1 第三章

12. 设ω_n 是$J_0(2\omega)=0$ 的正实根，把函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ 0.5, & x=1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$$

展开成$J_0(\omega_n x)$ 的级数。

解. ω_n^2 以及$J_0(\omega_n x)$ 为对应如下零阶贝塞尔固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases}x^2y''+xy'+\mu x^2y=0, 0\le x\le 2\\ |y(0)|<\infty, y(2)=0.\end{cases}$$

边界条件为I 类边界条件，所以$\mathcal{N}_{0,n}^2=2J_1^2(2\omega_n)$。

首先求

$$\langle f(x),J_0(\omega_n x)\rangle=\int_0^1 J_0(\omega_n x)xdx=\frac{1}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_n}J_0(x)xdx=\frac{1}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_n}(xJ_1(x))'dx=\frac{J_1(\omega_n)}{\omega_n}.$$

从而

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle f(x),J_0(\omega_n x)\rangle}{\mathcal{N}_{0,n}^2}J_0(\omega_n x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\omega_n)}{2\omega_n J_1^2(2\omega_n)}J_0(\omega_n x).$$

13. 设ω_n 是$J_1(\omega)=0$ 的正实根，把函数$f(x)=x, 0<x<1$ 展开成$J_1(\omega_n x)$ 的级数。

解. ω_n^2 以及$J_1(\omega_n x)$ 为对应如下*1*阶贝塞尔固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases}x^2y''+xy'+(\mu x^2-1)y=0, 0\le x\le 1\\ |y(0)|<\infty, y(1)=0.\end{cases}$$

边界条件为I 类边界条件，所以$\mathcal{N}_{1,n}^2=\frac{J_2^2(\omega_n)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2J_1(\omega_n)}{x}-J_0(\omega_n)\right)^2=\frac{J_0^2(\omega_n)}{2}$。

首先求

$$\langle x,J_1(\omega_n x)\rangle=\int_0^1 J_1(\omega_n x)x^2dx=\frac{1}{\omega_n^3}\int_0^{\omega_n}J_1(x)x^2dx=\frac{1}{\omega_n^3}\int_0^{\omega_n}(x^2J_2(x))'dx=\frac{J_2(\omega_n)}{\omega_n}=-\frac{J_0(\omega_n)}{\omega_n}.$$

从而

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle x,J_1(\omega_n x)\rangle}{\mathcal{N}_{1,n}^2}J_1(\omega_n x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\omega_n J_0(\omega_n)}J_1(\omega_n x).$$

16. 半径为R 的无限长圆柱的侧表面保持一定的温度u_0，柱子内的初始温度为0，内部无热源，求柱子内的温度分布变化？

解. 由对称性，容易知道温度分布与角度无关，与z 无关，不妨设温度$u=u(t,r)$。因而可以写出定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2\left(\frac{\partial u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), 0\le r\le R, t>0.\\ u|_{r=R}=u_0, u(0,r)=0.\end{cases}$$

首先边界条件齐次化，设$v=u-u_0$，得到

$$\begin{cases} v_t = a^2\left(\frac{\partial v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right), 0\le r\le R, t>0. \\ v|_{r=R}=0, v(0,r)=-u_0. \end{cases}$$

分离变量，$v(r,z)=\mathcal{R}(r)T(t)$，有

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{r\mathcal{R}''+\mathcal{R}'}{r\mathcal{R}}.$$

设上式为常值$-\mu$，得到固有值问题

$$\begin{cases} r^2\mathcal{R}''+r\mathcal{R}'+\mu r^2\mathcal{R}=0, 0\le r\le R \\ |\mathcal{R}(0)|<\infty, \mathcal{R}(R)=0. \end{cases}$$

这是零阶的贝塞尔固有值问题，因为有一个边界条件是I 类边界条件。因而零不是固有值，设

$$J_0(\omega R)$$

的所有正解为$0<\omega_1<\omega_2<\cdots$。则对应固有值$\omega_n^2$，固有函数$J_0(\omega_n r)$，将固有值带入$T_n$ 的方程，得到：

$$T_n'+a^2\omega_n^2T_n=0.$$

$T_n=A_ne^{-a^2\omega_n^2t}$。从而

$$v(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-a^2\omega_n^2t}J_0(\omega_n r).$$

求系数，令$t=0$, 得到

$$-u_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\omega_n r).$$

边界为I类边界条件，所以

$$\mathcal{N}_{0,n}^2=\frac{R^2J_1^2(\omega_nR)}{2},$$

并且

$$\langle -u_0, J_0(\omega_n r)\rangle = -u_0\int_0^R J_0(\omega_n r)rdr = -\frac{u_0}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_nR}J_0(r)rdr=-\frac{u_0}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_nR}(rJ_1(r))'dr=-\frac{u_0RJ_1(\omega_nR)}{\omega_n}.$$

所以

$$-u_0=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2u_0}{\omega_nRJ_1(\omega_nR)}J_0(\omega_n r).$$

