\sin s = \frac{a}{r}\sin s_0$.　$s_0$ 是 $r=a$ 时太阳视半径. $\sin s_0 = \frac{R_s}{a}$

$\therefore \sin s = \frac{R_s}{r}$

以 $R_s = 696000\,km$, $a = 1.00000261\,AU$，代入得　$s = \frac{16'}{r/a}$

例1. PPT 29页

例2. (见书114页)

(推论3的应用) 太阳沿赤道方向的视运动

— 由太阳相对地月质心位矢描述.

赤经与黄经的关系

黄 $(i\ j\ k) = (l\ m\ n)_{赤} R_1(-\varepsilon)$　其中 $\varepsilon$ 为历元黄赤交角，唯象给出

$\Rightarrow$ 赤道 $\begin{pmatrix}\cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta\end{pmatrix} = R_1(-\varepsilon)$ 黄道 $\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta\end{pmatrix}$　　(赤经,赤纬)$(\delta,\alpha)$　(黄经,黄纬)$(\beta,\lambda)$

太阳的 $\beta=0$.　$\Rightarrow$　$\cos\delta\cos\alpha = \cos\lambda$

$\cos\delta\sin\alpha = \cos\varepsilon\sin\lambda$

$\sin\delta = -\sin\varepsilon\sin\lambda$

$\Rightarrow \tan\alpha = \cos\varepsilon\tan\lambda$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

引理

若 $p>0$，$\tan y = p\tan x$，则有如下展开式：

$$y = x + q\sin 2x + \frac{q^2}{2}\sin 4x + \frac{q^3}{3}\sin 6x + \cdots$$

式中 $q = \frac{p-1}{p+1}$

证明：$\tan(y-x) = \frac{\tan y - \tan x}{1+\tan x\tan y} = \frac{(p-1)\tan x}{1+p\tan^2 x}$

$$= \frac{(p-1)\sin x\cos x}{\cos^2 x + p\sin^2 x} = \frac{(p-1)\sin 2x}{(p+1)-(p-1)\cos 2x} = \frac{q\sin 2x}{1-q\cos 2x}$$

$$= q\sin 2x\,(1+q\cos 2x + q^2\cos^2 2x + \cdots)$$

$$\int_0^{\pi} \arctan\frac{q\sin 2x}{1-q\cos 2x}\,\sin 2nx\,dx$$

$$y-x = \arctan[q\sin 2x\,(1+q\cos 2x + q^2\cos^2 2x + \cdots)]$$

$$= q\sin 2x\,(1+q\cos 2x+q^2\cos^2 2x+\cdots) - \frac{1}{3}q^3\sin^3 2x\,(1+q\cos 2x+\cdots)^3 + \cdots$$

$$= q\sin 2x + \frac{1}{2}q^2\sin 4x + \frac{1}{3}q^3\sin 6x + \cdots$$

\#

代入数值，可求出赤经按黄经展开的具体表达式。

摄动理论基本原理

摄动理论：求解基本方程的另一方法。 二体近似解 $\xrightarrow{\text{摄动理论}}$ 精确解

如简谐振动系统。

$m\ddot{x} + kx = f(t)$ 　$f(t)$ 为小量。

当 $f=0$（无摄动） $m\ddot{x}+kx=0 \Rightarrow x = b\cos\omega t + a\sin\omega t$ 　　$y=\dot{x} = a\omega\cos\omega t - b\omega\sin\omega t$

其中 $a$、$b$ 为常数，由初始条件定出。

当 $f\neq 0$，用常数变易法。

$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ m\dot{y} + kx = f(t) \end{cases}$$

$x = a(t)\sin\omega t + b(t)\cos\omega t$ 　(10.19)

$y = a(t)\omega\cos\omega t + b(t)\cdot(-\omega)\sin\omega t$ 　(10.20)

对(10.19)求导，$y = \dot{x} = \dot{a}\sin\omega t + \dot{b}\cos\omega t + a\omega\cos\omega t + b(-\omega)\sin\omega t$ 　(10.21)

联立(10.21)、(10.20)，得 $\dot{a}(t)\sin\omega t + \dot{b}(t)\cos\omega t = 0$ 　(10.22)（称"吻切条件"）

$\dot{y}(t) = \dot{a}\omega\cos\omega t - \dot{b}\omega\sin\omega t - a\omega^2\sin\omega t - b\omega^2\cos\omega t$ 　(10.23)

代入 $m\dot{y} + kx = f(t)$ 中。

$\rightarrow \dot{a}\omega\cos\omega t - \dot{b}\omega\sin\omega t = g(t)$，其中 $g(t) = \frac{f(t)}{m}$ 　(10.24)

联立 (10.22) (10.24)。

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{a}(t) = \frac{g(t)}{\omega}\cos\omega t \\ \dot{b}(t) = -\frac{g(t)}{\omega}\sin\omega t \end{cases}$$

$\rightarrow a(t)$，$b(t)$

特例 　a. 幻灯片22页 　b. 幻灯23页 　c. 幻灯25、26页

$f(t) = mr$ 　　$g(t) = r\cos\omega t$ 　　$g(t) = r\sin\omega t$

$a(t) = a + \frac{r}{\omega^2}\sin\omega t$

$b(t) = b + \frac{r}{\omega^2}\cos\omega t$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

摄动理论应用之一 ——水星进动

用广义相对论求基本物理量 $\vec{r}(t)$ $\Rightarrow dw,\ de$

① 物理模型

水星相对太阳 $\vec{r}(t)$，引力场 $g_{\mu\nu}$

② 基本方程

a. 太阳激发引力场 (Einstein field equation)

b. 引力场影响水星（测地运动）

$u=\frac{1}{r}$

广相有结论：$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu}{h^2}+f(\theta)$ (10.23) 其中 $f(\theta)=\frac{3\mu}{c^2}\cdot\frac{1}{r^2}$

$$\begin{cases} v=\frac{du}{d\theta} \\ \frac{dv}{d\theta}+u=\frac{\mu}{h^2}+f(\theta) \end{cases}$$

当 $f(\theta)=0$. $u=\frac{\mu}{h^2}[1+e\cos(\theta-w)]$ (10.28)

$v=\frac{du}{d\theta}=-\frac{\mu e}{h^2}\sin(\theta-w)$ (10.29)

当 $f(\theta)$ 为小量，$u=\frac{\mu}{h^2}[1+e(\theta)\cos(\theta-w(\theta))]$ (10.30)

常数变易法 $v=-\frac{\mu}{h^2}e(\theta)\sin(\theta-w(\theta))$ (10.31)

$v=\frac{du}{d\theta}=\frac{\mu}{h^2}(-e\sin(\theta-w))+\frac{de}{d\theta}\cos(\theta-w)+\frac{dw}{d\theta}e\sin(\theta-w)$ (10.32) 与 (10.31) 联立得 吻切条件：

$\frac{de}{d\theta}\cos(\theta-w)+\frac{dw}{d\theta}e\sin(\theta-w)=0$ (10.33) 吻切条件

$\frac{dv}{d\theta}=-\frac{\mu}{h^2}\left(\frac{de}{d\theta}\sin(\theta-w)+e(1-\frac{dw}{d\theta})\cos(\theta-w)\right)$ (10.34) 代入 (10.33)

得 $-\frac{de}{d\theta}\sin(\theta-w)+\frac{dw}{d\theta}e\cos(\theta-w)=\frac{h^2}{\mu}f(\theta)$ (10.35)

由 (10.35) (10.23)，$\frac{de}{d\theta}=-\frac{h^2}{\mu}f(\theta)\sin(\theta-w)$

$\frac{dw}{d\theta}=\frac{h^2}{\mu e}f(\theta)\cos(\theta-w)$ (10.36)

$\rightarrow r=r(\theta)=r(\theta(t))$.

而 $f(\theta)=\frac{3\mu}{c^2r^2}=\frac{3\mu}{c^2}\frac{\mu}{h^2}[1+e\cos(\theta-w)]$

积分可得 $\Delta e=0$ $\Delta w=\frac{6\pi\mu^2}{c^2h^2}=5\times10^{-7}\ rad/rev$

摄动理论应用之二 —— 二体问题的摄动理论

常数变易法

在无摄动情况下，$\vec{c}=(a,e,w,\Omega,i,M)^T=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6)^T$，由初始条件决定.

无摄动时 $\vec{c}$ 与 $t$ 无关.

存在摄动时，$\vec{c}$ 是 $t$ 的函数. $\vec{r}=\vec{r}(\vec{c}(t),t)$

无摄动时，$\ddot{\vec{x}}(c,t)+\frac{\mu}{r^3}\vec{x}=0$ (10.37)

有摄动：$\ddot{\vec{x}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{x}=\frac{dR}{d\vec{r}}$ →小量 (10.38)

无摄：$\dot{\vec{x}}(\vec{c},t)=\frac{\partial\vec{x}(\vec{c},t)}{\partial t}$ (10.39)

有摄：$\dot{\vec{x}}(\vec{c},t)=\frac{\partial\vec{x}(\vec{c},t)}{\partial t}+\frac{d\vec{x}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\dot{\vec{c}}$ (10.40) （$\frac{d\vec{x}}{d\vec{c}^T}$ 为 $\frac{d\vec{x}}{d\vec{c}}$ 转置）

c 是时间的函数

其中 $\frac{d\vec{x}}{d\vec{c}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial c_1}&\frac{\partial y}{\partial c_1}&\frac{\partial z}{\partial c_1}\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ \frac{\partial x}{\partial c_6}&\frac{\partial y}{\partial c_6}&\frac{\partial z}{\partial c_6}\end{pmatrix}$

由(10.39)(10.40)：$\frac{d\vec{x}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\dot{\vec{c}}=0$ （密切条件） (10.41)

常数变易法(类似前面的做法)

由(10.40)求导

$$\ddot{\vec{x}}(\vec{c},t)=\frac{\partial^2\vec{x}(\vec{c},t)}{\partial t^2}+\frac{d\dot{\vec{x}}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\dot{\vec{c}} \quad (10.42)$$

代入(10.38)

$$\frac{\partial^2\vec{x}(\vec{c},t)}{\partial t^2}+\frac{d\dot{\vec{x}}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\dot{\vec{c}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{x}(\vec{c},t)=\frac{dR}{d\vec{r}} \quad (10.43)$$

联立(10.37)

$$\frac{d\dot{\vec{x}}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\dot{\vec{c}}=\frac{dR}{d\vec{r}} \quad (10.44)$$

结合(10.41)、(10.44)，得

$$\begin{bmatrix}\frac{d\vec{x}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\\ \frac{d\dot{\vec{x}}(\vec{c},t)}{d\vec{c}^T}\end{bmatrix}\dot{\vec{c}}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{dR}{d\vec{r}}\end{pmatrix}$$

