第二章 LAGRANGE 力学

一、 牛顿力学中的约束运动

考虑被约束在光滑旋转抛物面上的质点，其坐标满足约束方程

$$f(x,y,z) = z - (x^2 + y^2) = 0$$

其中z-轴是垂直向上的方向。

质点受到抛物面的约束力（工程学科称之为约束反力）。约束力$\vec{R}$的方向只能沿着切平面的法向，

$$\vec{R} = \lambda(t)\nabla f(\vec{r})$$

其中$\lambda(t)$是待定乘子。

运动方程为

$$-mg\boldsymbol{e}_z + \lambda(t)\nabla f(\vec{r}) = m\ddot{\vec{r}}$$

写成分量形式

$$\begin{cases} -2\lambda x = m\ddot{x} \\ -2\lambda y = m\ddot{y} \\ -mg + \lambda = m\ddot{z} \end{cases}$$

运动方程与约束方程联立，四个微分方程刚好可以求解四个未知量$\{x(t), y(t), z(t), \lambda(t)\}$。

每增加一个约束条件，就会多出一个待定乘子需要求解——问题反而变得更复杂了。当系统的自由度和约束的个数都很多时，会比较困难。

在牛顿力学中，约束越多越复杂。解决的方法是引进广义坐标。

二、 约束的类型

1. 约束方程

约束条件多种多样，可能来限定系统在面上、沿轨道运动、体积不变或者其它运动学要求。

约束条件可以是代数方程、不等式，也可以是微分方程或泛函。

2. 约束的分类

我们可以按照约束条件的特点分类以方便讨论。

(1) 是否显含时间

稳定约束（定常约束scleronomic constraints）

不稳定约束（非定常约束rheonomic constraints）

(2) 是否含速度

几何约束、微分约束

(3) 是否可以解除

可解约束(单面约束，用不等式表示)、**不可解约束**(双面约束，用等式表示)

3. 完整约束和广义坐标

(1) 完整约束

Holonomic constraints

几何约束，或者可积的微分约束

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\big(t, q(t)\big)$$

(2) 广义坐标

广义坐标： 能够确定体系位形（对力学问题即质点组的全部质点坐标）的独立变量。

位形自由度：完全确定体系位形时，所需的最少广义坐标数目。

每一个完整约束可减少一个位形自由度。

(3) 非完整约束

不可积微分约束

例 无弹性的绳子

位形$\vec{r} = \vec{r}(s,t)$满足约束条件

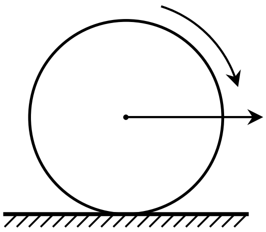
$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (ds)^2$$

约束方程为

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2=1$$

这是定常约束、几何约束、双面约束、完整约束。

例 轮子在直线上作纯滚动



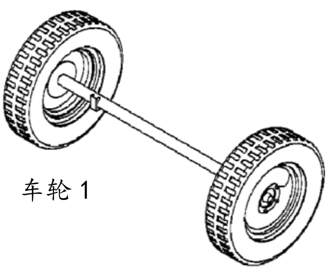
$$\mathrm{d}x-a\mathrm{d}\varphi=0$$

$$\dot{x}-a\dot{\varphi}=0$$

这是可积约束，

$$x=a\varphi+x_0$$

例 两个半径为a的轮子，使用轴承安装在长度为l的车轴两端。整个系统在水平面上作无滑动滚动。写出约束方程并判断是否可积。



解：①在地面建立笛卡尔坐标系，设车轴中点的水平坐标为(x,y)；车轴方向（从车轮 1 指向车轮 2）与x-轴夹角为θ；沿着车轴方向看，取车轮逆时针旋转方向为正，两个轮子的转角分别为φ_1,φ_2。总计有 5 个广义坐标。

轮子与地面的接触点坐标为

$$(x,y)\mp\frac{l}{2}(\cos\theta,\sin\theta)$$

故轮子上触地点的牵连位移为

$$(\Delta x,\Delta y)\mp\frac{l}{2}\Delta\theta(-\sin\theta,\cos\theta)$$

轮子的转动对触地点贡献位移

$$a\Delta\varphi_i\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)=a\Delta\varphi_i(\sin\theta,-\cos\theta)$$

触地点的总位移为

$$(\Delta x,\Delta y)\mp\frac{l}{2}\Delta\theta(-\sin\theta,\cos\theta)+a\Delta\varphi_i(\sin\theta,-\cos\theta)$$

无滑滚动即两个接触点的位移均为零，即满足差分约束方程

$$(\Delta x,\Delta y)-\frac{l}{2}\Delta\theta(-\sin\theta,\cos\theta)+a\Delta\varphi_1(\sin\theta,-\cos\theta)=0$$

$$(\Delta x,\Delta y)+\frac{l}{2}\Delta\theta(-\sin\theta,\cos\theta)+a\Delta\varphi_2(\sin\theta,-\cos\theta)=0$$

这是四个线性约束。

现在以$\{dx,dy,d\theta,d\varphi_1,d\varphi_2\}$代表在$dt$时间内系统的真实运动，把差分$\Delta$替换成微分$d$，得微分 1-形式的约束方程，

$$\begin{cases}\omega_1=dx+\dfrac{l}{2}\sin\theta\,d\theta+a\sin\theta\,d\varphi_1=0\\ \omega_2=dy-\dfrac{l}{2}\cos\theta\,d\theta-a\cos\theta\,d\varphi_1=0\\ \omega_3=dx-\dfrac{l}{2}\sin\theta\,d\theta+a\sin\theta\,d\varphi_2=0\\ \omega_4=dy+\dfrac{l}{2}\cos\theta\,d\theta-a\cos\theta\,d\varphi_2=0\end{cases}$$

四个方程两边同除以dt，得微分约束方程

$$\begin{cases}\dot{x}+\dfrac{l}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}+a\sin\theta\,\dot{\varphi}_1=0\\ \dot{y}-\dfrac{l}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}-a\cos\theta\,\dot{\varphi}_1=0\\ \dot{x}-\dfrac{l}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}+a\sin\theta\,\dot{\varphi}_2=0\\ \dot{y}+\dfrac{l}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}-a\cos\theta\,\dot{\varphi}_2=0\end{cases}$$

微分 1-形式的约束条件是 4 个线性方程，但是秩为 3，只有 3 个方程独立，所以（也可以直接计算）有

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3\wedge\omega_4=0$$

为了检查可积性，可以令

$$\begin{aligned}\Omega &\stackrel{\text{def}}{=} \omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3\\ &=-l\sin\theta\,dx\wedge dy\wedge d\theta-a\sin\theta\,dx\wedge dy\wedge d\varphi_1+a\sin\theta\,dx\wedge dy\wedge d\varphi_2-\frac{la}{2}\cos\theta\sin\theta\,dx\wedge d\theta\\ &\quad\wedge d\varphi_1-\frac{la}{2}\cos\theta\sin\theta\,dx\wedge d\theta\wedge d\varphi_2-a^2\cos\theta\sin\theta\,dx\wedge d\varphi_1\wedge d\varphi_2\\ &\quad-\frac{la}{2}\sin^2\theta\,dy\wedge d\theta\wedge d\varphi_1-\frac{la}{2}\sin^2\theta\,dy\wedge d\theta\wedge d\varphi_2-a^2\sin^2\theta\,dy\wedge d\varphi_1\wedge d\varphi_2\end{aligned}$$

计算外微分

$$\begin{cases} d\omega_1 = a\cos\theta\, d\theta \wedge d\varphi_1 \\ d\omega_2 = a\sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi_1 \\ d\omega_3 = a\cos\theta\, d\theta \wedge d\varphi_2 \end{cases}$$

求外积

$$\Omega \wedge d\omega_1 = a^2 \sin\theta\cos\theta\, dx \wedge dy \wedge d\theta \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$$

$$\Omega \wedge d\omega_2 = a^2 \sin^2\theta\, dx \wedge dy \wedge d\theta \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$$

$$\Omega \wedge d\omega_3 = a^2 \sin\theta\cos\theta\, dx \wedge dy \wedge d\theta \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$$

有非零项，根据 Frobenius 定理，是不可积约束。

②消去可积的自由度

令

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \qquad \phi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

这三个约束可以化简成

$$\begin{cases} dx + a\sin\theta\, d\varphi = 0 \\ dy - a\cos\theta\, d\varphi = 0 \\ d\theta + \dfrac{a}{l} d\phi = 0 \end{cases}$$

最后一个方程可积，

$$\phi = -\frac{a}{l}\theta + \phi_0$$

所以系统只需要四个广义坐标$\{x, y, \theta, \varphi\}$，且满足约束方程

$$\begin{cases} \omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} dx + a\sin\theta\, d\varphi = 0 \\ \omega_2 \stackrel{\text{def}}{=} dy - a\cos\theta\, d\varphi = 0 \end{cases}$$