对照得：

$$v(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2u_0}{\omega_nRJ_1(\omega_nR)}e^{-a^2\omega_n^2t}J_0(\omega_n r).$$

所以

$$u(t,r)=v(t,r)+u_0=u_0-2u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_nRJ_1(\omega_nR)}e^{-a^2\omega_n^2t}J_0(\omega_n r).$$

其中ω_n 为$J_0(\omega R)=0$ 的所有正根。

18(1). 解下列定解问题：

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + u_{zz} = 0, & 0 \le r \le a, 0 < z < l \\ u(a,z) = 0, \\ u(r,0) = 0, u(r,l) = T_0(\text{常数}). \end{cases}$$

解. 分离变量，$u(r,z) = R(r)Z(z)$，有

$$-\frac{Z''}{Z} = \frac{rR'' + R'}{rR}.$$

设上式为常值$-\mu$，得到固有值问题

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' + \mu r^2 R = 0, 0 \le r \le a \\ |R(0)| < \infty, R(a) = 0. \end{cases}$$

这是零阶的贝塞尔固有值问题，因为有一个边界条件是I 类边界条件。因而零不是固有值，设

$$J_0(\omega a)$$

的所有正解为$0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots$。则对应固有值$\omega_n^2$，固有函数$J_0(\omega_n r)$，将固有值带入$Z_n$ 的方程，得到：

$$Z_n'' - \omega_n^2 Z_n = 0.$$

$Z_n = A_n e^{\omega_n z} + B_n e^{-\omega_n z}$。从而

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\omega_n z} + B_n e^{-\omega_n z}) J_0(\omega_n r).$$

求系数，

$$\mathcal{N}_{0,n}^2 = \frac{a^2 J_1^2(\omega_n a)}{2},$$

并且

$$\langle T_0, J_0(\omega_n r)\rangle = \frac{T_0 a J_1(\omega_n a)}{\omega_n}.$$

$$u(r,l) = T_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2T_0}{a\omega_n J_1(\omega_n a)} J_0(\omega_i x).$$

对照得

$$\begin{cases} A_n + B_n = 0 \\ A_n e^{\omega_n l} + B_n e^{-\omega_n l} = \frac{2T_0}{a\omega_n J_1(\omega_n a)} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_n = \frac{2T_0}{(e^{\omega_n l} - e^{-\omega_n l}) a\omega_n J_1(\omega_n a)} \\ B_n = -\frac{2T_0}{(e^{\omega_n l} - e^{-\omega_n l}) a\omega_n J_1(\omega_n a)}. \end{cases}$$

从而

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_0}{sh(\omega_n l) a\omega_n J_1(\omega_n)} sh(\omega_n z) J_0(\omega_n r).$$

26 在半径为1的球内求调和函数($\Delta u = 0$)，使得

$$u|_{r=1} = 3\cos(2\theta) + 1.$$

解. 仅需求解泊松方程的定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 \\ u|_{r=1} = 3\cos(2\theta) + 1. \end{cases}$$

注意到在边界上满足轴对称，因而u 本身也是轴对称。在球坐标系下用勒让德多项式，解可以表示为（*P277*，第一行）

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos\theta).$$

既然在球心处有定义，所以$B_n = 0$. 令$r = 1$ 得到

$$3\cos(2\theta) + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n p_n(\cos\theta) = 6\cos^2\theta - 2.$$

是$\cos\theta$ 的偶函数，因而有待定系数

$$6\cos^2\theta - 2 = ap_2(\cos\theta) + bp_0(\cos\theta).$$

查表并解得$a = 4, b = 0$。所以

$$u = 4r^2 p_2(\cos\theta) = 2r^2(3\cos^2\theta - 1).$$

24 把下列函数按勒让德多项式展开：

(1) x^3

(2) x^4

(3) $|x|$

解. *(1)*和*(2)*用待定系数法，得：

$$x^3 = \frac{2}{5}p_3(x) + \frac{3}{5}p_1(x).$$

$$x^4 = \frac{8}{35}p_4(x) + \frac{4}{7}p_2(x) + \frac{1}{5}p_0(x).$$

*(3)*则要求系数，由于是偶函数，故不需要考虑奇数项。

$$\langle |x|, p_{2k}(x) \rangle = 2\int_0^1 x p_{2k}(x) dx.$$

当$k = 0$ 的时候，上式等于*1*。当$k \neq 0$ 的时候，上式等于

$$2\int_0^1 x p_{2k}(x) dx = \frac{2}{2k+2}\int_0^1 p_{2k-1}(x) dx = \frac{p_{2k-2}(0) - p_{2k}(0)}{(k+1)(4k-1)}.$$

整理得

$$\langle |x|, p_{2k}(x)\rangle = \frac{2(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}.$$

所以

$$|x| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle |x|, p_{2k}(x)\rangle}{\|p_{2k}\|^2} p_{2k}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(4k+1)(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!} p_{2k}(x).$$