$L\dot{\vec{c}}=\frac{dR}{d\vec{c}}$. 其中 $L=([c_i,c_j])=\begin{pmatrix}0&[c_1,c_2]&\cdots&[c_1,c_6]\\ -[c_1,c_2]&0&\cdots&[c_2,c_6]\\ \cdots&\cdots&&\cdots\\ -[c_1,c_6]&-[c_2,c_6]&\cdots&0\end{pmatrix}$

$[c_i,c_j]$ 为拉格朗日括号

$[c_i,c_j]=\frac{\partial\vec{x}^T}{\partial c_i}\frac{\partial\dot{\vec{x}}}{\partial c_j}-\frac{\partial\vec{x}^T}{\partial c_j}\frac{\partial\dot{\vec{x}}}{\partial c_i}$

第11课 地球动力学初步

本课给出地、月、日引力场系统物理模型和数学模型。

求解形状和运动。

物理模型：日、月分别为一质点，地球为球形刚体（滞弹性体，潮汐形变），引力场

描述运动状态：

摄动体(日,月)向径 $s(t)$，地球质心平动（三坐标），绕质心转动（欧拉角），引力势 $\phi(\vec{r})$

引入角速度矢量：设 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 为固定在刚体(地球)上的任意标架

地球固结化标架(正交)：$\vec{e}_i^T\vec{e}_j=0\ (i\neq j)$，$\vec{e}_i^T\vec{e}_i=1\to\dot{\vec{e}}_i^T\vec{e}_j+\vec{e}_i^T\dot{\vec{e}}_j=0$ 不求和

记 $\dot{\vec{e}}_j^T\vec{e}_k=-\dot{\vec{e}}_k^T\vec{e}_j=\Omega_i$

可证明 $\vec{\Omega}=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\\ \Omega_3\end{pmatrix}$ 为角速度向量。

地球上任一固定点 $\vec{r}=(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ x,y,z 与时间无关

$\dot{\vec{r}}=(\dot{\vec{e}}_1\ \dot{\vec{e}}_2\ \dot{\vec{e}}_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$



$\dot{\vec{r}}=(\vec{e}_1\cdot\dot{\vec{r}})\vec{e}_1+(\vec{e}_2\cdot\dot{\vec{r}})\vec{e}_2+(\vec{e}_3\cdot\dot{\vec{r}})\vec{e}_3$

$\vec{e}_1\cdot\dot{\vec{r}}=x\vec{e}_1^T\dot{\vec{e}}_1+y\vec{e}_1^T\dot{\vec{e}}_2+z\vec{e}_1^T\dot{\vec{e}}_3$
$=\Omega_2 z-\Omega_3 y$

$e=(\ )$ $e^T=(\ \ )$
可不写点乘

同理可证 $\vec{e}_2\cdot\dot{\vec{r}}=\Omega_3 x-\Omega_1 z$

$\vec{e}_3\cdot\dot{\vec{r}}=\Omega_1 y-\Omega_2 x$

$$\dot{\vec{r}}=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix}\Omega_2 z-\Omega_3 y\\ \Omega_3 x-\Omega_1 z\\ \Omega_1 y-\Omega_2 x\end{pmatrix}$$

所以 $\dot{\vec{r}}=\vec{\Omega}\times\vec{r}$，对任意固定在地球上的 $\vec{r}$.
所以 $\vec{\Omega}$ 是角速度矢量

关于质心 角动量 $\vec{H}$ 与 $\vec{\Omega}$ 的关系

$$d\vec{H}=\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\,dm=\vec{r}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})dm=[r^2\vec{\Omega}-\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\Omega})]dm=(r^2 U-\vec{r}\vec{r}^T)\vec{\Omega}\,dm$$

惯性矩(惯量张量) $I=\int(r^2U-\vec r\vec r^T)dm$

地球是旋转椭球体,选取对称轴为坐标轴,

$$I=\begin{pmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&C\end{pmatrix}$$ 第三轴 $\vec e_3\equiv\vec T$ 称为形状轴

$$I=AU+(C-A)\vec T\vec T^T \qquad (11.3)$$

将(11.3)代入(11.1)中,可得

$$\vec H=A\vec\Omega+(C-A)\vec T^T\vec\Omega\vec T$$

$\vec H,\vec\Omega,\vec T$ 共面,故 $\vec T^T(\vec\Omega\times\vec H)=0$ (11.4)

## 欧拉动力学方程,摄动力矩和推论

地球受到月、日总的力矩 $\vec N$ (关于质心),则 $\dot{\vec H}=\vec N$, 又由 $\dot{\vec H}=\frac{\partial\vec H}{\partial t}+\vec\Omega\times\vec H$

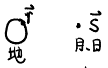
相对导数 牵连导数

$$\frac{\partial\vec H}{\partial t}=\frac{\partial(I\vec\Omega)}{\partial t}=I(\dot{\vec\Omega}-\vec\Omega\times\vec\Omega)=I\dot{\vec\Omega}$$

所以 $I\dot{\vec\Omega}+\vec\Omega\times\vec H=\vec N$ (11.5)

求摄动力矩: $\frac{\mu(\vec s-\vec r)dm}{|\vec s-\vec r|^3}=\mu(\vec s-\vec r)s^3(1+3\hat s^T\times\vec r s^{-1})dm$

$\approx\mu s^{-2}[\hat s-s^{-1}(U-3\hat s\hat s^T)\vec r]$




总力矩 $\vec N=\int\vec r\times\frac{\mu(\vec s-\vec r)dm}{|\vec s-\vec r|^3}=-\mu s^2\hat s\left[\underbrace{\int\vec r dm}_{0}-3s^{-1}\int\vec r\vec r^Tdm\right]\hat s$

$=-3\mu s^{-3}[\hat s\times(\int r^2Udm-I)\hat s]$

$=3\mu s^{-3}\hat s\times I\hat s$  I的表达式见前

$=3\mu s^{-3}(C-A)\hat s\times\vec T\vec T^T\hat s$ (11.7)

$\vec T\cdot\vec N=3\mu s^{-3}(C-A)\vec T^T(\hat s\times\vec T)(\vec T^T\hat s)=0$ (11.8)

由(11.5), $\vec T^TI\dot{\vec\Omega}+\vec T^T(\vec\Omega\times\vec H)=\vec T^TN$

又由(11.4)(11.5)(11.8),可得 $\vec T^TI\dot{\vec\Omega}=0$、

将(11.3)代入上式,有 $\vec T^T\dot{\vec\Omega}=0$. (11.9)

普安索定理: $\vec T^T\vec\Omega=\omega$ (常数)

Poinsot $\frac{d}{dt}(\vec T^T\vec\Omega)=\dot{\vec T}^T\vec\Omega+\vec T^T\dot{\vec\Omega}=(\vec\Omega\times\vec T)^T\vec\Omega=0$

$\vec T^T\vec\Omega=\omega$ (常数)

$\vec H=A\vec\Omega+(C-A)\omega\vec T$ (11.11)

$\vec T^T\vec H=A\omega+(C-A)\omega=C\omega$ (11.12)

取 $\vec{OT}=\vec T$, $\vec{OH}=\frac{1}{C\omega}\vec H$, $\vec{OR}=\frac{1}{\omega}\vec\Omega$, 则

$\vec{TH}=\vec{OH}-\vec{OT}=\frac{1}{C\omega}\vec H-\vec T=\frac{1}{C\omega}[A\vec\Omega+(C-A)\omega\vec T]-\vec T$

$\vec{TH}=\frac AC(\frac{1}{\omega}\vec\Omega-\vec T)=\frac AC(\vec{OR}-\vec{OT})=\frac AC\vec{TR}$, T、H、R三点共线

$\frac{TH}{HR}=\frac{TH}{TR-TH}=\frac{A/C}{1-A/C}=\frac{A}{C-A}$

形状极的运动: ①描述:用 $\vec p=\vec{TH}=\frac{1}{C\omega}\vec H-\vec T$ 描述 (11.13)

$\vec H$ 在地球参考系中是确定的, P与T直接相关,

②极移方程

a. 地心天球系的极移方程

对(11.3)两边求导: $\dot{\vec p}=\frac{1}{C\omega}\dot{\vec H}-\dot{\vec T}$

代入 $\dot{\vec T}=\frac{\partial\vec T}{\partial t}+(\vec\Omega\times\vec T)=\vec\Omega\times\vec T$ , $\dot{\vec H}=\vec N$

可得 $\dot{\vec p}=\frac{1}{C\omega}\vec N-\vec\Omega\times\vec T$ (11.14)

将 $\vec H=A\vec\Omega+(C-A)\omega\vec T$ 代入,可得 $\vec p=\frac{1}{C\omega}[A\vec\Omega+(C-A)\omega\vec T]-\vec T$

化简得 $\vec p=\frac AC(\frac{\vec\Omega}{\omega}-\vec T)$ (11.15)

因此 $\vec p\times\vec T=\frac AC\frac{\vec\Omega\times\vec T}{\omega}$, 与(11.14)联立得 $\dot{\vec p}-\frac CA\omega\vec T\times\vec p=\frac{1}{C\omega}\vec N$ (11.17)

b. 地球参考系极移方程

$\dot{\vec p}=\frac{\partial\vec p}{\partial t}+\vec\Omega\times\vec p$ (11.18)

由(11.15)得 $\vec\Omega\times\vec p=\omega\vec T\times\vec p-\vec T$.