计算它们的外积

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1 \wedge \omega_2 = dx \wedge dy - a\cos\theta\, dx \wedge d\varphi - a\sin\theta\, dy \wedge d\varphi$$

和外微分

$$\begin{cases} d\omega_1 = a\cos\theta\, d\theta \wedge d\varphi \\ d\omega_2 = a\sin\theta\, d\theta \wedge d\varphi \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} \Omega \wedge d\omega_1 = a\cos\theta\, dx \wedge dy \wedge d\theta \wedge d\varphi \\ \Omega \wedge d\omega_2 = a\sin\theta\, dx \wedge dy \wedge d\theta \wedge d\varphi \end{cases}$$

是不可积约束。

③定位跟踪

如果我们只检测两轮车本身的运动，而不关心轮子转过多少圈，可在约束方程中消去$d\varphi$，得

$$\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy = 0$$

$$\cos\theta\, \dot{x} + \sin\theta\, \dot{y} = 0$$

除非发生了侧向滑动，两轮车的运动满足上面的微分约束方程。

三、 分析力学中的变分原理

牛顿方程

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{0}, \qquad i = 1, \cdots, N$$

其中$\vec{F}_i$是主动力，$\vec{R}_i$是约束力。

在几何约束下，约束力始终与约束面垂直。为了消除约束力，可以用约束面的切矢量与方程两边做内积，为此引入虚位移的概念。

1. 虚位移和理想约束

(1) 虚位移

质点组在t时刻瞬时发生, 符合约束条件(但无需满足运动方程)的无限小位移$\delta\vec{r}_i(t)$。

或者等价地表述成：两个可能位移之无限小差，即数学中的变分（后面章节详细讨论）。

可能位移：满足约束条件的位移$\vec{r}_i(t)$（无需满足运动方程）。

真实位移：同时满足约束条件和运动方程的位移。

用广义坐标表示的虚位移为

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, q), \qquad \delta\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha$$

例 蚂蚁爬行在膨胀的气球上，虚位移$\delta\vec{r}$在球面的切平面内；实际位移$d\vec{r}$既有切向分量，也有法相分量。

例 穿在匀加速运动圆环上的珠子，

珠子的虚位移$\delta\vec{r}$沿圆环当前的切向；

真实位移$d\vec{r}$ = 切向分量 + 牵连分量$\vec{v}dt$.

(2) 虚功

力在虚位移上所作的元功

$$\delta W \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

(3) 理想约束

如果约束力的虚功之和恒为零，则称相应的约束为理想约束。此时只有主动力做功，

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

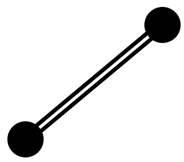
理想约束很常见。 杆、刚体、光滑面、无滑滚动、铰链、绳子

例 铰链是理想约束

接触点处位移相同，约束力和约束反力之和为零，故虚功为零。

例 刚性杆连接两个质点

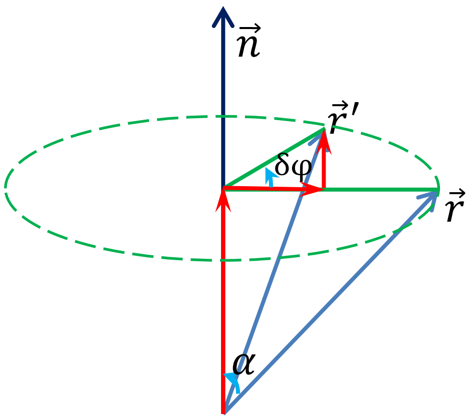
利用牛顿第三定律的强形式，



$$\left.\begin{array}{r} (\vec{r}_A - \vec{r}_B)^2 = l^2 \Longrightarrow (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \cdot (\delta \vec{r}_A - \delta \vec{r}_B) = 0 \\ \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} = c(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \delta W = \vec{F}_{BA} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{F}_{AB} \cdot \delta \vec{r}_B = 0$$

是理想约束。

例 刚体约束是理想约束



刚体内部的各质点之间的距离都不变，任一质点的运动可分解为参考点c的牵连运动和相对于与参考点的转动。

如果过参考点的转动轴沿$\vec{n}$方向，逆时针转无穷小角度$\delta\varphi$，那么转动引起的位移为

$$\left.\begin{array}{r} \Delta\vec{r} \parallel \vec{n} \times \vec{r} \\ |\Delta\vec{r}| = |\vec{r}| \sin\alpha\, \delta\varphi \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta\vec{r} = \delta\varphi \vec{n} \times \vec{r}$$

$$\delta \vec{r}_i = \delta \vec{\varphi} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_c) + \delta \vec{r}_c$$

$$\delta \mathrm{W} = \sum_{\mathrm{i}} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \left(\sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) \times \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{\varphi} + \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_c$$

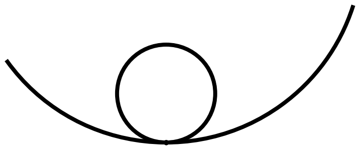
考虑孤立刚体，$\vec{F}_i$均为内力。伽利略相对性要求空间转动不变，即角动量守恒，合力矩为零；空间平移不变要求动量守恒，合力为零（后面的章节再详细讨论）。因此内力的性质是总内力为零，总内力矩为零。

约束力是内力，内力的虚功为零，所以刚性约束是理想约束[1]。

例 无弹性的绳子，可看成无穷多个刚性杆通过铰链连接，因此是理想约束。

例 光滑表面的约束是理想约束

“光滑”表面的接触点处，作用力垂直于切面法线方向$\vec{n}$。记物体上的接触点为 A，表面上的接触点为 B，



$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A} = F\vec{n}$$

A、B 两点重合,相对虚位移没有法向分量，

$$\delta\vec{r}_A = \epsilon\vec{n} + \epsilon_1\vec{m}_{A\perp}, \qquad \delta\vec{r}_B = \epsilon\vec{n} + \epsilon_2\vec{m}_{B\perp}, \qquad \vec{n}\cdot\vec{m}_{A\perp} = \vec{n}\cdot\vec{m}_{B\perp} = 0$$

$$\Longrightarrow \delta W = \vec{F}_{B\to A}\delta\vec{r}_A + \vec{F}_{A\to B}\delta\vec{r}_B = F\vec{n}\cdot(\delta\vec{r}_B - \delta\vec{r}_A) = F\vec{n}\cdot(\epsilon_2\vec{m}_{B\perp} - \epsilon_1\vec{m}_{A\perp}) = 0$$

例 无滑滚动（纯滚动）接触是理想约束

$$\delta\vec{r}_A = \delta\vec{r}_B, \qquad \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \Longrightarrow \delta W = 0$$

(4) 变分自由度

力学体系的独立虚位移数目（独立运动方程的个数、动力学自由度）。

位形自由度≥动力学自由度。

2. D’ALEMBERT-LAGRANGE 原理

(1) D’ALEMBERT 原理

在理想约束下，利用虚位移点乘牛顿方程，可消去约束力：

[1] 这个证明不依赖于牛顿第三定律，只需要满足刚性约束和伽利略相对性原理。

$$\sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

(2) 非理想约束

相对比较麻烦。

有摩擦力时，可以把摩擦力当成主动力处理，这样就还是理想约束体系。

分析力学及其各种推广只处理理想约束的情形。

在基本相互作用理论中无需考虑非理想约束。

(3) 广义坐标下的 D'ALEMBERT-LAGRANGE 原理

成为

$$\sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = 0$$

如果所取的广义坐标独立，并且没有非完整约束，则δq_α，$\alpha = 1,2,\cdots,s$线性无关，

$$\sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0.$$

(4) 不独立广义坐标下的 D'ALEMBERT-LAGRANGE 原理

如果所取的广义坐标不独立，或者有非完整约束存在，则δq_α，$\alpha = 1,2,\cdots,s$不独立，

$$\begin{cases}\sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = 0,\\ c_{j\alpha}\delta q_\alpha = 0, \qquad j = 1,2,\cdots,k.\end{cases}$$

上述方程可以利用约束条件消去不独立的变分，然后求解；或者利用拉氏乘子法，得（第一拉格朗日方程）

$$\sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \lambda_j c_{j\alpha}\delta q_\alpha = 0 \Leftrightarrow \sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha} + \lambda_j c_{j\alpha} = 0.$$

拉氏乘子的物理意义：

牛顿方程

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{0}$$

$$\sum_i \left(\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0$$

与 d’Alembert 方程

$$\sum_i \left(\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} + \lambda_j c_{j\alpha} = 0$$

相减得

$$\sum_i \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \lambda_j c_{j\alpha}$$

如果定义广义约束力为

$$R_\alpha \overset{\text{def}}{=} \sum_i \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