28 半球的球面保持温度u_0，分别在下列条件下求稳定温度分布：

(1) 底面保持零度；

(2) 底面绝热。

解. *(1)* 把半球补成一个完整得球面，恒温=0，奇扩充，下半球面温度为$-u_0$，所以

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) p_n(\cos\theta).$$

在球心处有定义，所以$B_n = 0$。所以

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n p_n(\cos\theta).$$

取r 等于半球得半径a，则有

$$f(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n p_n(\cos\theta),$$

其中$f(\cos\theta) = u_0, \cos\theta \in [0,1], f(\cos\theta) = -u_0, \theta \in [-1,0]$. 将$f(\cos\theta)$ 做分解，因为是奇函数，不需要考虑奇数项

$$\langle f(\cos\theta), p_{2k+1}(x)\rangle = 2u_0 \int_0^1 p_{2k+1}(x)dx = 2u_0 \frac{p_{2k}(0) - p_{2k+2}(0)}{4k+3} = \frac{2u_0(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!}.$$

上式仅对$k > 0$ 成立，当$k = 0$ 时，$\langle f(\cos\theta), p_1(x)\rangle = u_0$. 所以

$$f(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f(\cos\theta), p_{2k+1}(x)\rangle}{\|p_{2k+1}\|^2} p_{2k+1}(x) = \frac{3u_0}{2} + u_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+3)(2k-1)!!}{(2k+2)!!} p_{2k+1}(x).$$

对照得，

$$A_{2k} = 0, A_{2k+1} = \frac{(-1)^k(2k+3)(2k-1)!!}{(2k+2)!!} \frac{1}{a^{2k+1}}, A_1 = \frac{3u_0}{2} \times \frac{1}{a}.$$

所以

$$u(r,\theta) = \frac{3u_0}{2} \times \frac{r}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+3)(2k-1)!!}{(2k+2)!!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} p_{2k+1}(\cos\theta).$$

(2),显然$u = u_0$.

29 半径为R 厚度为$R/2$ 的空心半球，内外球面的温度保持为

$$A\sin^2(\frac{\theta}{2}), \theta \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

底面温度为$A/2$，求半空心球温度分布？

解. 我们自然得想法是把半球壳变成一个完整得球壳。底面恒温，因而要用奇扩充，但是温度不是零，所以要先找个特解$A/2$，然后令$v = u - A/2$. 此时内外球壳温度分别为

$$f(\cos\theta) = -A/2 \times \cos\theta.$$

按勒让德分解得（待定系数）

$$f(\cos\theta) = -A/2p_1(\cos\theta).$$

又

$$v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n-1})p_n(\cos\theta).$$

分别令$r = R, R/2$ 并对照得：

$$A_n = B_n = 0, n \neq 1;$$

$$A_1 R + B_1 R^{-2} = -A/2, A_1 R/2 + B_1 (R/2)^{-2} = -A/2.$$

解得

$$A_1 = -\frac{3A}{7R}, B_1 = -\frac{AR^2}{14}.$$

所以

$$v(r,\theta) = -(\frac{3}{7R} + \frac{R^2}{14})A\cos\theta.$$

所以

$$u(r,\theta) = \frac{A}{2} - (\frac{3}{7R} + \frac{R^2}{14})A\cos\theta.$$

2 第四章

1.用傅里叶变换解下列问题：

(1)

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, -\infty < x < \infty, y > 0 \\ u(x,0) = f(x), \\ \lim_{x^2+y^2\to\infty} u(x,y) = 0. \end{cases}$$

解. 做傅里叶变换，设

$$U(\lambda, y) = \int_{\mathbb{R}} u(x,y)e^{i\lambda x}dx.$$

则

$$\begin{cases} -\lambda^2 U + U_{yy} = 0, -\infty < \lambda < \infty, y > 0 \\ U(\lambda, 0) = F[f]. \end{cases}$$

这是常微分方程，解得

$$U(\lambda, y) = C_1(\lambda)e^{-\lambda y} + C_2(\lambda)e^{\lambda y}.$$

又因为当$y \to +\infty$ 时候，为0，所以当$\lambda > 0$ 的时候，$C_2(\lambda) = 0$；当$\lambda < 0$ 的时候，$C_1(\lambda) = 0$。即

$$U(\lambda, y) = \begin{cases} C_1(\lambda)e^{-\lambda y}, \lambda > 0, y > 0 \\ C_2(\lambda)e^{\lambda y}, \lambda < 0, y > 0. \end{cases}$$

取$y=0$，得到

$$C_1(\lambda)=\begin{cases} F[f],\lambda>0,y>0\\ 0,\lambda<0,y>0.\end{cases}$$

以及

$$C_2(\lambda)=\begin{cases} 0,\lambda>0,y>0\\ F[f],\lambda<0,y>0.\end{cases}$$

所以

$$U(\lambda,y)=\begin{cases} F[f]e^{-\lambda y},\lambda>0,y>0\\ F[f]e^{\lambda y},\lambda<0,y>0.\end{cases}$$