因此, $\frac{\partial\vec p}{\partial t}-\frac{C-A}{A}\omega\vec T\times\vec p=\frac{1}{C\omega}\vec N$ (11.20)

此方程的解 $\vec p=\vec p_E+\vec p_F$ = 齐次方程通解+非齐次方程特解

$\frac{\partial\vec p_E}{\partial t}-\frac{C-A}{\omega}\omega\vec T\times\vec p_E=0$ ,这说明 $\vec p_E$ 在与极轴 $\vec T$ 正交的平面内绕极轴 $\vec T$ 旋转,角速度为 $\frac{C-A}{A}\omega\vec T$

此方程的解 $\vec{p}=\vec{p}_E+\vec{p}_F$ = 齐次方程通解＋非齐次方程特解

$\frac{\partial \vec{p}_E}{\partial t}-\frac{C-A}{\omega}\omega\vec{T}\times\vec{p}_E=0$，这说明 $\vec{p}_E$ 在与极轴 $\vec{T}$ 正交的平面内绕极轴 $\vec{T}$ 旋转，角速度为 $\frac{C-A}{A}\omega\vec{T}$

特解：$\vec{H}=A\vec{\Omega}+(C-A)\omega\vec{T}\ \Rightarrow\ \vec{H}\times\vec{T}=A\vec{\Omega}\times\vec{T}\ \overset{\dot{\vec{T}}=\vec{\Omega}\times\vec{T}}{=\!=\!=}\ A\dot{\vec{T}}$

$\Rightarrow A\vec{T}\times\dot{\vec{T}}=\vec{T}\times(\vec{H}\times\vec{T})=(\vec{T}\cdot\vec{T})\vec{H}-\vec{T}(\vec{T}\cdot\vec{H})=\vec{H}-C\omega\vec{T}$　　$\vec{T}$ 是单位矢量

$\Rightarrow \frac{1}{C\omega}\vec{H}-\vec{T}=\frac{A}{C\omega}\vec{T}\times\dot{\vec{T}}$　　(11.20)'

对时间求导，得 $\dot{\vec{T}}=\frac{1}{C\omega}\vec{N}-\frac{A}{C\omega}(\vec{T}\times\ddot{\vec{T}})$　　(11.21)

$\frac{A}{C\omega}\vec{T}\times\dot{\vec{T}}=\frac{A}{(C\omega)^2}\vec{T}\times\vec{N}-\left(\frac{A}{C\omega}\right)^2\vec{T}\times(\vec{T}\times\ddot{\vec{T}})$　　又因为 $\vec{p}=\frac{1}{C\omega}\vec{H}-\vec{T}$，

所以 $\vec{p}=\frac{A}{(C\omega)^2}\vec{T}\times\vec{N}-\left(\frac{A}{C\omega}\right)^2\vec{T}\times(\vec{T}\times\ddot{\vec{T}})$　　(11.23)

一级近似 $\dot{\vec{T}}=\frac{1}{C\omega}\vec{N}$

二级近似 $\vec{p}=\frac{A}{(C\omega)^2}\vec{T}\times\vec{N}-\frac{A^2}{(C\omega)^3}\vec{T}\times(\vec{T}\times\dot{\vec{N}})$

## 第13课 岁差和章动

本课进一步研究地、月、日引力场系统的物理、数学模型.

求解月、日摄动力矩，给出中介极方程，研究岁差、章动.

月、日对地球摄动方程：

摄动体月、日对地球做椭圆运动，　$s=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$　(12.1)

$s^2\dot{f}=na^2\sqrt{1-e^2}$，　$\frac{a^2}{s^2}=\frac{\dot{f}}{n\sqrt{1-e^2}}$　(12.2)

所以 $\frac{a^3}{s^3}=\frac{1+e\cos f}{n(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\dot{f}$　(12.3)

单位向径　$\hat{s}=\frac{\vec{s}}{s}=(\hat{p}\ \hat{q}\ \hat{h})\begin{pmatrix}\cos f\\ \sin f\\ 0\end{pmatrix}$，　$\hat{s}^T=(\cos f\ \ \sin f\ \ 0)\begin{pmatrix}\hat{p}\\ \hat{q}\\ \hat{h}\end{pmatrix}$ → 轨道标架基矢

$\hat{s}\hat{s}^T=(\hat{p}\ \hat{q}\ \hat{h})\begin{pmatrix}\cos^2 f & \cos f\sin f & 0\\ \cos f\sin f & \sin^2 f & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{p}\\ \hat{q}\\ \hat{h}\end{pmatrix}$

$=\cos^2 f\,\hat{p}\hat{p}^T+\sin^2 f\,\hat{q}\hat{q}^T+\cos f\sin f\,(\hat{p}\hat{q}^T+\hat{q}\hat{p}^T)$，注意到 单位矩阵 $U=\hat{p}\hat{p}^T+\hat{q}\hat{q}^T+\hat{h}\hat{h}^T$，

$\hat{s}\hat{s}^T=\frac{1}{2}[U-\hat{h}\hat{h}^T+\cos 2f\,(\hat{p}\hat{p}^T-\hat{q}\hat{q}^T)+\sin 2f\,(\hat{p}\hat{q}^T+\hat{q}\hat{p}^T)]$　　(12.5)

由11.7，$\frac{\vec{N}}{C\omega}=-\frac{3\mu(C-A)}{C\omega}\frac{1}{s^3}\ \vec{T}\times\hat{s}\hat{s}^T\vec{T}$

令 $k=-\frac{3\mu(C-A)}{C\omega a^3}$，$\vec{\mathcal{P}}=\frac{a^3}{s^3}\hat{s}\hat{s}^T$，则 $\frac{1}{C\omega}\vec{N}=-k\vec{T}\times\mathcal{P}\vec{T}$　(12.6)

分解为平均值和周期项，　$\bar{\mathcal{P}}=\frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{s^3}\hat{s}\hat{s}^T dt$，代入(12.3)，注意到周期项积分为零，

$\bar{\mathcal{P}}=\frac{1}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(U-\hat{h}\hat{h}^T)$，

$\mathcal{P}=\frac{1}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(U-\hat{h}\hat{h}^T+V)$，V为周期项.

于是有 $\frac{1}{C\omega}\vec{N}=-k\vec{T}\times\frac{1}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(U-\hat{h}\hat{h}^T+V)\vec{T}$

$=\frac{k}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(\vec{T}\times\hat{h}\hat{h}^T\vec{T}-\vec{T}\times V\vec{T})$

$\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ 为黄道标架，$\hat{k}$ 为黄极方向单位矢量，$\vec{k}\times\vec{h}=\sin i\,\vec{d}$，$\vec{d}$ 为交线单位矢量

$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{h})=\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{h})-\vec{h}=\cos i\,\vec{k}+\sin i\,\vec{d}\times\vec{k}$，$\vec{k}\cdot\vec{h}=\cos i$.

$\vec{h}=\cos i\,\vec{k}+\sin i\,\vec{d}\times\vec{k}$，$\vec{h}\vec{h}^T=(\cos i\,\vec{k}+\sin i\,\vec{d}\times\vec{k})(\cos i\,\vec{k}+\sin i\,\vec{d}\times\vec{k})^T$

$=\cos^2 i\,\vec{k}\vec{k}^T+\sin^2 i\,(\vec{d}\times\vec{k})(\vec{d}\times\vec{k})^T+\frac{1}{2}\sin 2i\,[\vec{k}(\vec{d}\times\vec{k})^T+(\vec{d}\times\vec{k})\vec{k}^T]$　(12.10)

$\vec{d}=\cos\Omega\,\vec{i}+\sin\Omega\,\vec{j}$　(12.11)

$\vec{d}\times\vec{k}=\sin\Omega\,\vec{i}-\cos\Omega\,\vec{j}$　(12.12)

$(\vec{d}\times\vec{k})(\vec{d}\times\vec{k})^T=\frac{1}{2}[U-\vec{k}\vec{k}^T-\cos 2\Omega\,(\vec{i}\vec{i}^T-\vec{j}\vec{j}^T)-\sin 2\Omega\,(\vec{i}\vec{j}^T+\vec{j}\vec{i}^T)]$

$\vec{h}\vec{h}^T=\cos^2 i\,\vec{k}\vec{k}^T+\frac{1}{2}\sin^2 i\,[U-\vec{k}\vec{k}^T-\cos 2\Omega(\vec{i}\vec{i}^T-\vec{j}\vec{j}^T)-\sin 2\Omega(\vec{i}\vec{j}^T+\vec{j}\vec{i}^T)]$
$+\frac{1}{2}\sin 2i\,[\vec{k}(\sin\Omega\,\vec{i}^T-\cos\Omega\,\vec{j}^T)+(\sin\Omega\,\vec{i}-\cos\Omega\,\vec{j})\vec{k}^T]$

$=\frac{1}{2}\sin^2 i\,U+(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)\vec{k}\vec{k}^T+\vec{D}$　　(12.13)　　$\vec{D}$ 的表达式见书 (12.14)

代入(12.8)，可得 $\frac{1}{C\omega}\vec{N}=\frac{k}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(\vec{T}\times\hat{h}\hat{h}^T T-\vec{T}\times V\vec{T})$

$=a[(1-\frac{3}{2}\sin^2 i)\vec{T}\times\vec{k}\vec{k}^T\vec{T}+\vec{T}\times(\vec{D}-V)\vec{T}]$

其中 $a=\frac{k}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$

月、日对地球的合力矩 $\frac{1}{C\omega}\vec N = \frac{1}{C\omega}(\vec N_M + \vec N_S)$

中介极运动方程：

中介极 $\vec n$ 与极移 $\vec p_k$ 有关，$\vec n$ 为方程 11.21 的特解，满足 $\dot{\vec n} = \frac{1}{C\omega}\vec N - \frac{A}{C\omega}\vec n\times\dot{\vec n}$

迭代法：0级近似 $\dot{\vec n} = \frac{1}{C\omega}\vec N$ (12.15)

1级近似 $\dot{\vec n} = \frac{1}{C\omega}\vec N - \frac{A}{(C\omega)^2}\vec n\times\dot{\vec N}$ (12.16)

岁差项 $P_g\vec k\times\vec n$，故 $\dot{\vec n} = P_g\vec k\times\vec n + \frac{1}{C\omega}\vec N - \frac{A}{(C\omega)^2}\vec n\times\dot{\vec N}$ (12.17)

由《天》(12.24)，$\frac{1}{C\omega}\vec N = P\vec n\times\vec k\vec k^T\vec n + \vec B$(周期项) (12.18)

对时间求导，$\dot{\vec k}\approx 0$，$\frac{1}{C\omega}\dot{\vec N} = P(\dot{\vec n}\times\vec k\vec k^T\vec n + \vec n\times\vec k\vec k^T\dot{\vec n} + \dot{\vec B})$

$P = \theta_k(1-\frac{3}{2}\sin^3\xi) + Q_\xi$ 为小量

$\frac{A}{(C\omega)^2}\vec n\times\dot{\vec N} = \frac{A}{C\omega}P[\vec n\times(\dot{\vec n}\times\vec k\vec k^T\vec n) + \vec n\times(\vec n\times\vec k\vec k^T\dot{\vec n})] + \frac{A}{C\omega}\vec n\times\dot{\vec B}$

$= V[\dot{\vec n}(\vec k^T\vec n)^2U - (\vec k\vec k^T\vec n)(\dot{\vec n}^T\vec n) + \vec n\times(\vec n\times\vec k)\vec k^T\dot{\vec n}] + \frac{A}{C\omega}(\vec n\times\dot{\vec B})$