那么

$$R_\alpha = \lambda_j C_{j\alpha}$$

(5) 约束条件对变分的限制

①完整约束：$f(\vec{r}_i, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$

②线性非完整约束（Pfaff 约束）：$\vec{c}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i + c = 0 \Leftrightarrow \vec{c}_i \cdot d\vec{r}_i + c dt = 0$

其中位移$d\vec{r}_i$是和dt同阶的无穷小量，dt不能舍去。

如果从物理模型（如圆环或球的无滑滚动）出发进行分析，得到约束条件为

$$\vec{c}_i \cdot \Delta \vec{r}_i + c \Delta t = 0$$

对任意无穷小$\Delta \vec{r}_i$， Δt都成立。则对虚位移的约束为

$$\vec{c}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

一般的，对力学问题，线性非完整约束的 Hölder 规则成立，

$$c_\alpha \dot{q}_\alpha + c_0 = 0 \Rightarrow c_\alpha \delta q_\alpha = 0.$$

每一个完整约束减少一个位形自由度，非完整约束减少一个变分自由度。

③非线性非完整约束：

力学中没有实例。

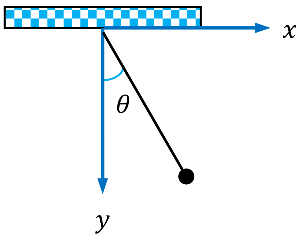
在伺服控制问题中，需分析具体模型。位形的约束条件与变分的约束条件之间，没有固定的关系。例如

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+b=0 \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}dx+\dot{y}^2dt+bdt=0 \\ \dot{x}dx+\dot{y}dy+bdt=0 \\ \quad\quad\quad\vdots \end{cases}$$

有无穷多种可能，需要由原始问题的模型确定哪一种是正确形式。

(6) 例题

例 单摆垂直平面中运动，用 d'Alembert 原理推导运动方程。



解　建立坐标系：以向下为y轴，水平为x轴。

设绳长为l，约束条件是

$$x^2+y^2-l^2=0,$$

可以取摆线与垂直方向的夹角θ为独立广义坐标，

$$x=l\sin\theta\,, y=l\cos\theta$$

$$\dot{x}=l\cos\theta\,\dot{\theta},\qquad a_x=\ddot{x}=l\cos\theta\,\ddot{\theta}-l\sin\theta\,\dot{\theta}^2$$

$$\dot{y}=-l\sin\theta\,\dot{\theta},\qquad a_y=\ddot{y}=-l\sin\theta\ \ddot{\theta}-l\cos\theta\,\dot{\theta}^2$$

根据 d'Alembert 原理

$$(mg\vec{e}_y-m\ddot{x}\vec{e}_x-m\ddot{y}\vec{e}_y)\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\vec{e}_x+\frac{\partial y}{\partial\theta}\vec{e}_y\right)\delta\theta=0,$$

$$-m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+(mg-m\ddot{y})\frac{\partial y}{\partial\theta}=0,$$

$$-ml^2(\cos\theta\,\ddot{\theta}-\sin\theta\,\dot{\theta}^2)\cos\theta-ml(g+l\sin\theta\ \ddot{\theta}+l\cos\theta\,\dot{\theta}^2)\sin\theta=0,$$

$$l\ddot{\theta}+g\sin\theta=0.$$

3. 虚功原理

(1) 虚功原理

对于静力学问题，$\ddot{\vec{r}}=\vec{0}$，由达朗贝尔原理得

$$\delta W=\sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

注：这是平衡的必要条件，但不是充分条件。

对非定常约束系统，“虚功之和为零”不是静止的充分条件。

例如，一个穿在光滑圆环上的珠子，圆环在xy平面内，且沿x方向匀加速运动，没有受到任何外力。此时主动力虚功为 0，但是珠子不是平衡的。

(2) 广义坐标下的平衡方程

$$\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_s),\delta\vec{r}_i=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha,$$

$$\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0\rightarrow\left(\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha=0$$

广义坐标独立，$\Rightarrow\delta q_\alpha$独立，**广义力**

$$Q_\alpha\stackrel{\text{def}}{=}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=0$$

对于保守力场，

$$Q_\alpha=-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}=0.$$

势能取极值。

(3) 不独立广义坐标下的平衡方程

为了求约束力，有时特意不消除某个约束。此时广义坐标不独立，设满足几何约束

$$f_j(q_1,q_2,\cdots,q_s)=0,\qquad j=0,1,\cdots,k.$$

$$\rightarrow\frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=0$$

虚功原理

$$Q_\alpha\delta q_\alpha=0$$

利用前面的式子消去不独立的变分，或者用拉氏乘子法。

$$\left(Q_\alpha+\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha=0\Rightarrow Q_\alpha+\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha}=0$$

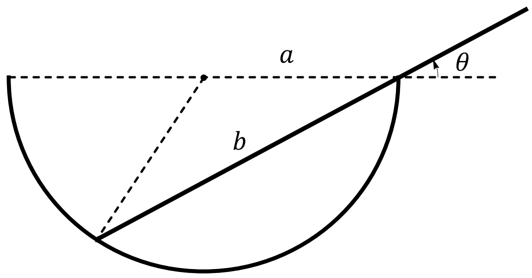
上式和约束条件一起，可以求解平衡时的广义坐标以及拉氏乘子。

有约束时的虚功原理成为

$$\delta\left(W-\lambda_j f_j\right)=0$$

(4) 例题

例 碗中的筷子：半径为a的光滑半球形碗固定在桌面上，一根长l的筷子放在碗中，一端搭在碗沿。若筷子保持平衡，求筷子位于碗内的部分的长度b。



解 取独立的广义坐标为b。筷子与水平面的夹角记为θ，

$$2a\cos\theta=b\Rightarrow\cos\theta=\frac{b}{2a}$$

质心的垂直方向坐标为$-\left(b-\frac{l}{2}\right)\sin\theta$，势能为

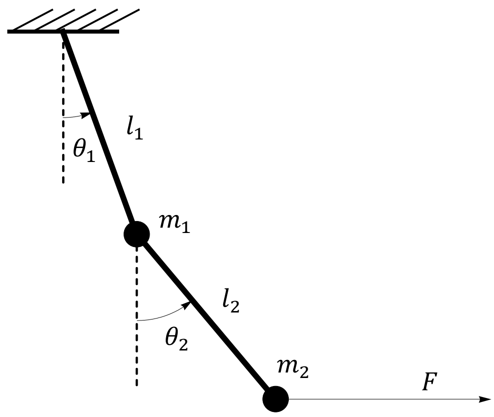
$$V=mg\left(\frac{l}{2}-b\right)\sin\theta=mg\left(\frac{l}{2}-b\right)\sqrt{1-\left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

由虚功原理，平衡时必有

$$0=\frac{\partial V}{\partial b}=mg\frac{-8a^2+b(4b-l)}{4a^2\sqrt{4-\frac{b^2}{a^2}}}$$

$$\Rightarrow l=\frac{-8a^2+4b^2}{b},\qquad b=\frac{1}{8}\left(l+\sqrt{l^2+128a^2}\right)\text{(舍去负解)}$$

例 双摆的平衡



解 取广义坐标为θ_1,θ_2。 引进水平作用力的势能

$$V_h=-Fx=-F(l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2)$$

主动力的势能之和为

$$V=-\frac{1}{2}m_1gl_1\cos\theta_1-\frac{1}{2}m_2gl_2\cos\theta_2 \\ -F(l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2)$$

由虚功原理，

$$\delta V=0\Longrightarrow\frac{\partial V}{\partial\theta_1}=0,\qquad\frac{\partial V}{\partial\theta_2}=0$$

4. JOURDAN 原理[2]*

广义速度与直角坐标系的速度关系

$$\vec{r}_i = \vec{r}(t,q) \Longrightarrow \dot{\vec{r}}_i(t,q,\dot{q}) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha$$

定义约当变分

$$\delta_J \vec{v}_i = \delta_J \dot{\vec{r}}_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta_J \dot{q}_\alpha$$

即在计算约当变分时，视广义坐标、广义加速度和时间为常数，

$$\delta_J t = 0, \qquad \delta_J q_\alpha = 0$$

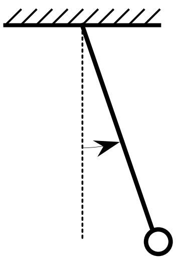
理想系统的达朗贝尔原理可以改写为约当原理，

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot \delta\vec{r}_i = 0 \Leftrightarrow \sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = 0\\
&\left\{\delta_J \dot{q}_\alpha \middle| \alpha = 1,2,\cdots,s\right\}\text{线性无关} \Longrightarrow \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \leftrightarrow \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta_J \dot{q}_\alpha\right)
\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta_J \dot{q}_\alpha = 0 \Leftrightarrow \sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot \delta_J\dot{\vec{r}}_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right)\cdot \delta_J\vec{v}_i = 0$$