用傅里叶反变换

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\infty F[f]e^{-\lambda y}e^{-i\lambda x}+\int_{-\infty}^0 F[f]e^{\lambda y}e^{-i\lambda x}d\lambda\right).$$

如果令$h(\lambda)=1,\lambda>0,h(\lambda)=0,\lambda<0$，则上式为

$$F^{-1}[F[f]\times e^{-\lambda y}h(\lambda)]+F^{-1}[F[f]\times e^{\lambda y}(1-h(\lambda))].$$

计算

$$F^{-1}[e^{-\lambda y}h(\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda y}h(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda y}e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-\lambda y-i\lambda x}}{-y-ix}|_0^\infty=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{y+ix}.$$

计算

$$F^{-1}[e^{\lambda y}(1-h(\lambda))]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 e^{\lambda y}e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{\lambda y-i\lambda x}}{y-ix}|_{-\infty}^0=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{y-ix}.$$

所以

$$F^{-1}[F[f]\times e^{-\lambda y}h(\lambda)]+F^{-1}[F[f]\times e^{\lambda y}(1-h(\lambda))]=\frac{1}{2\pi}\left(f*\frac{1}{y+ix}+f*\frac{1}{y-ix}\right)=\frac{y}{\pi}\times f*\frac{1}{x^2+y^2}.$$

即

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi.$$

(2)

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+f(t,x),-\infty<x<\infty,t>0\\ u(0,x)=0.\end{cases}$$

解. 做傅里叶变换，设

$$U(t,\lambda)=\int_{\mathbb{R}}u(t,x)e^{i\lambda x}dx.$$

则

$$\begin{cases} U_t=-\lambda^2a^2U+F[f],-\infty<\lambda<\infty,t>0\\ U(0,\lambda)=0.\end{cases}$$

有一个特解$\frac{F[f]}{a^2\lambda^2}$，设$V=U-\frac{F[f]}{a^2\lambda^2}$，则

$$\begin{cases} V_t=-\lambda^2a^2V,-\infty<\lambda<\infty,t>0\\ V(0,\lambda)=-\frac{F[f]}{a^2\lambda^2}.\end{cases}$$

所以
$$V = C(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}.$$
令$t=0$，得到$C(\lambda) = -\frac{F[f]}{a^2\lambda^2}$，所以
$$V(t,\lambda) = -\frac{F[f]}{a^2\lambda^2}e^{-a^2\lambda^2 t}.$$
所以
$$U(t,\lambda) = \frac{F[f]}{a^2\lambda^2} - \frac{F[f]}{a^2\lambda^2}e^{-a^2\lambda^2 t}.$$
求
$$\varphi(t,x) = F^{-1}[\frac{1-e^{-a^2\lambda^2 t}}{a^2\lambda^2}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-a^2\lambda^2 t}}{a^2\lambda^2}e^{-i\lambda x}d\lambda.$$
对t 求导
$$\varphi_t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}e^{-i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(a\sqrt{t}\lambda - \frac{ix}{2a\sqrt{t}})^2 - \frac{x^2}{4a^2 t}}d\lambda = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}}.$$
因为$\varphi(0,x)=0$。所以
$$\varphi(t,x) = \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}}{2a\sqrt{\pi\tau}}d\tau.$$
所以
$$u(t,x) = f*\varphi(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty}f(t,\xi)\int_0^t\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2\tau}}}{2a\sqrt{\pi\tau}}d\tau d\xi.$$
交换积分秩序就得到了书后面的答案。

(3)
$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, 0<x<\infty, t>0 \\ u(t,0)=\varphi(t), u(0,x)=0, \\ u(t,+\infty) = u_x(t,+\infty) = 0 \end{cases}$$

解. 做正弦变换，设
$$U(t,\lambda) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x)\sin(\lambda x)dx.$$
则
$$\begin{cases} U_t = -\lambda^2a^2U + a^2\lambda u(t,0) = -\lambda^2a^2U + a^2\lambda\varphi(t), -\infty<\lambda<\infty, t>0 \\ U(0,\lambda)=0. \end{cases}$$
从而
$$(e^{\lambda^2a^2t}U)_t = a^2\lambda\varphi(t)e^{\lambda^2a^2t}.$$
所以由牛顿莱布尼兹公式
$$e^{\lambda^2a^2t}U(t,\lambda) = e^{\lambda^2a^2\times 0}U(0,\lambda) + \int_0^t a^2\lambda\varphi(\tau)e^{\lambda^2a^2\tau}d\tau = \int_0^t a^2\lambda\varphi(\tau)e^{\lambda^2a^2\tau}d\tau.$$
所以
$$U(t,\lambda) = e^{-\lambda^2a^2t}\int_0^t a^2\lambda\varphi(\tau)e^{\lambda^2a^2\tau}d\tau = \int_0^t a^2\lambda\varphi(t-\tau)e^{-\lambda^2a^2\tau}d\tau.$$