$\xrightarrow[\vec N\cdot\vec n=0,\ \dot{\vec n}\cdot\vec n=0]{《天》12.18}$ $V[(\vec k^T\vec n)^2U + \vec n\times(\vec n\times\vec k)\vec k^T]\dot{\vec n} + \frac{A}{C\omega}\vec n\times\dot{\vec B}$ (12.19)

(12.15) $\dot{\vec n} = \frac{1}{C\omega}\vec N$
(12.18) $\frac{1}{C\omega}\vec N = P\vec n\times\vec k\vec k^T\vec n + \vec B$ $\Rightarrow$ $\dot{\vec n} = P\vec n\times\vec k\vec k^T\vec n + \vec B$ (12.20)

$\Rightarrow \frac{A}{(C\omega)^2}\vec n\times\dot{\vec N} = V[(\vec k^T\vec n)^2U + \vec n\times(\vec n\times\vec k)\vec k^T]\ [P\vec n\times\vec k\vec k^T + \vec B] + \frac{A}{C\omega}\vec n\times\dot{\vec B}$

$= PV(\vec k^T\vec n)^2\vec n\times\vec k\vec k^T\vec n + V[(\vec k^T\vec n)^2U + \vec n\times(\vec n\times\vec k)\vec k^T]\vec B + \frac{A}{C\omega}\vec n\times\dot{\vec B}$ (12.21)

(12.18) $\frac{1}{C\omega}\vec N = P\vec n\times\vec k\vec k^T\vec n + \vec B$

将以上两式代入(12.17)，得

$\vec n$满足的方程 $\dot{\vec n} = P_g\vec k\times\vec n + P\vec n\times\vec k\vec k^T\vec n + \vec B - PV(\vec k^T\vec n)^3\vec n\times\vec k$
$- V[(\vec k^T\vec n)^2U + \vec n\times(\vec n\times\vec k)\vec k^T]\vec B - \frac{A}{C\omega}\vec n\times\dot{\vec B}$

方程的解：平极进动

略去周期项 $\vec B, \dot{\vec B}$，$\vec n\to\bar{\vec n}$ (平极)，$(\hat l,\hat m,\hat n)\to(\bar l,\bar m,\bar n)$

则 $\dot{\bar{\vec n}} = [P(1-V(\vec k^T\bar{\vec n})^2]\vec k^T\bar{\vec n} - P_g]\bar{\vec n}\times\vec k$

或 $\dot{\bar{\vec n}} = -(P_1 - P_g)(\vec k\times\bar{\vec n})$，其中 $P_1 = P(1-V\cos^2\varepsilon_A]\cos\varepsilon_A$，$\cos\varepsilon_A = \vec k^T\bar{\vec n}$

这是一个进动方程。$\bar{\vec n}$ 绕 $\vec k$ 进动，角速度 $-(P_1-P_g)$

$P_1$：摄动，$P_g$：测地岁差

几种坐标基矢间的关系：

黄道标架 $\vec i, \vec j, \vec k$

平赤道标架 $\vec l, \bar{\vec m}, \bar{\vec n}$，$\bar{\vec n}$ 为中介极方向单位矢，

$\vec l = \frac{\bar{\vec n}\times\vec k}{|\bar{\vec n}\times\vec k|}$，$\bar{\vec m} = \bar{\vec n}\times\vec l$

设 $\vec l, \bar{\vec m}, \bar{\vec n}$ 转动角速度为 $\vec r$，$\dot{\bar{\vec n}} = \vec r\times\bar{\vec n}$，$\dot{\bar{\vec n}} = -\psi\vec k\times\bar{\vec n}$

所以 $\vec r\times\bar{\vec n} = -\psi\vec k\times\bar{\vec n}$，$(\vec r\times\bar{\vec n})\cdot\vec k = 0$，$\vec r, \bar{\vec n}, \vec k$ 共面

$\vec r = -\psi\vec k + \chi\bar{\vec n}$，第二项为行星岁差

$\dot{\vec k} = \frac{\partial\vec k}{\partial t} + \vec r\times\vec k$，$\vec k$ 转动角速度为 $\gamma$ (12.25)

$\bar{\vec n}^T\vec k = \cos\varepsilon_A$

$\bar{\vec n}\times\vec k = \sin\varepsilon_A\vec l$ $\Rightarrow$ $\bar{\vec n}\times\frac{\partial\vec k}{\partial t} = \dot\varepsilon_A\cos\varepsilon_A\vec l$ $\Rightarrow$ $\vec k\times(\bar{\vec n}\times\frac{\partial\vec k}{\partial t}) = \dot\varepsilon_A\cos\varepsilon_A\vec k\times\vec l$

又因为 $\bar{\vec n}(\vec k\cdot\frac{\partial\vec k}{\partial t}) - \frac{\partial\vec k}{\partial t}\cdot\cos\varepsilon_k = -\frac{\partial\vec k}{\partial t}\cos\varepsilon_A$，所以 $\frac{\partial\vec k}{\partial t} = \dot\varepsilon_A\vec l\times\vec k$ (12.26)

所以 $\dot{\vec k} = (\dot\varepsilon_A\vec l + \vec r)\times\vec k$，又因为 $\vec k\times\vec l = -\vec j$，$\vec r = -\psi\vec k + \chi\bar{\vec n}$，$\bar{\vec n}\times\vec k = \sin\varepsilon_A\vec l$

所以 $\dot{\vec k} = -\dot\varepsilon_A\vec j + \chi\sin\varepsilon_A\vec l$

平黄赤交角变化率

行星岁差变化率

由$(\vec{l},\vec{m},\vec{n})$转动角速度为$\vec{r}$，有 $\dot{\vec{l}}=\vec{r}\times\vec{l}=(-\dot{\psi}\vec{k}+\dot{\chi}\vec{n})\times\vec{l}=-\dot{\psi}\vec{j}+\dot{\chi}\vec{m}$

$p=-\dot{\vec{l}}^T\vec{l}=[\dot{\vec{k}}\times\vec{l}+\vec{k}\times\dot{\vec{l}}]\vec{l}=\vec{k}\times[-\dot{\psi}\vec{j}+\dot{\chi}\vec{m}]\cdot\vec{l}=\dot{\psi}+\dot{\chi}\vec{l}\cdot[\vec{k}\times(\vec{n}\times\vec{l})]$

$=\dot{\psi}-\dot{\chi}\cos\varepsilon_A$

$M=-\dot{\vec{l}}^T\vec{m}=-[-\dot{\psi}\vec{j}+\dot{\chi}\vec{m}]\cdot\vec{m}=\dot{\psi}\vec{j}\cdot(\vec{n}\times\vec{l})-\dot{\chi}=\dot{\psi}\cos\varepsilon_A-\dot{\chi}$

$n=-\dot{\vec{l}}^T\vec{n}=-[-\dot{\psi}\vec{j}+\dot{\chi}\vec{m}]\cdot\vec{n}=[\dot{\psi}(-\vec{k}\times\vec{l})-\dot{\chi}(\vec{n}\times\vec{l})]\cdot\vec{n}=\dot{\psi}\sin\varepsilon_A$

$\vec{r}^T\vec{m}=(-\dot{\psi}\vec{k}+\dot{\chi}\vec{n})\cdot\vec{m}=(-\dot{\psi}\vec{k}+\dot{\chi}\vec{n})\cdot(\vec{n}\times\vec{l})=\dot{\psi}\sin\varepsilon_A=n$

$\vec{r}^T\vec{n}=(-\dot{\psi}\vec{k}+\dot{\chi}\vec{n})\cdot\vec{n}=-\dot{\psi}\cos\varepsilon_A+\dot{\chi}=-m$

$\vec{r}^T\vec{l}=(-\dot{\psi}\vec{k}+\dot{\chi}\vec{n})\cdot(\vec{n}\times\vec{k})=0$

所以 $\vec{r}=(\vec{r}^T\vec{m})\vec{m}+(\vec{r}^T\vec{n})\vec{n}+(\vec{r}^T\vec{l})\vec{l}=n\vec{m}-m\vec{n}$

求极移方程的解（真天极关于平天极的运动，章动）

略去$V_1$，$\frac{\partial B}{\partial t}$代替$\vec{B}$，可得 $\dot{\vec{n}}=P\vec{k}^T\vec{n}\,\vec{n}\times\vec{k}-P_g\vec{n}\times\vec{k}-\frac{A}{C\omega}\vec{n}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (12.27)

将$\vec{r}=-\dot{\psi}\vec{k}+\dot{\chi}\vec{n}$代入上式，有 $\frac{\partial\vec{n}}{\partial t}=\dot{\vec{n}}-\vec{r}\times\vec{n}=(P\vec{k}^T\vec{n}-P_g-\dot{\psi})\vec{n}\times\vec{k}-\dot{\chi}\,\vec{n}\times\vec{n}$

$+\vec{B}-\frac{A}{C\omega}\vec{n}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (12.29)

由平极运动方程，$\dot{\bar{n}}=\{P[1-v(\vec{k}^T\bar{n})^2]\vec{k}^T\bar{n}-P_g\}\bar{n}\times\vec{k}$ (12.30)

略去$V$，$\dot{\bar{n}}=(P\vec{k}^T\bar{n}-P_g)\bar{n}\times\vec{k}$ (12.31)

又有 $\dot{\bar{n}}=\vec{r}\times\bar{n}=[-\dot{\psi}\vec{k}+\dot{\chi}\bar{n}]\times\bar{n}=-\dot{\psi}\vec{k}\times\bar{n}$ (12.32)

对比两式，$\dot{\psi}=P\vec{k}^T\bar{n}-P_g$. (12.33)

取近似 $\vec{n}=\bar{n}$，则有 $\frac{\partial\vec{n}}{\partial t}=\vec{B}-\frac{A}{C\omega}\bar{n}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

积分，$\vec{n}-\bar{n}=\int\vec{B}\,dt-\frac{A}{C\omega}\bar{n}\times\vec{B}$，其中$\vec{B}=Q_m\bar{n}\times D_n\bar{n}-\bar{n}\times(Q_mV_m-Q_1V_1)\bar{n}$

$\approx Q_m\bar{n}\times D_n\bar{n}$，$D$由(12.14)给出

注意到 $\vec{j}^T\bar{n}=\vec{j}\cdot\bar{n}=\bar{n}\cdot(\vec{l}\times\vec{k})=\vec{l}\cdot(\vec{k}\times\bar{n})=\sin\varepsilon_A$，$\vec{l}^T\bar{n}=0$，$\bar{n}\times\vec{l}=\vec{m}$，

$\bar{n}\times\vec{k}=-\vec{l}\sin\varepsilon_A$，所以 $\bar{n}\times\vec{j}=\bar{n}\times(\vec{l}\times\vec{k})=\vec{l}\cos\varepsilon_A$，

$\bar{n}\times D_n\bar{n}$ 也可以表示出来. (12.35)

$\vec{B}=a_m\bar{n}\times D\bar{n}$，$a_m=\frac{K}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$，$K=-\frac{3\mu(C-A)}{C\omega a^3}$，$a_m$依赖于月球轨道根数和地球扁率

$\frac{1}{2}a_m\sin 2i=339.521$

$\frac{1}{2}a_m\sin^2 i=15.286$

## 第13课 人造地球卫星

研究摄动理论，给出地球、卫星、引力场的物理模型、基本物理量、基本方程、推论.