例 平面单摆



解 设系统作平面运动。取绳子固定点为原点，水平向左为x轴，向下为y轴。

取摆线与垂直方向夹角θ为广义坐标，

$$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} l\dot{\theta}\cos\theta \\ -l\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\delta_J\vec{v} = \begin{pmatrix} l\dot{\theta}\cos\theta \\ -l\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}\delta_J\dot{\theta}$$

---

[2] P.E.B. Jourdain, Addition to papers on the equations of mechanics, Quart. J. Pure Appl. Math. , 39 (1908) pp. 241–250

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\begin{pmatrix} l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ -l\ddot{\theta}\sin\theta-l\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix}$$

重力为主动力

$$\vec{F}=mg\vec{e}_z$$

由 Jourdan 原理得运动方程，

$$\begin{aligned} &0=\left(\vec{F}-m\vec{a}\right)\cdot\delta_J\vec{v} \\ &=\left(-m\left(l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta\right),\quad mg-m\left(-l\ddot{\theta}\sin\theta-l\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\right)\begin{pmatrix} l\dot{\theta}\cos\theta \\ -l\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}\delta_J\dot{\theta} \end{aligned}$$

$$-\left(l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\cos\theta-\left(g+l\ddot{\theta}\sin\theta+l\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\sin\theta=0$$

$$l\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

5. GAUSS 原理

广义加速度与直角坐标系中的加速度关系为

$$\begin{aligned} &\vec{r}_i=\vec{r}_i(q,t)\Rightarrow\dot{\vec{r}}_i(t,q,\dot{q})=\frac{\partial\vec{r}_i(t,q)}{\partial t}+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \\ &\Rightarrow\ddot{\vec{r}}_i(t,q,\dot{q},\ddot{q})=\frac{\partial^2\vec{r}_i(t,q)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\vec{r}_i(t,q)}{\partial t\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\dot{q}_\alpha\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\ddot{q}_\alpha \end{aligned}$$

定义高斯变分

$$\delta_G\ddot{\vec{r}}_i\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta_G\ddot{q}_\alpha$$

即计算高斯变分时，视广义坐标、广义速度和时间为常数，

$$\delta_G t\overset{\text{def}}{=}0,\qquad\delta_G q_\alpha\overset{\text{def}}{=}0,\qquad\delta_G\dot{q}_\alpha\overset{\text{def}}{=}0$$

对理想系统，达朗贝尔原理改写为

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned}&\sum_i\left(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0\Leftrightarrow\sum_i\left(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=0 \\ &\{\delta_G\ddot{q}_\alpha|\alpha=1,2,\cdots,s\}\text{线性无关}\Longrightarrow\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\leftrightarrow\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta_G\ddot{q}_\alpha\right)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\sum_i\left(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta_G\ddot{q}_\alpha=0\Leftrightarrow\sum_i\left(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta_G\ddot{\vec{r}}_i=0 \\ &\Leftrightarrow\sum_i\left(\vec{F}_i-m_i\vec{a}_i\right)\cdot\delta_G\vec{a}_i=0 \end{aligned}$$

定义拘束度

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\sum_i \frac{\left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right)^2}{m_i}$$

设力$\vec{F}_i$与加速度无关，则有最小拘束度原理[3]（Gauss' principle of least compulsion）

$$\delta_G Z = \sum_i \left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right)\cdot\delta_G\vec{a}_i = 0$$

拘束度是加速度的正定二次型，在取真实物理运动

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i\vec{a}_{0i}(t) = \vec{0}, \qquad i = 1,2,\cdots,N$$

时，$Z_0 = Z(\vec{a}_{0i})$不仅是Z的驻值，而且确实是最小值。

与 d'Alembert 原理及 Jourdan 原理相比，Gauss 原理是函数极值的形式，便于计算机数值求解，所以在机器人力学等问题中广泛用于推导运动方程。

例 用 Gauss 原理求抛物运动方程。

解 以向下为y轴，水平为x轴，

$$Z = \frac{1}{2m}\left\{mg\vec{e}_y - m\ddot{x}\vec{e}_x - m\ddot{y}\vec{e}_y\right\}^2 = \frac{m}{2}\{\ddot{x}^2 + (g-\ddot{y})^2\},$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Z}{\partial\ddot{x}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{x} = 0,\\ \dfrac{\partial Z}{\partial\ddot{y}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \ddot{y} - g = 0.\end{cases}$$

例 用 Gauss 原理求平面单摆的运动方程。

解 同前面，以向下为y轴，水平为x轴；θ是与垂直方向的夹角，

[3] 1829 年, C.F. Gauss. Gibbs–Appell 方程

$$F_\alpha = \frac{\partial S}{\partial\ddot{q}_\alpha}, \qquad S \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\sum_i m_i\vec{a}_i^2$$

是高斯原理的变形。

$$x = l\sin\theta\,, \qquad \dot{x} = l\cos\theta\,\dot{\theta}, \qquad a_x = \ddot{x} = l\cos\theta\,\ddot{\theta} - l\sin\theta\,\dot{\theta}^2,$$

$$y = l\cos\theta\,, \qquad \dot{y} = -l\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad a_y = \ddot{y} = -l\sin\theta\ \ddot{\theta} - l\cos\theta\,\dot{\theta}^2.$$

拘束度为

$$Z = \frac{1}{2}\left\{ma_x^2 + m\left(g - a_y\right)^2\right\} = \frac{m}{2}\left\{l^2\ddot{\theta}^2 + l^2\dot{\theta}^4 + 2gl\sin\theta\,\ddot{\theta} + 2gl\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + g^2\right\}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial\ddot{\theta}} = 0 \Rightarrow l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

四、 LAGRANGE 方程

1. 理想完整体系的 LAGRANGE 方程

拉格朗日希望在力学问题中避免繁琐的矢量分析，利用动能和势能表达运动方程。对单个粒子这很容易做到，

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \Longrightarrow \vec{p} = \frac{\partial T}{\partial\vec{v}}$$

$$\vec{F} = -\nabla V$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow -\nabla V = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\vec{v}}$$

对质点组，由 d’Alembert 原理[4]，

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\displaystyle\sum_i\left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0\\ \displaystyle Q_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\end{array}\right\}\Longrightarrow\displaystyle\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha\\ \displaystyle m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left[m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right] - m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\ \text{（}i\text{不求和）}\\ \displaystyle\vec{r}_i = \vec{r}_i(t,q) \Longrightarrow \dot{\vec{r}}_i(t,q,\dot{q}) = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t} + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\\ \displaystyle\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\beta} = \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial t\partial q_\beta} + \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}\end{array}\right.\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

[4] J.L. Lagrange, Mécanique analytique of Lagrange Mécanique analytique, 1788.

$$
\left.\begin{array}{r}
\Rightarrow \sum_i \left\{\frac{d}{dt}\left[m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}\right] - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}\right\} = Q_\alpha \\
T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial q_\alpha} = m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dfrac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} \\ \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \displaystyle\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dfrac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \end{cases}
\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha
$$

拉格朗日方程不含约束力，也不再需要对力和加速度做矢量分析。

2. 主动力是保守力时的 LAGRANGE 方程

此时存在势函数V，

$$
\left.\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r}
V = V(t,q) \Rightarrow \begin{cases} Q_\alpha = -\dfrac{\partial V}{\partial q_\alpha} \\ \dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \end{cases} \\
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \dfrac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha
\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_\alpha} - \dfrac{\partial (T-V)}{\partial q_\alpha} = 0 \\
L \stackrel{\text{def}}{=} T - V
\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0
$$

这是 Lagrange 方程最常用的形式。

定义**广义动量**为

$$
p_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}
$$

拉格朗日方程可以写成

$$
\dot{p}_\alpha = Q_\alpha
$$

拉格朗日方程可取代牛顿力学中的牛顿第二定律，作为拉格朗日力学的第一原理。不同的拉格朗日函数$L(t,q,\dot{q})$描述不同的力学系统，由实验或相互作用理论模型给出。不过在实际应用中，我们会借助已熟知的牛顿力学模型写出拉氏量$L = T - V$。

3. 主动力同时有保守力和非保守力时的 LAGRANGE 方程

将保守力表示为$-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$，$L \stackrel{\text{def}}{=} T - V$，非保守力为$Q_\alpha$，得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha$$

4. 有多余坐标时的 LAGRANGE 方程

如果有非完整约束，或者需要求某些约束力而有意保留了部分约束，则广义坐标的变分不独立。

此时设位形的约束以及变分的约束分别为

$$f_\sigma(q,\dot{q},t)=0,\qquad c_{\sigma\alpha}(q,\dot{q},t)\delta q_\alpha=0,\qquad \sigma=1,2,\cdots,k.$$