做反正弦变换得到：

$$u(t,x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^t a^2\lambda\varphi(t-\tau)e^{-\lambda^2a^2\tau}d\tau\sin(\lambda x)d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^t a^2\varphi(t-\tau)d\tau\int_{-\infty}^\infty\lambda e^{-\lambda^2a^2\tau}\sin(\lambda x)d\lambda.$$

计算

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty\lambda e^{-\lambda^2a^2\tau}\sin(\lambda x)d\lambda&=\frac{1}{i}\int_{-\infty}^\infty\lambda e^{-\lambda^2a^2\tau}e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{i}\int_{-\infty}^\infty\lambda e^{-(a\sqrt{\tau}\lambda-\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}})^2-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\lambda\\&=\frac{1}{ia^2\tau}\int_{-\infty}^\infty\lambda e^{-(\lambda-\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}})^2-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\lambda\\&=\frac{1}{ia^2\tau}\left(\int_{-\infty}^\infty(\lambda-\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}})e^{-(\lambda-\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}})^2-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\lambda+\int_{-\infty}^\infty\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}}e^{-(\lambda-\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}})^2-\frac{x^2}{4a^2\tau}}d\lambda\right)\\&=\frac{1}{ia^2\tau}\frac{ix}{2a\sqrt{\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda^2}d\lambda\\&=\frac{xe^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}}{2a^3\tau^{3/2}}\times\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

所以

$$u(t,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^t a^2\varphi(t-\tau)\frac{xe^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}}{2a^3\tau^{3/2}}\times\sqrt{\pi}d\tau=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\varphi(t-\tau)\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}}}{\tau^{3/2}}d\tau.$$

2.用拉普拉斯变换解下列定解问题：

(2)

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},0<x<l,t>0\\u_x(t,0)=0,u(t,l)=u_0,\\u(0,x)=u_1\end{cases}$$

解. 做拉普拉斯变换，设

$$U(p,x)=L[u].$$

所以

$$\begin{cases}pU-u_1=a^2U_{xx},\\U_x(p,0)=0,U(p,l)=\frac{u_0}{p},\end{cases}$$

这是一个常微分方程，有个特解$\frac{u_1}{p}$，设$V(p,x)=U-\frac{u_1}{p}$，则

$$\begin{cases}pV=a^2V_{xx},\\V_x(p,0)=0,V(p,l)=\frac{u_0-u_1}{p},\end{cases}$$

得到

$$V(p,x)=C_1(p)e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+C_2(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

代入初始条件

$$\begin{cases}C_1(p)-C_2(p)=0,\\C_1(p)e^{\frac{\sqrt{p}}{a}l}+C_2(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l}=\frac{u_0-u_1}{p}.\end{cases}$$

解得

$$C_1(p) = C_2(p) = \frac{u_0 - u_1}{p} \times \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{p}}{a}l} + e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l}}.$$

所以

$$V(p,x) = \frac{u_0 - u_1}{p} \times \frac{e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{e^{\frac{\sqrt{p}}{a}l} + e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l}}.$$

所以

$$U(p,x) = \frac{u_0 - u_1}{p} \times \frac{e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{e^{\frac{\sqrt{p}}{a}l} + e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l}} + \frac{u_1}{p}.$$

其所有奇点为

$$0, -(\frac{(2k+1)a\pi}{2l})^2, k = 0, 1, 2, \cdots.$$

均为一阶。所以

$$u(t,x) = L^{-1}[U(p,x)] = \sum Res(U(p,x)e^{pt}) = \text{略}.$$

介意用分离变量法做。

(3)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - hu, x > 0, t > 0, h > 0 \\ u(0,x) = b, u(t,0) = 0, \\ u_x(t,+\infty) = 0. \end{cases}$$

解. 做拉普拉斯变换，设

$$U(p,x) = L[u].$$

所以

$$\begin{cases} pU - b = a^2 U_{xx} - hU, \\ U(p,0) = 0, U_x(p,+\infty) = 0. \end{cases}$$

有一个特解$\frac{b}{p+h}$，设$V = U - \frac{b}{p+h}$，则

$$\begin{cases} (p+h)V = a^2 V_{xx}, \\ V(p,0) = -\frac{b}{p+h}, V_x(p,+\infty) = 0. \end{cases}$$

所以

$$V(p,x) = C_1(p)e^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x} + C_2(p)e^{\frac{\sqrt{p+h}}{a}x}.$$

因为$V_x(p,+\infty) = 0$，所以$C_2(p) = 0$，令$x = 0$ 得到

$$C_1(p) = -\frac{b}{p+h}.$$

所以

$$V(p,x) = -\frac{b}{p+h}e^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x}.$$