地球是一个扁球体，各壳层的密度在径向、方位角、极向三个方向上不均匀.

地球可看成刚体，卫星可以看成质点.

描述此系统运动状态的基本物理量：地球的$\rho(\vec{r})$，质点的轨道根数.

复习摄动理论：质点除受主体引力外，还受摄动力作用.

$\ddot{\vec{x}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{x}=\frac{dR}{d\vec{r}}$，摄动$R$为小量，$\mu=G(M_E+M_S)$

六根数与时间有关.

基本方程：引力势的负值记为$V(\vec{r})$，$\nabla^2V=4\pi G\rho(\vec{r})$，

$V=\int\frac{G\,dM}{r}$.

令$V=V_0+\Delta V$，其中$\Delta V$为摄动项，则有

$\ddot{\vec{x}}=\frac{dV}{d\vec{x}}$

$\Delta V$的来源：(1) 地球密度不均匀，近似为刚体

(2) 太阳、月球摄动

(3) 地球大气阻力 $D=\frac{1}{2}C_D\rho v^2A$

(4) 太阳光压

(2) 太阳、月球摄动

(3) 地球大气阻力 $D=\frac{1}{2}C_D\rho v^2 A$

(4) 太阳光压

(5)

轴对称椭球体引力势

$(-V)$ $V=-\frac{GM}{r}\left[1-J_2\left(\frac{R}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)\right]$, $J_2=1.0826\times10^{-3}$

将 $\Delta V$ 用轨道根数表示

$\Delta V=-\frac{GM_EJ_2}{r}(\cdot)+\cdots$

略去高阶项 $\Delta V=-\frac{GM_E J_2}{r}\left(\frac{R_E}{r}\right)^2\left(\frac{3}{4}\sin^2 i-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{r}\right)^3=\frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{a}{r}\right)^3 dM=\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{\partial\Delta V}{\partial e}=\frac{n^2J_2R_E^2 e}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{a}{4}\sin^2 i-\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{\partial\Delta V}{\partial i}=-\frac{1}{2}\frac{n^2J_2R_E^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\sin i\cos i$$

可求出 $\dot\omega$, $\dot\Omega$, 一周内的 $\Delta\omega$, $\Delta\Omega$

## 第14课 三体问题初步

介绍N体问题知识，物、数模型、求解方法、可积性、混沌、太阳系稳定性.

N体问题： $N>2$，给定初始条件下的运动.

复习第一章内容

物理模型 → 数学模型 → ~~求解~~ → 时空关系 → 与观测对比检验

物理模型：描述客观对象的演化，由基本物理量描述

数学模型：基本方程＋定解条件

例：质点运动

N体：质点组，引力场. 基本方程

引力场 $\phi(\vec r)=-\sum\frac{Gm_i}{|\vec r-\vec r_i|}$ (14.1)

运动 $-\nabla\phi(\vec r_i)=m_i\frac{d^2\vec r_i}{dt^2}$ (14.2)

于是有 $m_i\frac{d^2\vec r_i}{dt^2}=-\sum_{i\neq j}\frac{Gm_im_j}{|\vec r_i-\vec r_j|^3}(\vec r_i-\vec r_j)$ (14.3)

N体问题基本方程的推论：

N质点孤立体系，没有外力作用，动量、能量、角动量守恒，

(1) 质心系：日地质心为原点，地绕日轨道平面为基本平面，建立惯性坐标系 $O-xyz$

(2) 基本物理量 $\vec r_E$, $\vec r_S$，测量体 $\vec r$，

(3) 最基本物理量 $\vec r_{SE}=\vec r_E-\vec r_S$

(4) $\vec r_E$, $\vec r_S$ 的关系 $(1-\mu)\vec r_S+\mu\vec r_E=0$

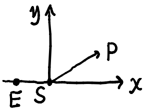
$\vec r_S=-\mu\vec r_{SE}$，$\vec r_E=(1-\mu)\vec r_{SE}$

设E,S绕O点圆周运动， $\vec\omega=\sqrt{a}\,\hat k=n\hat k$，

$\frac{d^2\vec r}{dt^2}=-\frac{G\mu(\vec r-\vec r_E)}{|\vec r-\vec r_E|^3}-\frac{G(1-\mu)}{|\vec r-\vec r_S|^3}(\vec r-\vec r_S)$，

$\ddot{\vec r}=-n^2\left(\frac{\mu\vec r_{Ep}}{r_{Ep}^3}+\frac{(1-\mu)\vec r_{Sp}}{r_{Sp}^3}\right)$ $\frac{d^2\vec r_i}{dt}=-$

基本方程（日心旋转系 会合坐标系）非惯性系




$\vec r_{SE}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $\vec r_{Ep}=\begin{pmatrix}x+1\\y\end{pmatrix}$ 惯性离心加速度 $-\vec n\times(\vec\omega\times\vec r)=-n^2\vec r$

科里奥利加速度 $-2\vec\omega\times\dot{\vec r}=2n(\dot y-\dot x)$

$$\ddot{\vec r}-2n\begin{pmatrix}\dot y\\\dot x\end{pmatrix}=n^2\left[-\frac{1-\mu}{r^2}\hat r-\frac{\mu}{r_{Ep}^2}\hat r_{Ep}+\begin{pmatrix}x+\mu\\y\end{pmatrix}\right]$$

$\frac{dr_{Ep}}{d\vec r}=\hat r_{Ep}$

$\frac{d}{d\vec r}\left(\frac{1}{r_{Ep}}\right)=-\frac{\vec r_{Ep}}{r_{Ep}^3}$

可得 $\ddot{\vec r}-2n\begin{pmatrix}\dot y\\-\dot x\end{pmatrix}=\frac{d\phi}{d\vec r}$ (14.13) $d\vec r=\dot{\vec r}dt$

$\dot{\vec r}\cdot\begin{pmatrix}\dot y\\-\dot x\end{pmatrix}=0$，所以 $\ddot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}dt=d\vec r\cdot\frac{d\Omega}{d\vec r}=d\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}=d\vec v\cdot\vec v$，

所以 $v^2=2\Omega-C$，C为积分常数 (Jacobi积分)

进一步讨论Jacobi积分：设测试体关于旋转系初速度为零，则

Jacobi积分为 $r^2+2\mu x+\frac{2(1-\mu)}{r}+\frac{2\mu}{r_{Ep}}=C$. (14.14)

进一步讨论Jacobi积分：设测试体关于旋转系初速度为零，则

Jacobi积分为 $r^2+2\mu x+\frac{2(1-\mu)}{r}+\frac{2\mu}{r_{Ep}}=C.$ (14.14)

若测试体初始位置为 $xy$ 平面，令 $C=C(x,y)=Z$，曲面 $C(x,y)$ 称为零速度面.

(1) 平衡点（拉格朗日点）$\frac{d\Omega}{d\vec r}=0$

也即 $\vec r-\frac{(1-\mu)}{r^3}\vec r-\frac{\mu}{r_{Ep}^3}\vec r_{Ep}+\begin{pmatrix}\mu\\0\end{pmatrix}=0$

$$\begin{cases}\left(1-\frac{1-\mu}{r^3}-\frac{\mu}{r_{Ep}^3}\right)x-\frac{\mu}{r_{Ep}^3}+\mu=0\\ \left(1-\frac{1-\mu}{r^3}-\frac{\mu}{r_{Ep}^3}\right)y=0\end{cases}$$

① $y=0$, $\vec r_{Ep}=\begin{pmatrix}x+1\\0\end{pmatrix}$, $r_{Ep}=x+1$ (14.20)

$$f(x)\equiv x+\mu-\frac{(1-\mu)\,\mathrm{sign}(x)}{x^2}$$

② $1-\frac{1-\mu}{r^3}-\frac{\mu}{r_{Ep}^3}=0$

$\Rightarrow r_{Ep}=r=1$

(2) 运动区域：$2\Omega=v^2+C\geq C$

$2\Omega<C$：测试点的运动禁区

注意到 $r_{Ep}^2-r^2=1+2x$

由(14.14) $r^2+2\mu x$

$\Omega(x,y)=(1-\mu)n^2\left(\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{r}\right)+\mu n^2\left(\frac{1}{2}r_{Ep}^2+\frac{1}{r_{Ep}}\right)$

$\Omega\to\infty$ $(r\to0, r\to\infty)$，所以 $\Omega$ 有极值

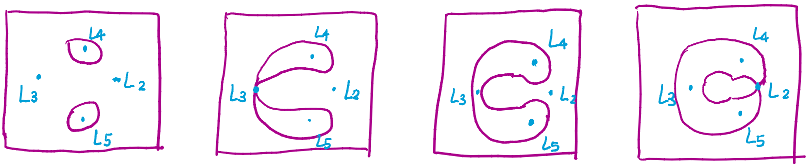
令 $z=2\Omega(x,y)$

平衡点 $L_1,L_2,L_3,L_4,L_5$，满足 $\frac{d\Omega}{d\vec r}=0$. 其中 $L_4$ 和 $L_5$ 取最小值.

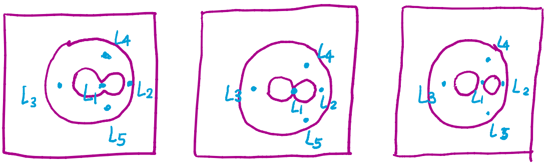
当 $\frac{\mu}{1-\mu}<0$，稳定. 否则不稳定.

当 $C=3$ 时，$z=C$ 与 $z=2\Omega(x,y)$ 在 $L_4$、$L_5$ 相切，所以 $C=3=C_4$ 为两个孤立点

当 $C<3=C_4$ 时，平面与曲面不相交，无运动禁区. 当 $C>3$ 时，禁区为包围 $L_4$、$L_5$ 两点的闭合曲线.