当然，对几何约束$c_{\sigma\alpha}=\frac{\partial f_\sigma(q,t)}{\partial q_\alpha}$；

对线性非完整约束（来自滚动等），Hölder 规则一般是正确的，

$$f_\sigma(q,\dot{q},t)=c_{\sigma\alpha}(q,t)\dot{q}_\alpha+c_{\sigma 0}(q,t)=0\rightarrow c_{\sigma\alpha}(q,t)\delta q_\alpha=\frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha=0.$$

对非线性非完整约束（力学问题中不存在），f_σ与$c_{\sigma\alpha}$没有确定的关系，都需要从原来的物理模型中分析得到。

d'Alembert 原理给出

$$\left\{\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right]-Q_\alpha\right\}\delta q_\alpha=0$$

引入拉氏乘子得

$$\left\{\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right]-Q_\alpha\right\}\delta q_\alpha-\lambda_\sigma c_{\sigma\alpha}\delta q_\alpha=0$$

拉氏方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha+\lambda_\sigma c_{\sigma\alpha}$$

如果只有保守力

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\lambda_\sigma c_{\sigma\alpha}$$

同时有保守力和非保守力Q_α时

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha+\lambda_\sigma c_{\sigma\alpha}$$

5. LAGRANGE 方程的 NIELSEN 形式*

将拉氏方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha+\lambda_j c_{j\alpha}.$$

设法将第一项的$\frac{d}{dt}$和$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}$交换次序，

$$\frac{dL(q,\dot{q},t)}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\ddot{q}_\beta+\frac{\partial L}{\partial t}\sim(q,\dot{q},\ddot{q},t)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{dL(q,\dot{q},t)}{dt}=\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right]+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\ddot{q}_\beta+\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}+\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

于是有 Nielson 方程

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{dL(q,\dot{q},t)}{dt}-2\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha$$

6. 有冲击力时的 LAGRANGE 方程

设在$t=0$时有冲击力作用于体系，

$$\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha \\ Q_\alpha(t)=I_\alpha\delta(t)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right|_{0-}^{0+}-\int_{0-}^{0+}\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}dt=I_\alpha \\ \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\text{有界}\Rightarrow \int_{0-}^{0+}\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}dt=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_\alpha(0+)-p_\alpha(0-)=\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right|_{0-}^{0+}=I_\alpha$$

其中动能为

$$T(t,q,\dot{q})=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left[\dot{\vec{r}}_i(t,q,\dot{q})\right]^2$$

只要我们选取广义坐标时要求

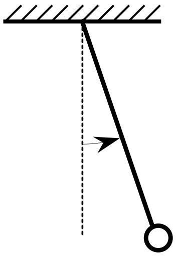
$$\vec{r}_i=\vec{r}_i(t,q)$$

对各变量二阶连续，$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$的有界性必能满足。

7. 例题

(1) 完整系统

例 1 平面单摆



解 设系统作平面运动。

①运动学（建立坐标系，分析约束条件，选取广义坐标）

取绳子固定点为原点，水平向左为x轴，向下为y轴。以摆线与垂直方向夹角θ为广义坐标，

$$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\dot{\theta}\cos\theta \\ -l\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

②写出拉格朗日函数

$$L\left(t,\theta,\dot{\theta}\right) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

③写出拉氏方程

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

④求解

运动方程写成

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0, \qquad \omega_0^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g}{l}$$

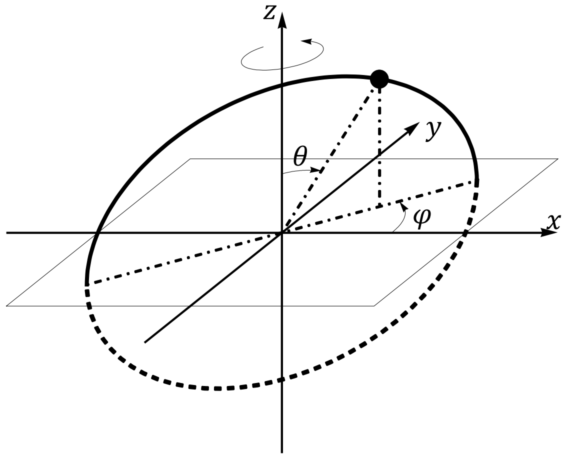
可得

$$t = -\frac{1}{\omega_0}F\left(\arcsin\left(\sin\frac{\theta}{2}/\sin\frac{\alpha}{2}\right)\middle|\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{\omega_0}F\left(\frac{\pi}{2}\middle|\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

其中第一类椭圆积分定义是

$$F(\phi|m) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\phi}\frac{du}{\sqrt{1 - m\sin^2 u}}, \qquad \phi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

α是振幅。



例 2 一个半径为R的圆环在垂直平面中，以角速度ω绕通过圆心的垂直轴转动。环上穿着一个珠子，珠子可以光滑的沿圆环滑动。求珠子的运动方程。

解①建立坐标，分析约束。

以珠子的转角θ为广义坐标。圆环的角度为$\varphi=\omega t+\varphi_0$。珠子的直角坐标为

$$x=R\sin\theta\cos(\omega t+\varphi_0),$$
$$y=R\sin\theta\sin(\omega t+\varphi_0),$$
$$z=R\cos\theta$$

②拉氏量

$$L=\frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2\theta\right)-mgR\cos\theta=\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2-\left[mgR\cos\theta-\frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta\right]$$

③运动方程

$$R\ddot{\theta}-g\sin\theta+\omega^2R\sin\theta\cos\theta=0$$

④求解。

由于方程不显含时间，可作变量替换

$$\ddot{\theta}=\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d\left(\dot{\theta}^2\right)}{d\theta},$$

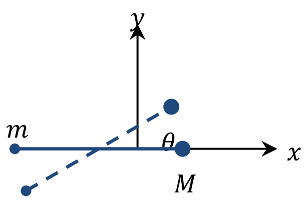
$$\dot{\theta}^2=2\int\left[\frac{g}{R}\sin\theta-\omega^2\sin\theta\cos\theta\right]d\theta=\omega^2\cos^2\theta-\frac{2g}{R}\cos\theta+c\Rightarrow\cdots$$

```
DSolve[R*θ''[t]-g*Sin[θ[t]]+ω^2 R Sin[θ[t]]Cos[θ[t]]==0,θ,t][[1]]//FullSimplify
```

$$\frac{\left(R(\omega^2-c_1)+2\sqrt{g^2-R^2\omega^2c_1}\right)(t+c_2)^2-4R\,\mathrm{F}\left(i\sinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{2g+R(\omega^2+c_1)}{R(c_1-\omega^2)+2\sqrt{g^2-R^2\omega^2c_1}}}\tan\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)\right)\,\middle|\,\frac{R\omega^2-Rc_1-2\sqrt{g^2-R^2\omega^2c_1}}{R\omega^2-Rc_1+2\sqrt{g^2-R^2\omega^2c_1}}\right)^2}{R(\omega^2-c_1)+2\sqrt{g^2-R^2\omega^2c_1}}$$
$$=0$$

(2) 冲击力

例 3 设两个质点质量不等，分别为m,M，固定在长度为a的无质量轻杆两端。初始时杆静止，在距离M质点距离b的D处，突然施加垂直于杆身的冲量K。求冲击结束时杆的运动状态。



解 如图，杆的运动可以用x_c,y_c,θ三个参数描述。

$$\begin{cases} \vec{r}_c = \dfrac{m\vec{r}_m + M\vec{r}_M}{M+m} \\ |\vec{r}_M - \vec{r}_m| = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = x_c + \dfrac{ma}{M+m}\cos\theta\,, \\ y_M = y_c + \dfrac{ma}{M+m}\sin\theta\,; \end{cases} \begin{cases} x_m = x_c - \dfrac{Ma}{M+m}\cos\theta\,, \\ y_m = y_c - \dfrac{Ma}{M+m}\sin\theta\,; \end{cases} \begin{cases} x_D = x_c + \left(\dfrac{ma}{M+m} - b\right)\cos\theta\,, \\ y_D = y_c + \left(\dfrac{ma}{M+m} - b\right)\sin\theta\,. \end{cases}$$

广义冲量

$$I_{x_c} = K\vec{e}_{\dot{y}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_D}{\partial x_c} = 0, \qquad I_{y_c} = K\vec{e}_{\dot{y}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_D}{\partial y_c} = K, \qquad I_\theta = K\vec{e}_{\dot{y}} \cdot \left.\frac{\partial \vec{r}_D}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = K(\frac{ma}{M+m} - b)$$

动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_m^2 + \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_M^2 = \frac{1}{2}(M+m)(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}a^2\dot{\theta}^2$$