所以

$$U = -\frac{b}{p+h}e^{-\frac{\sqrt{p+h}}{a}x} + \frac{b}{p+h}.$$

查表并用拉普拉斯变换相应性质得到：

$$u(t,x) = be^{-ht}(1 - erfc(\frac{x}{2a\sqrt{t}})).$$

3 第五章

3 解下列定解问题：

(1)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, (0 < x < l, t > 0) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \\ u(0,x) = \delta(x-\xi), 0 < \xi < l. \end{cases}$$

解. 用分离变量法，定解问题是齐次的，因而不需要齐次化，设$u = T(t)X(x)$。则有

$$T'X = a^2 TX''.$$

所以

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X}.$$

左端为t 的函数又端为x 的函数，所以为常数，记为$-\lambda$。得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, (0 < x < l, t > 0) \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

以及

$$T' + \lambda a^2 T = 0.$$

边界条件均为I类边界条件，由sl理论，零不是固有值，且所有固有值都大于零。解之固有值及对应固有函数为：

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, X_n = \sin(\frac{n\pi x}{l}), n = 1, 2, 3, \cdots.$$

将固有值代入T 的常微分方程，得到

$$T_n = A_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}.$$

所以

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

令$t = 0$，得到

$$\delta(x-\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

由傅里叶分解

$$A_n = \frac{\int_0^l sin(\frac{n\pi x}{l})\delta(x-\xi)dx}{\int_0^l sin^2(\frac{n\pi x}{l})dx} = \frac{2}{l} sin(\frac{n\pi\xi}{l}).$$

所以

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} sin(\frac{n\pi\xi}{l}) e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

(2)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, (0 < x < l, t > 0) \\ u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0, \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = \delta(x-\xi), 0 < \xi < l. \end{cases}$$

解. 用分离变量法，定解问题是齐次的，因而不需要齐次化，设$u = T(t)X(x)$。则有

$$T''X = a^2 TX''.$$

所以

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

左端为t 的函数又端为x 的函数，所以为常数，记为$-\lambda$。得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, (0 < x < l, t > 0) \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

以及

$$T'' + \lambda a^2 T = 0.$$

边界条件均为II类边界条件$q = 0$，由sl理论，零是固有值，所以$\lambda_0 = 0, X_0 = 1$。其余所有固有值都大于零。解之其他固有值及对应固有函数为：

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, X_n = \cos(\frac{n\pi x}{l}), n = 1, 2, 3, \cdots.$$

将固有值代入T 的常微分方程，得到

$$T_0 = A_0 + B_0 t, T_n = A_n \cos(\frac{n\pi at}{l}) + B_n \sin(\frac{n\pi at}{l}).$$

所以

$$u(t,x) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\frac{n\pi at}{l}) + B_n \sin(\frac{n\pi at}{l}) \right) \cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

令$t = 0$，得到$A_0 = A_n = 0$，以及

$$\delta(x-\xi) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

由傅里叶分解

$$B_0 = \frac{\int_0^l 1\delta(x-\xi)dx}{\int_0^l 1^2 dx} = \frac{1}{l},$$

和当$n \geq 1$ 时

$$B_n \frac{n\pi a}{l} = \frac{\int_0^l cos(\frac{n\pi x}{l})\delta(x-\xi)dx}{\int_0^l \cos^2(\frac{n\pi x}{l})dx} = \frac{2}{l}\cos(\frac{n\pi\xi}{l}).$$

所以当$n \geq 1$ 时，

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\cos(\frac{n\pi\xi}{l}).$$

$$u(t,x) = \frac{t}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi a}\cos(\frac{n\pi\xi}{l})\sin(\frac{n\pi at}{l})\cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

6. 求下列区域内第一边值问题的格林函数：

(1) 四分之一空间：$x > 0, y > 0$；

解. 设$M_0 = (\xi, \eta, \zeta), \xi, \eta > 0$ 处有正电荷大小为ε_0 只要再对应点摆上电荷，让在边界上电势为零即可：在$M_1 = (-\xi, \eta, \zeta)$ 和$M_2 = (\xi, -\eta, \zeta)$ 处各摆上$-\varepsilon_0$ 得电荷，在$M_3 = (-\xi, -\eta, \zeta)$ 处摆上大小为ε_0 得电荷，这样由对称性，就知道边界上电势为0，所以格林函数

$$G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M, M_0)} - \frac{1}{r(M, M_1)} - \frac{1}{r(M, M_2)} + \frac{1}{r(M, M_3)}\right);$$

(2) 上半球$x^2 + y^2 + z^2 < a^2, z > 0$;

解. 设$M_0 = (\xi, \eta, \zeta), \xi, \eta > 0$ 处有正电荷大小为ε_0 只要再对应点摆上电荷，让在边界上电势为零即可：在$M_1 = (\xi, \eta, -\zeta)$ 处摆上大小为$-\varepsilon_0$ 电荷，在$M_2 = \frac{a^2}{|OM_0|^2}(\xi, \eta, \zeta)$ 处摆上$-\frac{a}{|0M_0|}\varepsilon_0$ 得电荷，在$M_3 = \frac{a^2}{|OM_0|^2}(\xi, \eta, -\zeta)$ 处摆上大小为$\frac{a}{|0M_0|}\varepsilon_0$得电荷，这样由对称性，就知道边界上电势为0，所以格林函数

$$G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M, M_0)} - \frac{1}{r(M, M_1)} - \frac{a}{|0M_0|}\frac{1}{r(M, M_2)} + \frac{a}{|0M_0|}\frac{1}{r(M, M_3)}\right);$$

(3) 层状空间：$0 < z < H$.