$C_4<C<C_3$　　$C=C_3$ 禁区在 $L_3$ 连通　　$C_3<C<C_2$　　$C=C_2$ 许可区为仅在 $L_2$ 连通的内外两区




$C_2<C<C_1$　　$C=C_1$　　$C>C_1$ 许可区为三连通区域，内许可区为包围两个天体的曲线

数学模型　动力学方程＋定解条件（初始、边界、衔接）

①可积（二体）给定初始条件，可以预报运动

②不可积　可能存在收敛级数解，但不普遍

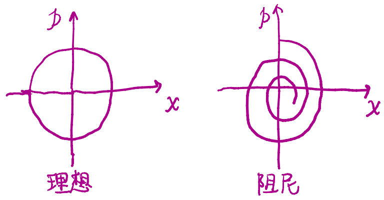
三体运动特性：

对某些初始条件，解为周期运动

其他初始条件：混沌

相空间（谐振子）

相空间 (谐振子)




摆动杆：①摆动　$v$ 小于某个临界值
　　　　②转动　$v$ 大于某个临界值　→ $v$ 的小变动引起运动大变动 → 混沌

挂重物的绳子　①摆动
　　　　　　　②转动一定角度后掉落 → 混沌
　　　　　　　③转动

太阳系的稳定性与三体问题

①一体有足够大的速度逃离 → 不稳定 → 混沌

② 太阳系中混沌运动的证据：小行星，土卫七

例：地月系统 $L_2$ 的位置


$$|OL_1| = \frac{L}{1+v} + x,\quad |EL_1| = L + x$$

$L_1$ 绕 O 的角速度 $\omega^2 = \dfrac{G(M_E+M_M)}{|EL_1|^2} = \dfrac{GM(1+v)}{L^2}$

$$ma = \frac{GM_E m}{|EL_1|^2} + \frac{GM_M m}{|ML_1|^2}$$

$$|EL_1|\omega^2 = \left(\frac{1}{1+v} + x\right)\frac{GM_E(1+v)}{L^2} = \frac{GM_E}{(1+x)^2} + \frac{GM_m}{x^2} \qquad (\text{见 } 182)$$

## 15 特殊摄动方法

介绍与天体力学有关的一类数学模型数值解。欧拉法 / 龙格-库塔法

数学模型　$\dot{y} = f(t)$

欧拉法　　给定步长，用 $h\dot{y} = hf(t)$ 取代差分 $y(t+h) - y(t)$

$$y(t+h) = y(t) + hf(t,y) + O(h^2)$$

$$y(t+nh) = y(t) + \sum hf(t, y + mh)$$

高阶龙格-库塔法　引入高阶近似　$y(t+h) = y(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i k_i$

$\sum_{i=1}^{m} b_i = 1$，由矩阵方程可求出 $b_i$

天体运动方程的高阶龙格-库塔法

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = a(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \\ \vec{r}|_{t=0} = \vec{r}_0 \\ \vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0 \end{cases}$$

令 $f = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{a} \end{pmatrix}$，$y = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$，则 $\dot{y} = f(t, y)$，$y|_{t=0} = \begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{v}_0 \end{pmatrix}$

$$y(t+h) = \begin{pmatrix} \vec{r}(t) + \sum b_j k_{rj} \\ \vec{v}(t) + \sum b_j k_{vj} \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} \vec{r}(t+nh) \\ \vec{v}(t+nh) \end{pmatrix}.$$

用切比雪夫多项式逼近天体状态

离散 → 连续

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i T_i(t_c) \qquad (15.1)$$

$$t_c = 2(t - t_0)/(t_f - t_0) - 1$$

对 t 求导　$\dfrac{t_f - t_0}{2}\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \dot{T}_i(t_c) \qquad (15.2)$

$t_c = 2(t-t_0)/(t_1-t_0) - 1$

对t求导 $\frac{t_1-t_0}{2}\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \dot{T}_i(t_c)$ (15.2)

其中$T_i$为切比雪夫多项式 $T_0=1, T_1=x, T_n = 2xT_{n-1} - T_{n-2}, \quad x\in[-1,1]$.

$t_c = \frac{2(t-t_0)}{t_1-t_0} - 1 \in [-1,1], \quad t\in[t_0,t_1]$. 求出$a$后，可以求出$x, v$，得到轨道根数

求出$a_i$：一般把$(t_0, t_1)$分为8个部分，$f = (x_0, \dot{x}_0, \cdots, x_8, \dot{x}_8)$，$t_i = 1 - \frac{i}{8}$

代入 $x(t) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i T_i(t_c)$，$\frac{t_1-t_0}{2}\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \dot{T}_i(t_0)$，

有$Ta=f$。其中$a = (a_0, a_1, \cdots, a_{N-1})^T$，$T = \begin{pmatrix} T_0(t_0) & \cdots & T_{N-1}(t_0) \\ \dot{T}_0(t_0) & \cdots & \dot{T}_{N-1}(t_0) \\ \vdots & & \\ T_0(t_8) & \cdots & T_{N-1}(t_8) \\ \dot{T}_0(t_8) & \cdots & T_{N-1}(t_8) \end{pmatrix}$

约束条件 $g_0(a) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i T_i(t_0) - x_0 = 0$

$g_1(a) = \sum a_i \dot{T}_i(t_0) - \dot{x}_0 = 0$

$g_2(a) = \sum a_i T_i(t_8) - x_8 = 0$

$g_3(a) = \sum a_i \dot{T}_i(t_8) - \dot{x}_8 = 0$

$J(\vec{a}) = (Ta-f)^T(Ta-f) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i g_i(a), \quad \delta J(\vec{a}) = 0$

这等价于 $\begin{cases} T^T Ta = T^T f & (5.6) \\ \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 & (5.7) \end{cases}$

经验公式：$W = \mathrm{diag}(1, 0.16, 1, 0.16, \cdots)$，$T^T W T a = T^T W f$

(见讲义194) 可得 $C_1 a_\lambda = C_2 f$. (5.9)

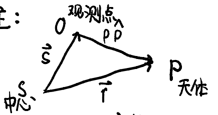
$a_0, \cdots, a_{N-1}$的特性

由(5.9)，$a_\lambda = C_1^{-1} C_2 f$ $C_1^{-1}C_2$为$18(N+4)$阶系数矩阵. 对太阳系天体，可查表.

16 初轨计算与微分改进

J2000历元参考系球坐标的赤经、赤纬 $\longrightarrow$ $\vec{r}(t), \vec{v}(t)$和轨道根数

一般描述：




$\vec{r} = \vec{s} + \rho\hat{\rho}$ (16.1)

(1)几何约束：$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$共面，故 $\vec{r}_2 = c_1\vec{r}_1 + c_3\vec{r}_3$

三次观测

故$(c_1\vec{s}_1 + c_3\vec{s}_3 - \vec{s}_2) = -(c_1\rho_1\hat{\rho}_1 + c_3\rho_3\hat{\rho}_3 - \rho_2\hat{\rho}_2)$，可以求出$\rho_1, \rho_2, \rho_3$.(用$c, \vec{s}, \hat{\rho}$表示).

(2)动力学约束

$\vec{r}_i = f_i\vec{r}_3 + g_i\vec{r}_2$，$f_i, g_i$是$\Delta t_i$的幂级数

$f_i \approx 1 - \frac{\mu}{2r_2^3}\Delta t_i^2$，$g_i \approx \Delta t_i - \frac{\mu}{6r_2^3}\Delta t_i^3$

$\vec{r}_1 \times \vec{r}_3$

$\vec{r}_3 \times \vec{r}_2$

$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$

$c_1 = \frac{g_3}{f_1 g_3 - f_3 g_1}$，$c_3 = -\frac{g_1}{f_1 g_3 - f_3 g_1}$，$c$可用$\Delta t$和$r_2$表示.

Gauss法 $\rho_2 = \frac{(\hat{\rho}_3 \times \hat{\rho}_1)\cdot(c_1\vec{r}_{s_1} - \vec{r}_{s_2} + c_3\vec{r}_{s_3})}{(\hat{\rho}_1 \times \hat{\rho}_2)\cdot\hat{\rho}_3}$

$\Rightarrow \rho_2 = A + \frac{\mu B}{r_2^3}$

$\vec{r}_2 = \rho_2\hat{\rho}_2 + \vec{r}_{s_2} \Rightarrow r_2^2 = \rho_2^2 + r_{s_2}^2 + 2\rho_2\hat{\rho}_2\cdot\vec{r}_{s_2} \Rightarrow r_2^8 + a r_2^6 + b r_2^3 + c = 0$

$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_2 = \frac{f_3\vec{r}_1 - f_1\vec{r}_3}{\cdots}$

$\vec{r}_2 = \rho_2\hat{\rho}_2 + \vec{r}_{S_2} \Rightarrow r_2^2 = \rho_2^2 + r_{S_2}^2 + 2\rho_2\hat{\rho}_2\cdot\vec{r}_{S_2} \Rightarrow r_2^8 + ar_2^6 + br_2^3 + c = 0$

$\Rightarrow \vec{r}_2 = \dfrac{f_3\vec{r}_1 - f_1\vec{r}_3}{f_3g_1 - f_1g_3}$

Olbers法（只用于抛物线）

$(\hat{\rho}_2\times\hat{S}_2)$ 点乘基本方程，得到联系 $\rho_1$、$\rho_3$的标量方程

动力学约束为Euler方程.

Laplace法

$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\hat{\rho}} + \dot{\vec{S}}$

$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\rho}\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \rho\ddot{\hat{\rho}} + \ddot{\vec{S}}$

代入 $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \vec{S}$，$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}$ 得 $(\ddot{\rho} + \frac{\mu}{r^3}\rho)\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \rho\ddot{\hat{\rho}} = -\ddot{\vec{r}}_S - \frac{\mu}{r^3}\vec{r}_S$

可以求出 $\rho$，$\dot{\rho}$ (16.17,18)

$r^2 = \rho^2 + S^2 + 2\rho(\hat{\rho}\cdot\vec{S})$，可以得到关于r的方程 $r \Rightarrow \rho, \dot{\rho} \Rightarrow \vec{r}, \dot{\vec{r}}$

张家祥方法 $f_i\hat{\rho}_i\times\vec{r} + g_i\hat{\rho}_i\times\dot{\vec{r}} = \hat{\rho}_i\times\vec{S}_i$：关于6个变量 $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 的3个方程

构造近似解序列

$\vec{r}_i = \rho_i\hat{\rho}_i + \vec{S}_i$

$\vec{r}_i = f_i\vec{r} + g_i\dot{\vec{r}}$

$\Rightarrow f_i\hat{\rho}_i\times\vec{r} + g_i\hat{\rho}_i\times\dot{\vec{r}} = \hat{\rho}_i\times\vec{S}_i$

6个未知数，2N 个方程. $N<3$：不能解. $N>3$：最小二乘法解

迭代求解：(1) 选取天体中心距 $r_0$，然后由 $f_i = 1 - \frac{\mu}{2r_0^3}(t_i-t_0)^2$，$g_i = t_i - t_0 - \frac{\mu}{6r_0^3}(t_i-t_0)^3$

求出 $f_i, g_i$，再代入 $f_i\hat{\rho}_i\times\vec{r} + g_i\hat{\rho}_i\times\dot{\vec{r}} = \hat{\rho}_i\times\vec{S}_i$ 求出 $\vec{r}$ 和 $\dot{\vec{r}}$.