冲击力的拉氏方程

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c}\right|_{0-}^{0+} = I_{x_c}, \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_c}\right|_{0-}^{0+} = I_{y_c}, \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_c}\right|_{0-}^{0+} = I_{\theta_c}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_c(0+) = 0, \qquad \dot{y}_c(0+) = \frac{K}{M+m}, \qquad \dot{\theta}(0+) = \frac{K[m(a-b) - Mb]}{Mma^2}.$$

(3) 求约束力

例 4 光滑半球倒扣在水平面上，一质点从球面顶端开始滑下，求质点脱离球面的位置。

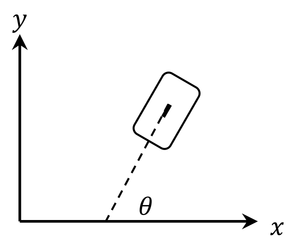
解 两种解法，一种是看成具有多余约束的问题，利用拉氏乘子；另一种解法先不管约束力，求解拉氏方程后，代入牛顿方程求出约束力。

(4) 非完整系统

例 5 冰橇在斜坡上的运动，质心与冰刀重合。

解 ①建立坐标，分析约束。取质心坐标x, y和冰刀与x轴的夹角θ为广义坐标。冰刀只能沿其指向运动，$(\Delta x, \Delta y) \propto (\cos\theta, \sin\theta)$，因而约束条件为

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0, \qquad \sin\theta\,\delta x - \cos\theta\,\delta y = 0.$$



这是不可积约束。

②写出拉氏量

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\vec{v}^2 + \frac{1}{2}I\vec{\omega}^2 - V = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mgy\sin\alpha$$

③写出运动方程

$$\begin{cases} M\ddot{x} = \lambda\sin\theta \\ M\ddot{y} + Mg\sin\alpha = -\lambda\cos\theta \\ I\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0$$

④求解。第三个式子解出

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0$$

前两个方程消去λ得

$$\ddot{x} = -(\ddot{y} + g\sin\alpha)\tan\theta$$

当$\omega_0 \neq 0$时，以θ为参量，

$$x = x(\theta), \dot{x} = \omega_0\frac{dx}{d\theta}, \ddot{x} = \omega_0^2\frac{d^2x}{d\theta^2}; \dot{y} = \omega_0\frac{dy}{d\theta}, \ddot{y} = \omega_0^2\frac{d^2y}{d\theta^2}$$

$$\ddot{x} = -(\ddot{y} + g\sin\alpha)\tan\theta \to \omega_0^2\frac{d^2x}{d\theta^2} = -\left(\omega_0^2\frac{d^2y}{d\theta^2} + g\sin\alpha\right)\tan\theta$$

约束条件给出

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0 \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{dy}{d\theta}\cot\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{d\theta^2} = -\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{dy}{d\theta} + \cot\theta\frac{d^2y}{d\theta^2}$$

代入运动方程得

$$y'' - \cot\theta\, y' + \frac{g\sin\alpha}{\omega_0^2}\sin^2\theta = 0$$

$$\to y = -\frac{v_0}{\omega_0}\cos\theta - \frac{g\sin\alpha}{2\omega_0^2}\cos^2\theta + \left(y_0 + \frac{v_0}{\omega_0} + \frac{g\sin\alpha}{2\omega_0^2}\right)$$

$$\to x = \int\cot\theta\, dy = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\theta + \frac{g\sin\alpha}{2\omega_0^2}(\sin\theta\cos\theta + \theta) + x_0$$

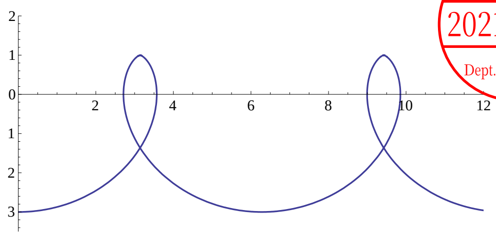


图 2 $a = 2, b = 1$

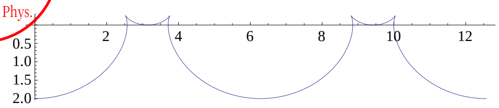


图 1 $a = 1, b = 1$

注：插图用 Mathematica 绘制，

```
ParametricPlot[{a Sin[θ]+b (Sin[θ] Cos[θ]+θ)+y₀, -a Cos[θ]-b Cos[θ]^2+x₀}/.{a->2,b->1,x₀->0,y₀->0},{θ,0,4 Pi}]
```

当$\omega_0=0$时，

$$\theta=\theta_0$$

$$\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\tan\theta_0\Rightarrow y-y_0=(x-x_0)\tan\theta_0$$

$$\ddot{x}=-(\ddot{y}+g\sin\alpha)\tan\theta_0\Rightarrow\ddot{x}+\ddot{x}\tan^2\theta_0=-g\sin\alpha\tan\theta_0\Rightarrow\ddot{x}=-\frac{g}{2}\sin\alpha\sin2\theta_0$$

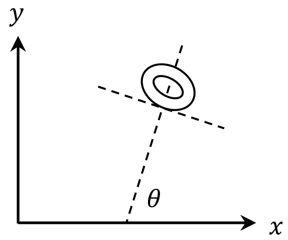
$$\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{gt^2}{4}\sin\alpha\sin2\theta_0+v_0t\cos\theta_0+x_0\\ y=-\dfrac{gt^2}{4}\sin\alpha\,(1-\cos2\theta_0)+v_0t\sin\theta_0+y_0\end{cases}$$

$$y=(x-x_0)\tan\theta_0+y_0$$

例 6 直立轮子在水平面上的无滑滚动，不受外力作用时，求轨迹。

在双轮的例子中，在车轴正中间加上用轴承连接的第三个轮子，设两边的轮子以及车轴质量很小可忽略不计，系统就成为直立滚轮。这是一个古老的例题，只讨论直立的情形是为了简化问题。

解 ①建立坐标系，分析约束。取广义坐标为轮心的位置(x,y)，轮轴与x轴的夹角θ，以及轮子绕轮轴转过的角度φ。



轮子前进的方向与x轴的夹角为$\theta-\frac{\pi}{2}$，无滑滚动给出约束

$$\Delta x=R\Delta\varphi\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\Delta y=R\Delta\varphi\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

此约束不可积。由此得微分约束方程

$$\begin{cases}\dot{x}=R\sin\theta\,\dot{\varphi},\\ \dot{y}=-R\cos\theta\,\dot{\varphi};\end{cases}$$

和变分约束方程

$$\begin{cases}\delta x=R\sin\theta\,\delta\varphi,\\ \delta y=-R\cos\theta\,\delta\varphi.\end{cases}$$

②写出系统的拉氏量

$$L=T=\frac{1}{2}M(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2$$

③写出运动方程。利用 d’Alembert-Lagrange 原理

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}+Q_\alpha\right)\delta q_\alpha=0$$

由变分的约束条件消去不独立变分$\delta x,\delta y$，得（非完整系统的沃尔尼兹 Voronec 方程）

$$\begin{cases}\begin{cases}M(\ddot{x}R\sin\theta-\ddot{y}R\cos\theta)+I_1\ddot{\varphi} & = & 0\\ I_2\ddot{\theta} & = & 0\end{cases}\\ \begin{cases}\dot{x} & = & R\sin\theta\,\dot{\varphi}\\ \dot{y} & = & -R\cos\theta\,\dot{\varphi}\end{cases}\end{cases}$$

④求解方程。

由第二个运动方程得

$$\theta=\omega_0 t+\theta_0$$

对两个约束方程求导，

$$\begin{cases}\ddot{x}=R\sin\theta\,\ddot{\varphi}+\omega_0 R\cos\theta\,\dot{\varphi}\\ \ddot{y}=-R\cos\theta\,\ddot{\varphi}+\omega_0 R\sin\theta\,\dot{\varphi}\end{cases}$$

代入第一个运动方程，

$$(MR^2+I_1)\ddot{\varphi}=0$$

$$\varphi=\omega_1 t+\varphi_0$$

最后对两个约束方程积分，得

$$x=\int dx=\int R\sin\theta\,d\varphi=R\int\sin(\omega_0 t+\theta_0)\,\omega_1 dt=-\frac{\omega_1}{\omega_0}R\cos(\omega_0 t+\theta_0)+c_1$$

$$y=\int dy=-\int R\cos\theta\,d\varphi=-\int R\cos(\omega_0 t+\theta_0)\,\omega_1 dt=-\frac{\omega_1}{\omega_0}R\sin(\omega_0 t+\theta_0)+c_2$$

不受外力时，系统作圆周运动。

五、 拉格朗日函数的一般性质

1. 可加性

两个独立系统，例如两个谐振子

$$L_1(x,\dot{x})=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2-\frac{1}{2}k_1x^2,\qquad L_2(y,\dot{y})=\frac{1}{2}m_2\dot{y}^2-\frac{1}{2}k_2y^2$$