解. 设$M_0 = (\xi, \eta, \zeta), 0 < \zeta < H$ 处有正电荷大小为ε_0 只要再对应点摆上电荷，让在边界上电势为零即可：在$M_1 = (\xi, \eta, -\zeta)$ 处摆上大小为$-\varepsilon_0$ 电荷，在$M_{2k} = (\xi, \eta, \zeta + 2kH)$ 处摆上ε_0电荷，在$M_{2k+1} = (\xi, \eta, -\zeta + 2kH)$ 处摆上$-\varepsilon_0$电荷，这样由对称性，就知道边界上电势为0，所以格林函数

$$G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\sum_{k=\infty}^{\infty}\frac{1}{r(M, M_{2k})} - \sum_{k=\infty}^{\infty}\frac{1}{r(M, M_{2k+1})}\right);$$

7. 求下列平面区域内第一边值问题的格林函数：

(1) 四分之一平面：$x > 0, y > 0$；

解. 设$M_0 = (\xi, \eta), \xi, \eta > 0$ 处有正电荷大小为ε_0 只要再对应点摆上电荷，让在边界上电势为零即可：在$M_1 = (-\xi, \eta)$ 和$M_2 = (\xi, -\eta)$ 处各摆上$-\varepsilon_0$ 得电荷，在$M_3 = (-\xi, -\eta)$ 处摆上大小为ε_0 得电荷，这样由对称性，就知道边界上电势为0，所以格林函数

$$G(M; M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r(M, M_0)} - \ln\frac{1}{r(M, M_1)} - \ln\frac{1}{r(M, M_2)} + \ln\frac{1}{r(M, M_3)}\right);$$

(2) 上半圆盘$x^2 + y^2 < 1, y > 0$;

解. 设$M_0 = (\xi, \eta), \xi, \eta > 0$ 处有正电荷大小为ε_0，在$M_1 = (\xi, -\eta,)$ 处摆上大小为$-\varepsilon_0$ 电荷，在$M_2 = \frac{1}{|OM_0|^2}(\xi, \eta)$ 处摆上$-\varepsilon_0$ 得电荷，在$M_3 = \frac{1}{|OM_0|^2}(\xi, -\eta)$ 处摆上大小为ε_0得电荷，这样圆周上和底边上电势为0. 所以

$$G(M; M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r(M, M_0)} - \ln\frac{1}{r(M, M_1)} - \ln\frac{1}{r(M, M_2)} + \ln\frac{1}{r(M, M_3)}\right);$$

(3)

例子1. 设平面区域$\Omega=\{(x,y):x+y>0\}$,

求区域Ω 的格林函数;

(2) 求区域Ω 的定解问题:

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0, x+y>0\\ u|_{x+y=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

解. *(1).* 设$M_0=(\xi,\eta)$为Ω 内点,则M_0 关于$x+y=0$ 的对称点为$M_0'=(-\eta,-\xi)$ 所以格林函数为

$$G(M;M_0)=-\frac{1}{2\pi}\left(\ln r(M,M_0)-\ln r(M,M_0')\right)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x+\eta)^2+(y+\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

*(2).*单位外法向为$\vec{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$,所以

$$\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}|_{\xi+\eta=0}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(G_\xi+G_\eta)|_{\xi+\eta=0}=-\frac{x+y}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}.$$

所以

$$u(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{2}\pi}\int\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}dl=\frac{x+y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}d\xi.$$

定理. 泊松方程边值问题:

$$\begin{cases}\Delta u=-f(x,y,z), M\in V\\ u|_{\partial V}=\varphi(x,y,z).\end{cases}$$

的解为

$$u(M)=-\int_S\varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial\vec{n}}dS+\int_V G(M;M_0)f(M_0)dM_0,$$

其中$G=G(M;M_0)$。

定理. 泊松方程边值问题:

$$\begin{cases}\Delta u=-f(x,y), M\in V\\ u|_{\partial V}=\varphi(x,y).\end{cases}$$

的解为

$$u(M)=-\int_{\partial V}\varphi(M_0)\frac{\partial_{M_0}G}{\partial\vec{n}}dl+\int_V G(M;M_0)f(M_0)dM_0,$$

其中$G=G(M;M_0)$。

8. 求方程$u_t=a^2u_{xx}+bu$ 的柯西问题的基本解.