记为 $\vec{r}^{(1)}$和$\dot{\vec{r}}^{(1)}$

(2) 对于 $k>1$，由 $\vec{r}^{(k-1)}$和 $\dot{\vec{r}}^{(k-1)}$ 求出 $\Delta E$，由 $f_i = 1 - \frac{a}{r_0}(1-\cos\Delta E_i)$，$g_i = t_i - t_0 - \frac{1}{n}(\Delta E_i - \sin\Delta E_i)$

求出 $f_i, g_i$，再代入 $f_i\hat{\rho}_i\times\vec{r} + g_i\hat{\rho}_i\times\dot{\vec{r}} = \hat{\rho}_i\times\vec{S}_i$ 求出 $\vec{r}^{(k)}$和$\dot{\vec{r}}^{(k)}$

(3) 太阳系内天体作光行差改正

(4) 迭代至 $|\vec{r}^{(k)} - \vec{r}^{(k-1)}| < \varepsilon$，取 $\vec{r}^{(k)}$，$\dot{\vec{r}}^{(k)}$ 为解

最小二乘法解矛盾方程组(最小二乘法) 见附录2.10

镜像映射: $Z = \vec{X} + w\hat{w}$ $\quad w^T X = 0$

镜像映射 $H\vec{z} = \vec{x} - \vec{w} = \vec{x} - w\hat{w} = \vec{x} + w\hat{w} - 2w\hat{w}$

$= \vec{x} + w\hat{w} - 2\hat{w}(\hat{w}^T(\vec{x} - w\hat{w}))$

$= \vec{z} - 2\hat{w}\hat{w}^T\vec{z}$

$H = U - \frac{2}{w^2}\vec{w}\vec{w}^T = U - 2\hat{w}\hat{w}^T$

H的特性:

① H对称 是正交矩阵（$HH^T = U$）

$H\vec{b} = \vec{b} - \frac{2\vec{w}^T\vec{b}}{w^2}\vec{w}$

② 取 $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$，$\hat{e}$为单位向量

$\vec{w} = \vec{a} - \xi\hat{e}$，

则 $w^2 = 2(a^2 - \xi\vec{a}^T\hat{e})$，$\vec{w}^T\vec{a} = \vec{a}^T\vec{w} = a^2 - \xi a^T\hat{e} = \frac{w^2}{2}$，

$H\vec{a} = \vec{a} - \frac{2}{w^2}(\vec{w}^T a)\vec{w} = \vec{a} - \vec{w} = \xi\hat{e}$

H把a映射到 $\xi\hat{e}$. 正交变换下向量长度不变，故 $\xi^2 = a^2$. 取 $\xi = -\mathrm{sign}(\vec{a}^T\hat{e})a$.

方阵三角化和求解矛盾方程组:

如果取 $\hat{e} = (1, 0, \cdots, 0)^T$，则 $H\vec{a} = (-\mathrm{sign}(a)a, 0, \cdots, 0)^T$，

对于 $A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，用 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ 构造H，则有

$HA^{(1)} = \begin{pmatrix} -\mathrm{sign}(a_{11})a & a_{12}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$. 令 $A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$，继续操作，可以把A上三角化

复习：刚性天体

(1) 基本物理量 $m_i$, $\vec{r}_i$

$\rho(\vec{r})$, $\phi(\vec{r})$

(2) 基本方程 $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$

$-\nabla\phi = m\ddot{\vec{r}}_i$

(3) 方法

(2) 基本方程 $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$

$-\nabla\phi = m\ddot{\vec{r}}_i$

(3) 方法

(4) 一般情形

无限薄球壳的引力势： $\nabla^2\phi = 0 \quad (r\neq a)$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{a^+} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{a^-} = 4\pi G\sigma$$

$$\phi_{a^+} = \phi_{a^-}$$

Laplace 方程分离变量求解： $\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_{nm}r^n + B_{nm}r^{-n-1}\right)Y_n^m(\theta,\varphi)$

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = N_l^m P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

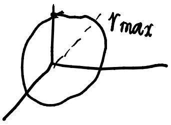
于是 $\phi(r,\theta,\phi) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm}r^n Y_n^m(\theta,\varphi) & r<a \\ \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_{nm}r^{-n-1}Y_n^m(\theta,\varphi) & r>a \end{cases}$

$A'_{nm} = B'_{nm}$ ， $A'_{nm}\dfrac{n}{a} + B'_{nm}\dfrac{(n+1)}{a} = -4\pi G\sigma_{nm}$

$\Rightarrow A'_{nm} = B'_{nm} = -\dfrac{4\pi G\sigma a}{2n+1}$ .

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} -\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{4\pi Ga\sigma_{nm}}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n^m(\theta,\varphi) & =\phi_{in} \\ -\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{4\pi Ga\sigma_{nm}}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}Y_n^m(\theta,\varphi) & =\phi_{ex} \end{cases}$$

任意形状刚体的引力势




即球壳引力势之和。先研究球壳，

球壳的面密度系数： $\delta\sigma_{nm}(a) = \delta a\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\left[Y_n^{m*}(\theta,\varphi)\rho(a,\theta,\phi)\right]$

$= \delta a\ \rho_{nm}(a)$

$r<r_{max}$ 时， $\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{r\sim r_{max}}\phi_{in} + \sum_{0\sim r}\phi_{ex}$

$$= \int_0^r -\sum_{m,n}\frac{4\pi Ga\rho_{nm}(a)}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}Y_n^m(\theta,\varphi)da$$

$$+\int_r^{r_{max}} -\sum_{m,n}\frac{4\pi Ga\rho_{nm}(a)}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n^m(\theta,\varphi)da$$

$r>r_{max}$ 时， $\phi(r,\theta,\varphi) = \int_0^{r_{max}} -\sum_{m,n}\frac{4\pi Ga\rho_{nm}(a)}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}Y_n^m(\theta,\varphi)da$

$m=0$：单极展开

$m=1$：偶极展开

$m=2$：四极展开

(1) 天体密度分布只与径向距离有关

$$\rho_{nm}(a) = \int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\left[Y_n^{m*}(\theta,\varphi)\rho(a)\sin\theta\right]$$

$$= \rho(a)\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}}\int_{-1}^1 P_n^m(x)dx\int_0^{2\pi}e^{-im\varphi}d\varphi$$

$$\rho_{n0}(a) = \rho(a)\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}}\int_{-1}^1 P_n(x)dx\ 2\pi = \sqrt{4\pi}\ \rho(a)\,\delta_{n0}$$

$r\le r_{max}$ ： $\phi(r) = -4\pi G\left[\frac{1}{r}\int_0^r\rho(a)a^2da + \int_r^{r_{max}}\rho(a)\,a\,da\right]$

$r>r_{max}$ ： $\phi(r) = -4\pi G\frac{1}{r}\int_0^{r_{max}}\rho(a)a^2da = -\frac{GM}{r}$

(2) $\rho$ 是常数

$r\le r_{max}$ ： $\phi = -G\left[\frac{M}{r}\left(\frac{r}{R_p}\right)^3 + 2\pi\rho\left(R_p^2 - r^2\right)\right]$ ， $R_p = r_{max}$

$r\ge r_{max}$ ： $\phi = -\frac{GM}{r}$

(3) 球壳，且 $\rho$ 只与 $a$ 有关

$r\ge r_{max}$ ： $\phi = -\frac{GM}{r}$

$r_{min}<r<r_{max}$ ： $\phi = -4\pi G\left[\frac{1}{r}\int_{r_{min}}^r\rho(a)a^2da + \int_r^{r_{max}}\rho(a)\,a\,da\right]$

$r \geq r_{max}$: $\phi = -\frac{GM}{r}$

$r_{min} < r < r_{max}$: $\phi = -4\pi G\left[\frac{1}{r}\int_{r_{min}}^{r} \rho(a)a^2 da + \int_{r}^{r_{max}} \rho(a)\, a\, da\right]$

$r < r_{min}$: $\phi = -4\pi G \int_{r_{min}}^{r_{max}} \rho(a)\, a\, da$

(4) 密度与纬度有关 $\rho = \rho(a,\theta)$

$$\rho_{nm}(a) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} \int_{-1}^{1} P_n^m(x)\rho(a,x)dx \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi}d\varphi$$

$\rho_{nm} = 0\ (m \neq 0)$, $\rho_{n0} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \int_{-1}^{1} P_n^m(x)\rho(a,x)dx \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$\phi(r,\theta) = -4\pi G \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Y_n^0(\theta,\varphi)}{2n+1} \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{r_{max}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \int_{-1}^{1} P_n(x)\rho(a,x) 2\pi\, da\, dx$$

$$= -2\pi G \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{r^{n+1}} \int_0^{r_{max}} \int_{-1}^{1} a^{n+2}\rho(a,x') P_n(x')dx' dn$$

$$= -\frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} J_n \left(\frac{R_p}{r}\right)^n P_n(x)\right]$$

$J_n$: 带谐系数 $n=1$, $J_1 = 0$

(5) 密度与半径、经度、纬度都有关

$$\phi(r,\theta,\varphi) = -4\pi G \sum_{n,m} \frac{Y_n^m(\theta,\varphi)}{2n+1} \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{r_{max}} \rho_{nm}(a,\theta,\varphi) a^{n+1} da$$

$$= -4\pi G \sum_{n,m} \frac{Y_n^m(\theta,\varphi)}{2n+1} \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{r_{max}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho(a,\theta,\varphi) a^{n+1} Y_n^{m*}(\theta,\varphi) \sin\theta\, da\, d\theta\, d\varphi$$

$$= -G \sum_{n,m} P_n^m(\theta,\varphi) e^{im\varphi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{r_{max}} \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} a^{n+2} \rho(a,x,\varphi) P_n^m(x,\varphi) e^{-im\varphi} da\, dx\, d\varphi$$

定义 $J_n^m = \frac{1}{MR_p^n} \int_0^{r_{max}} \int_{-1}^{1} \int_0^{2\pi} a^{n+2} \rho(a,x,\varphi) P_n^m(x,\varphi) e^{-im\varphi} da\, dx\, d\varphi$