我们可以把拉氏量加在一起，

$$\begin{aligned}L(x,y,\dot{x},\dot{y})&\stackrel{\text{def}}{=}L_1(x,\dot{x})+L_2(y,\dot{y})\\&=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2-\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}^2-\frac{1}{2}k_2y^2\end{aligned}$$

新拉格朗日函数$L(x,y,\dot{x},\dot{y})$给出两个拉氏方程，与原来的两个拉格朗日函数$L_1(x,\dot{x}),L_2(y,\dot{y})$等效。

2. 不确定性

定理[5] $L'(t,q,\dot{q})\stackrel{\text{def}}{=}\alpha L(t,q,\dot{q})+\frac{df(t,q)}{dt}$和$L(t,q,\dot{q})$给出相同的拉氏方程。

证明见附录。

上述定理是充分条件，但不是等价条件。还有可能是更复杂的变形。

若不考虑拉氏函数的缩放，则$\alpha=1$。

这一不确定性在最小作用量原理中比较容易看出。

全微商$df(t,q)/dt$称为规范项。

例 质点在一维保守力场中的运动，

$$L'=\frac{m^2\dot{x}^4}{12}+m\dot{x}^2V(x)-V^2(x)$$

对应的拉氏方程为

$$(m\dot{x}^2+2V)m\ddot{x}+2m\dot{x}^2V'=m\dot{x}^2V'-2VV'\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V\right)(m\ddot{x}+V')=0\Leftrightarrow m\ddot{x}+V'=0,$$

等价于$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V$。

3. 反变分问题

定理（Helmholtz 条件 Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz 1887 年） 二阶微分方程组

[5] M. Henneaux, Annales of Physics (NY) 140 (1982), 45.

$$\ddot{q}_\alpha = f_\alpha(t,q,\dot{q})$$

存在等价的拉格朗日方程（拉氏函数$L(t,q,\dot{q})$）

$$M_{\alpha\beta}(t,q,\dot{q})\ddot{q}_\beta = F_\alpha(t,q,\dot{q})$$

$$F_\alpha(t,q,\dot{q}) \equiv M_{\alpha\beta}(t,q,\dot{q})f_\beta(t,q,\dot{q})$$

的充要条件是，存在满足方程组

$$\begin{cases} M^T = M \\ \dfrac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \dot{q}_\gamma} = \dfrac{\partial M_{\gamma\alpha}}{\partial \dot{q}_\beta} \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_\alpha \dfrac{\partial}{\partial q_\alpha} + f_\alpha \dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) M = -\dfrac{1}{2}(M\Phi - \Phi^T M) \\ M\Psi - \Psi^T M = \dfrac{1}{2}(M\Phi - \Phi^T M) \end{cases}$$

$$\Phi_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_\beta}, \qquad \Psi_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_\beta}$$

的惯性矩阵$M_{\alpha\beta}(t,q,\dot{q})$。（J. Douglas 1941）

可见，

不是每一组微分方程描述的系统，都是拉格朗日系统。

定理 Darboux[6]

每个二次常微分方程

$$\ddot{q} = f(t,q,\dot{q})$$

都存在一个乘子$M(t,q,\dot{q})$，使之成为 Lagrange 方程。

六、 拉氏方程的首次积分

保守系统最容易找到的 3 种首次积分:

[6] G. Darboux, Lecon sur la Theorie Generale des Surfaces, Gauthier-Villars, Paris, 1894.

1.　拉氏量不含某个坐标：广义动量守恒[7]

循环坐标（可遗坐标）：拉氏量中不出现广义坐标。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \Rightarrow p_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \text{constant.}$$

例1　重力场中的运动，

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \Rightarrow p_x = m\dot{x} = \text{constant}, p_y = m\dot{y} = \text{constant.}$$

例2　质点在中心力场中的平面运动，

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \text{constant}$$

即角动量守恒。

2.　拉氏量不含时间：广义能量守恒

(1)　广义能量积分

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{dL}{dt} \equiv \dfrac{\partial L}{\partial t} + \dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha \\ \dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} \Leftrightarrow \dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{d}{dt}\left(L - \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right) \\ H \stackrel{\text{def}}{=} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

上式为 Beltrami identity. 当

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

时，广义能量H为守恒量[8]。

　　一般情况下$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, q)$，动能

---

[7] C. G. J. Jacobi, Vorlesungen Über Dynamik, Werke, Supplementband. Reimer, Berlin, 1884.

[8] J. R. Schütz, Gött. Nachr. (1897), p.110.

$$T=\sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2=T_2+T_1+T_0$$

$$T_2\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta,\qquad T_1\overset{\text{def}}{=}\left(\sum_i m_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)\dot{q}_\alpha,\qquad T_0\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2.$$

(2) 在不稳定约束系统中称为 Jacobi 积分

利用齐次函数的 Euler 定理，设$V=V(t,q)$，

$$H=p_\alpha\dot{q}_\alpha-L=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L=2T_2+T_1-L=T_2-T_0+V$$

(3) 在稳定约束系统中称为 Hamilton 积分

$T_1=T_0=0,H=T+V$，即机械能守恒。

(4) 有多余坐标时的广义能量积分

设有多余的广义坐标，满足完整约束

$$f_\sigma(t,q)=0,\sigma=1,2,\cdots,k$$

真实运动满足

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\lambda_\sigma(t)\dfrac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha}\\ f_\sigma(t,q)=0\end{cases}$$

现在设$\frac{\partial L}{\partial t}=0$，

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt}&=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\lambda_\sigma\frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\\&=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)-\lambda_\sigma\frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\text{（真实运动满足 Lagrange 方程）}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{dH}{dt}=\lambda_\sigma\frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha=\lambda_\sigma\left(\frac{df_\sigma}{dt}-\frac{\partial f_\sigma}{\partial t}\right)$$

又由于真实运动满足约束条件，

$$f_\sigma=0,\qquad df_\sigma=0,\qquad \frac{df_\sigma}{dt}=0$$

但是

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial t}\neq 0$$

原因是表达式

$$df_\sigma = \frac{\partial f_\sigma}{\partial t}dt + \frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha}dq_\alpha$$

中dt，dq_α不独立，

$$dq_\alpha = \dot{q}_\alpha dt$$

比如考虑穿在光滑钢丝上的珠子，可以使其满足$f_1(x,y,z,t) = z = 0$，$f_2(x,y,z,t) = y - v_0 t = 0$，显然$\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0$不成立。

现在

$$\frac{d}{dt}H = -\lambda_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial t}$$

仅当是定常约束时$f_\sigma(q) = 0$，才能得到$H = \text{constant}$，非稳定约束下得不到首次积分。

(5) 非完整约束系统的广义能量积分

真实运动满足 Lagrange 方程以及约束条件

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_\sigma(t)c_{\sigma\alpha}(t,q,\dot{q}) \\ f_\sigma(t,q,\dot{q}) = 0 \end{cases}$$

设$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$，

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \lambda_\sigma c_{\sigma\alpha}\right)\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right) - \lambda_\sigma c_{\sigma\alpha}\dot{q}_\alpha \text{（真实运动满足 Lagrange 方程）}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \lambda_\sigma(t)c_{\sigma\alpha}(t,q,\dot{q})\dot{q}_\alpha$$

对于非线性非完整约束系统，$c_{\sigma\alpha}$与f_σ没有特定关系，因而得不到守恒量。

在线性非完整约束下，真实运动需满足

$$f_\sigma(t,q,\dot{q}) = c_{\sigma\alpha}(t,q)\dot{q}_\alpha + c_{\sigma 0}(t,q) = 0$$

$$\frac{dH}{dt} = \lambda_\sigma\big(f_\sigma(t,q,\dot{q}) - c_{\sigma 0}(t,q)\big) = -\lambda_\sigma c_{\sigma 0}(t,q)$$

仅当约束是齐次的，即$c_{\sigma 0}(t,q)$＝0时，$H = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$是守恒量。

3. 拉氏量不含某个速度：隐含的约束条件

该广义坐标可以用其它的坐标和速度来表示，仅是是辅助变量。

例如

$$\frac{\partial L(t, q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)}{\partial q_1} = 0$$

可解出

$$q_1 = q_1(t, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}, \cdots, \dot{q}_n)$$

更一般地，Hess 矩阵的行列式

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\right) \neq 0$$

称为正规系统，L称为正规拉氏量。若

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\right) = 0$$

则称为奇异系统，L称为奇异拉氏量。

奇异系统的方程会给出（隐含的）拉格朗日约束。

七、 位力定理

在牛顿方程

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$$

的两边同乘以dt，可得动量定理；同点乘$d\vec{r}_i$，可得动能定理；同叉乘$\vec{r}_i$，可得角动量定理。若同点乘$\vec{r}_i$，

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_i \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i\right) - \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i$$

对方程两边同取长时间平均，

$$\langle A \rangle \overset{\text{def}}{=} \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau A dt$$