解. 即求解定解问题:

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+bu, (-\infty<x<+\infty, t>0)\\ u(0,x)=\delta(x).\end{cases}$$

做傅里叶变换

$$U(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t,x)e^{i\lambda x}dx.$$

则有

$$\begin{cases} U_t = -\lambda^2 a^2 U + bU, (-\infty < \lambda < +\infty, t > 0) \\ U(0, \lambda) = 1. \end{cases}$$

这是一个t 常微分方程，虽然和λ 有关，解之

$$U(t, \lambda) = C(\lambda) e^{-(\lambda^2 a^2 - b)t}.$$

令$t = 0$，得

$$C(\lambda) = 1.$$

所以

$$U(t, \lambda) = e^{-(\lambda^2 a^2 - b)t}.$$

用傅里叶反变换

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda^2 a^2 - b)t} e^{-i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda a \sqrt{t} + \frac{ix}{2a\sqrt{t}})^2 + bt - \frac{x^2}{4a^2 t}} d\lambda \\ &= \frac{e^{bt - \frac{x^2}{4a^2 t}}}{2\pi} \times \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda a \sqrt{t} + \frac{ix}{2a\sqrt{t}})^2} da\sqrt{t}\lambda \\ &= \frac{e^{bt - \frac{x^2}{4a^2 t}}}{2\pi} \times \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda \\ &= \frac{e^{bt - \frac{x^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}} \end{aligned}$$

计算这种积分就是无脑配平方。

9. 用基本解法求解下列柯西问题：

(1)

$$\begin{cases} u_t + a u_x = f(t, x), (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(0, x) = \varphi(x). \end{cases}$$

解. 基本解即求定解问题

$$\begin{cases} v_t + a v_x = 0, (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ v(0, x) = \delta(x). \end{cases}$$

做傅里叶变换

$$V(t, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t, x) e^{i\lambda x} dx.$$

则有

$$\begin{cases} V_t - \lambda i a V = 0, (-\infty < \lambda < +\infty, t > 0) \\ V(0, \lambda) = 1. \end{cases}$$

这是一个t 常微分方程，虽然和λ 有关，解之

$$V(t,\lambda)=C(\lambda)e^{i\lambda at}.$$

令$t=0$，得到$C(\lambda)=1$，所以

$$V(t,\lambda)=e^{i\lambda at}.$$

做傅里叶反变换，基本解

$$U(t,x)=v(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda at}e^{-i\lambda x}d\lambda=\delta(x-at).$$

代入书上得公式

$$\begin{aligned}u(t,x)&=U*\varphi+\int_0^t U(t-\tau,x)*f(\tau,x)d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi-at)\varphi(x-\xi)d\xi+\int_0^t U(t-\tau,x)*f(\tau,x)d\tau\\&=\varphi(x-at)+\int_0^t f(\tau,x-a(t-\tau))d\tau.\end{aligned}$$

第一章 定解问题，达朗贝尔公式；

第二章 各种分离变量，固有值问题；

第三章 贝塞尔固有值问题，贝塞尔傅里叶展开，勒让德固有值问题，勒让德展开，一些计算；

第四章 主要是傅里叶变换，拉普拉斯变换多做了解；

第五章 基本解和格林函数，解的积分表达式。

3.1 关于二维波动方程得基本解-降维法

其实很简单，其实只要求如下初始问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),(-\infty<x,y<+\infty,t>0)\\u(0,x,y)=0,u_t(0,x,y)=\delta(x,y)\end{cases}$$

假装它是个三维的波动方程，即求

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),(-\infty<x,y<+\infty,t>0)\\u(0,x,y,z)=0,u_t(0,x,y,z)=\delta(x,y)\end{cases}$$

这个定解问题的解应该是和z 无关的，实际上无视z 的话，这个解就是二维波动方程的基本解。解下面这个初始问题，我们有公式

$$u(t,x,y,z)=\delta(x,y)*U(t,x,y,z).$$

计算

$$\begin{aligned}
\delta(x,y)*U(t,x,y,z) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} U(t,x-\xi,y-\eta,z-\zeta)\delta(\xi,\eta)d\xi d\eta d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} U(t,x-\xi,y-\eta,z-\zeta)\delta(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}} U(t,x,y,z-\zeta)d\zeta. \\
&= \int_{\mathbb{R}} U(t,x,y,\zeta)d\zeta \qquad \text{积分号内是}\zeta\text{ 的偶函数。} \\
&= 2\int_0^{\infty} U(t,x,y,\zeta)d\zeta.
\end{aligned}$$

x,y 固定，做变量替换$r=\sqrt{x^2+y^2+\zeta^2}$ 替换ζ。即

$$\zeta=\sqrt{r^2-x^2-y^2}, d\zeta=\frac{rdr}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}.$$

所以要求的积分等于

$$2\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\infty}\frac{\delta(r-at)}{4\pi ar}\frac{rdr}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\infty}\frac{\delta(r-at)}{2\pi a}\frac{dr}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\begin{cases}\frac{1}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-x^2-y^2}}, at>\sqrt{x^2+y^2}\\ 0, at<\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$