则 $\phi(r,\theta,\varphi) = -\frac{GM}{r}\Big[1 + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} J_n^0 \left(\frac{R_p}{r}\right)^n P_m(x)}_{\text{带谐项}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m\neq 0} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} J_n^m \left(\frac{R_p}{r}\right)^n P_n^m(x) e^{im\varphi}}_{\text{田谐项}}$

例: 潮汐影响下的引力势

$R = \underbrace{R_p}_{\text{平均半径}}[1 + \varepsilon P_2(\cos\theta)]$ 只有带谐项

$$J_n = \frac{2\pi}{MR_p^n} \int_0^{r_{max}} \int_{-1}^{1} a^{n+2} \rho_0 P_n(x) dx\, da$$

椭球 $= \frac{2\pi}{MR_p^n} \int_{-1}^{1} \int_0^{R} a^{n+2} P_n(x) \rho_0\, da\, dx$

$$= \frac{2\pi}{MR_p^n} \int_{-1}^{1} \frac{R^{n+3}}{n+3} \rho_0 P_n(x) dx$$

$$\approx \frac{2\pi R_p^3}{M} \int_{-1}^{1} \frac{1 + (n+3)\varepsilon P_2(x)\, dx}{n+3} \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R_p^3}$$

$$= \underbrace{\frac{3}{4\pi}\int_{-1}^{1} P_n(x)dx}_{n\neq 0,1} + \int_{-1}^{1}(n+3)\frac{3}{4}P_2(x)P_0(x)dx$$

$$= (n+3)\frac{3}{4}\varepsilon \cdot \frac{2}{5}\delta_{n2}\frac{1}{n+3}2\pi$$

$$= \frac{3}{5}\varepsilon\delta_{n2}$$

$$\phi = -\frac{GM}{r}\left[1 + \frac{3}{5}\varepsilon\left(\frac{R_p}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta)\right]$$

椭圆运动的正则根数

(1) 概述: 摄动理论. 椭圆运动根数与t有关, 也是基本物理量.

(2) 定理: 若任意数量函数 $S = S(\vec{q},\vec{u},t)$ 在某域内的哈斯行列式

$$\det S_{\vec{q},\vec{u}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial u_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 S}{\partial q_n \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial q_n \partial u_n} \end{vmatrix} \neq 0$$, 则 $2n$维相空间 $(\vec{p},\vec{q})$

Hesse

与 $(\vec{u},\vec{v})$ 的变换 $\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial q}(\vec{q},\vec{u},t)$, $\vec{v} = \frac{\partial S}{\partial u}(\vec{q},\vec{u},t)$ 称为正则变换.

变换后哈密顿量 $\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$.

$\boxed{p \mid q}$

若 $\tilde{H} = 0$, 则 S 满足 Hamilton-Jacobi 方程

变换后 哈密顿量 $\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$.

$\vec{p}$ $\vec{u}$ 动量　$\vec{q}$ $\vec{v}$ 坐标

若 $\tilde{H} = 0$，则 S 满足 Hamilton-Jacobi 方程

$$H(S_{\vec{q}}, \vec{q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

(3) 导出一种形式的正则根数与椭圆轨道方向关系.（二体问题）

引入广义坐标 $(r,\theta,\varphi) = (q_1, q_2, q_3)$

$$L = \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2] + \frac{\mu}{r}$$

相应广义动量 $p_1 = \dot{r}$，$p_2 = r^2\dot{\theta}$，$p_3 = r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{\mu}{r}$$

H-J 方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] - \frac{\mu}{r} = 0$$

分离变量 $S = -\alpha_1 t + \alpha_3\varphi + S'(r,\theta)$

$$S'(r,\theta) = S_1(r) + S_2(\theta)$$

$$S_1 = \int_{r_1}^{r} \sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2}\,\frac{dr}{r}$$

$$S_2 = \int_0^{\theta} \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2\csc^2\theta}\,d\theta$$

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_2\varphi + S_1 + S_2$$

运动方程：$\dot{r} = \frac{\partial S}{\partial r}$，$r^2\dot{\theta} = \frac{\partial S}{\partial \theta}$，$r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = \frac{\partial S}{\partial \varphi}$

令 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为广义坐标，$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$

$\beta_1 = -t + \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1}$，$\beta_2 = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_2}$，$\beta_3 = \varphi + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_3}$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 称为正则根数

令 $y = 2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2 = 2\alpha_1(r-r_1)(r-r_2)$，则 $y > 0$.

$$\begin{cases} \alpha_1 > 0, & r < r_1 \text{ 或 } r > r_2 \\ \alpha_1 < 0, & r_1 < r < r_2 \quad \text{(椭圆)} \end{cases}$$

令 $r_1 = a(1-e)$，$r_2 = a(1+e)$，$r_1 + r_2 = -\frac{\mu}{\alpha_1}$，$r_1 r_2 = -\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1}$

有 $\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}$，$\alpha_2 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$

$$\beta_1 = -t + \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} = -t + \int_{r_1}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{2\alpha_1 r^2 + \mu r - \alpha_2^2}} = -t + \frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1}}\int_{r_1}^{r}\frac{r\,dr}{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}}$$

令 $r = a(1-e\cos E)$，$\mu = n^2 a^3$，则 $n(\beta_1 + t) = E - e\sin E$

Kelpler 方程 $E - e\sin E = n(t-\tau)$，$\beta_1 = -\tau = \frac{M_0}{n}$.

$$\beta_3 = \varphi + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_3} = \varphi - \int_0^{\theta}\frac{\alpha_3\csc^2\theta\,d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2\csc^2\theta}} = \varphi - \int_0^{\theta}\frac{\csc^2\theta\,d\theta}{\sqrt{\frac{\alpha_2^2-\alpha_3^2}{\alpha_3^2} - \cot^2\theta}}$$

定义 $\alpha_2^2 = \alpha_3^2\sec^2\psi$，则 $\beta_3 = \varphi - \arcsin\left(\frac{\cot\theta}{\tan\psi}\right)$

$\sin(\varphi - \beta_3) = \frac{\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\tan\psi}$ $\left(\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta \le \psi\right)$

令 $\psi = i$，$\alpha_3 = \alpha_2\cos i = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，此点为升交点经度.

$\beta_3 = \Omega$，$\cot\theta = \sin(\varphi - \Omega)\sin i$.

$$\beta_2 = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_2} = -\alpha_2\int_{r_1}^{r}\frac{dr}{r\sqrt{y}} + \alpha_2\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2\csc^2\theta}} = I_1 + I_2$$

$I_2 \xlongequal{\alpha_3 = \alpha_2\cos i} \arcsin\left(\frac{\cos\theta}{\sin i}\right)$　$\Rightarrow \cos\theta = \sin i\,\sin I_2$

$\cot\theta = \sin(\phi - \Omega)\tan i$

球面三角形正弦定理：$\cos\theta = \sin(f + w)\sin i$　　$I_2 = f + w$

$$I_1 = -\frac{\alpha_2}{\sqrt{-2\alpha_1}}\int_{r_1}^{r}\frac{dr}{r\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}} = -\frac{\alpha_2}{\sqrt{-2\alpha_1}}\int\frac{ae\sin E\,dE}{a(1-e\cos E)\sqrt{ae(1-\cos E)ae(1+\cos E)}}$$

$$= -\int_0^{E}\frac{\sqrt{1-e^2}\,dE}{1-e\cos E} = -\int_0^{E}\frac{\sin f}{\sin E}dE = -f$$

$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}$

$$= -\int_0^E \frac{\sqrt{1-e^2}\,dE}{1-e\cos E} = -\int_0^E \frac{\sin f}{\sin E}dE = -f$$

$$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 与 $a,e,i,\Omega,\omega,\tau$ 的关系

$$\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a},\quad \alpha_2=\sqrt{\mu a(1-e^2)},\quad \alpha_3=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cot i$$

$$\beta_1 = -\tau = \frac{M_0}{n},\quad \beta_2 = \omega,\quad \beta_3=\Omega$$

(4) 德洛勒根数：旧动量/坐标 $P_1,\alpha_2,\alpha_3,M,\beta_2,\beta_3$ 新 $P_1,P_2,P_3,Q_1,Q_2,Q_3$

$$S=S(Q,P,t)=S(Q_1,Q_2,Q_3,P_1,P_2,P_3,t)$$

$S'(Q,P,t)=\alpha_2Q_2+\alpha_3Q_3+S_1(Q_1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)$，$Q_1$由H−J方程得到

$$Q_1=M=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t+\beta_1)=\frac{(-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}}{\mu}(t+\beta_1),\quad \beta_1=\mu Q_1(-2\alpha_1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\beta_1=\frac{\partial S_1}{\partial\alpha_1}-t \Rightarrow S_1=\mu Q_1(-2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}-\alpha_1 t$$

$$S'(Q,P,t)=\alpha_2Q_2+\alpha_3Q_3+\mu Q_1(-2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}-\alpha_1 t$$

动量 $P_1=\frac{\partial S'}{\partial Q_1}=\sqrt{\mu a}$，$P_2=\frac{\partial S'}{\partial Q_2}=\alpha_2$，$P_3=\frac{\partial S'}{\partial Q_3}=\alpha_3$

坐标 $M=Q_1$，$\beta_2=\frac{\partial S'}{\partial \alpha_2}=Q_2$，$\beta_3=\frac{\partial S'}{\partial\alpha_3}=Q_3$

这种根数 $(P_1,P_2,P_3,Q_1,Q_2,Q_3)$ 记为 $(L,G,H,l,g,h)$

(5) 庞加莱根数

$$(\tilde{L},\tilde{G},\tilde{H},\tilde{l},\tilde{g},\tilde{h})$$

$$S=l\tilde{L}+g(\tilde{L}-\tilde{G})+h(\tilde{L}-\tilde{G}-\tilde{H})$$

$$\vec{p}=\frac{\partial S}{\partial\vec{q}}(\vec{q},\vec{u},t),\quad \vec{v}=\frac{\partial S}{\partial\vec{u}}(\vec{q},\vec{u},t)$$

$$L=\frac{\partial S}{\partial l}=\tilde{L},\quad \tilde{l}=\frac{\partial S}{\partial\tilde{L}}=l+g+h,\quad G=\frac{\partial S}{\partial g}=\tilde{L}-\tilde{G},\quad \tilde{g}=\frac{\partial S}{\partial\tilde{G}}=-g-h$$

$$H=\frac{\partial S}{\partial h}=\tilde{L}-\tilde{G}-\tilde{H},\quad \tilde{h}=\frac{\partial S}{\partial\tilde{H}}=-h$$

位力定理：N体系统中，相对坐标原点的转动惯量矩 $I=\sum m_i r_i^2$