得

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left(\sum_i \vec{p}_i\cdot\vec{r}_i\right)\Bigg|_0^\tau - 2\langle T\rangle = \left\langle\sum_i \vec{r}_i\cdot\vec{F}_i\right\rangle$$

当$\sum_i \vec{p}_i\cdot\vec{r}_i$有界时，则上式第一项为零。例如粒子若只能在有限范围内运动，则动量和坐标均有界。此时

$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle\sum_i \vec{r}_i\cdot\vec{F}_i\right\rangle$$

此为位力定理（Virial theorem）。

在拉格朗日力学框架下，对定常约束（指$\partial\vec{r}_i/\partial t=0$）非相对论系统，利用拉氏方程，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha \Rightarrow q_\alpha\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-q_\alpha\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=q_\alpha Q_\alpha \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}\Rightarrow \lim\limits_{\tau\to+\infty}\dfrac{1}{\tau}\left(q_\alpha\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\Bigg|_0^\tau\right)-\left\langle\dot{q}_\alpha\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right\rangle-\left\langle q_\alpha\dfrac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right\rangle=\langle q_\alpha Q_\alpha\rangle \\ q_\alpha\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\Bigg|_0^\tau \text{有界} \Rightarrow \text{第一项为零} \\ \dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}=0\Rightarrow T=T_2\Rightarrow \dot{q}_\alpha\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}=2T\end{array}\right\}\Rightarrow\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\left\langle q_\alpha\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right\rangle-\frac{1}{2}\langle q_\alpha Q_\alpha\rangle$$

若主动力为保守力，

$$\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\left\langle q_\alpha\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle q_\alpha\frac{-\partial V}{\partial q_\alpha}\right\rangle=-\frac{1}{2}\left\langle q_\alpha\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right\rangle$$

对一般的拉格朗日系统（未必是牛顿力学系统$L=T-V$）可得

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \\ q_\alpha\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\text{有界}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\langle\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right\rangle=-\left\langle q_\alpha\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\right\rangle$$

在量子力学中，位力定理同样成立。

例 若质点的势能是坐标的齐次函数，

$$V(\lambda\vec{r})=\lambda^n V(\vec{r})$$

那么由齐次函数的欧拉定理，

$$\vec{r}\cdot\nabla V = nV$$

以及位力定理，可得

$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \vec{r}\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\right\rangle = \frac{n}{2}\langle V\rangle$$

对谐振子势，$n=2$，$\langle T\rangle = \langle V\rangle$。

对万有引力或库仑力，$n=-1$，

$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle V\rangle$$

例 一个星云由大量质点组成，

$$V = -\sum_{i\neq j}\frac{Gm^2}{r_{ij}} \Longrightarrow \langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle V\rangle$$

故仅当$2\langle T\rangle + \langle V\rangle$为零（在时长τ的尺度上）时处于稳定状态；大于零时会发生膨胀；小于零时会收缩。

在应用位力定理之前，需先确认在整个运动过程中，广义坐标有界。

例 对质点在引力场中得运动，取平面极坐标系，

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{\alpha}{r}$$

如果套用位力定理，

$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle r\frac{\partial L}{\partial r} + \theta\frac{\partial L}{\partial \theta}\right\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{r}\right\rangle = -\frac{1}{2}\langle V\rangle - \frac{1}{2}\left\langle mr^2\dot{\theta}^2\right\rangle$$

并不正确，多了一项。原因是广义坐标θ无界，位力定理不适用。

例 理想气体方程

设容器壁受到的压强为P，则动能的平均值为

$$\left.\begin{array}{c}\langle K\rangle=-\dfrac{1}{2}\left\langle\sum_i\vec{r}_i\cdot\vec{F}_i\right\rangle=-\dfrac{1}{2}\oiint_{\partial V}\vec{r}\cdot(-P\vec{n})dS=\dfrac{1}{2}\iiint_V\nabla\cdot(P\vec{r})dV=\dfrac{3}{2}PV\\ \langle K\rangle=N\dfrac{3}{2}k_BT\end{array}\right\}\Longrightarrow PV=Nk_BT$$

例 设星云中含有N个相同质量的星体，平均速度为$\langle v^2\rangle$，则系统的总动能为

$$\langle T\rangle=\frac{1}{2}Nm\langle v^2\rangle$$

系统的引力势能为

$$V=-\sum_{i\neq j}\frac{Gm^2}{r_{ij}}\Longrightarrow\langle V\rangle=-\frac{Gm^2N^2}{2}\langle r^{-1}\rangle$$

其中$\langle r^{-1}\rangle$是星体之间的平均倒数距离。

万有引力系统，势能是坐标的(-1)次函数，

$$V(\lambda\vec{r}_1,\lambda\vec{r}_2,\cdots,\lambda\vec{r}_N)=\lambda^{-1}V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_N)$$

代入位力定理，

$$\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\left\langle\vec{r}_i\cdot\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_i}\right\rangle=-\frac{1}{2}\langle V\rangle$$

即

$$\frac{1}{2}Nm\langle v^2\rangle=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{Gm^2N}{2}\langle r^{-1}\rangle\right)=\frac{1}{4}Gm^2N^2\langle r^{-1}\rangle$$

这给出星云的总质量的一个估算，

$$M=Nm=\frac{2\langle v^2\rangle}{G\langle r^{-1}\rangle}$$

所以只要测得速度平方均值$\langle v^2\rangle$、星体间距离倒数均值$\langle r^{-1}\rangle$，就可以估算星系的位力质量。实际计算时需要考虑星云中的质量分布修正。

瑞士天文学家 Zwicky 在 1933 年利用位力定理估算了 Coma 星系团（球状、稳定分布）的总质量，发现星系团中绝大部分物质不发光，揭开了暗物质的存在[9]。

[9] Zwicky F., Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln [J]. Helvetica Physica Acta, 1933(6)：110-127.

八、 耗散系统

1. 耗散力

非保守力的功率≤ 0时，称为耗散力。

2. RAYLEIGH 耗散函数

一般的摩擦在 Lagrange 力学中必须作为主动力处理。

如果摩擦力正比于速度（粘滞阻尼力、尾流阻尼力，阻尼器），

$$F^R=-\mu\dot{x}\xrightarrow{\text{多维}}\left(F_j^R\right)=-\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & 0\\ 0 & \mu_2 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{各向异性}}F_\alpha^R=-\mu_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta$$

则可以用一个二次函数描述，称为瑞利耗散函数，

$$R=\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$$

其中$\mu_{\alpha\beta}$对称、正定。摩擦力为

$$F_\alpha^R\stackrel{\text{def}}{=}-\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_\alpha}=-\mu_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta$$

摩擦力做的元功为负，

$$dW^R=F_\alpha^R dq_\alpha=-\mu_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta dq_\alpha=-\mu_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta\dot{q}_\alpha dt=-2Rdt\Rightarrow\frac{dW^R}{dt}=-2R$$

3. 有 RAYLEIGH 耗散时的 LAGRANGE 方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha-\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_\alpha}$$

其中Q_α不包括好山里的非保守力。除了耗散力F_α^R，没有其它非保守力时，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_\alpha}$$

4. 功能原理

拉氏量不显含时间，则

$$\frac{dL}{dt}=\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}+\ddot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}=\dot{q}_\alpha\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}+\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)+\ddot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}=\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)+\dot{q}_\alpha\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_\alpha}=\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)+2R$$

因此

$$\frac{dH}{dt} = -2R = \frac{dW^R}{dt}, \qquad H \stackrel{\text{def}}{=} \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L$$

5. 推广至$\boldsymbol{n}$次型

$$R = \frac{1}{n!}\mu_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}\dot{q}_{\alpha_1}\dot{q}_{\alpha_2}\cdots\dot{q}_{\alpha_n}$$

$$F_\alpha^R \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} = -\frac{1}{(n-1)!}\mu_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_n}\dot{q}_{\alpha_2}\cdots\dot{q}_{\alpha_n}$$

$$\frac{dW^R}{dt} = -nR$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

$$\frac{dH}{dt} = -nR = \frac{dW^R}{dt}$$

6. CK 拉氏量

一维阻尼振子可以用 Bateman-Caldirola-Kanai 拉氏量描述，

$$L = e^{\frac{\mu}{m}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right)$$

可得运动方程

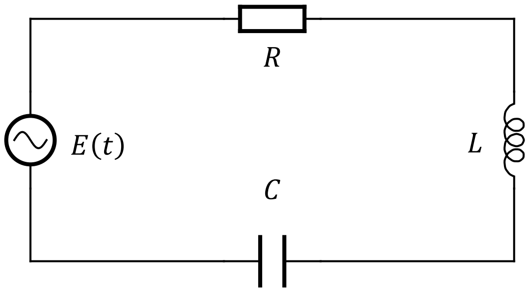
$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$$

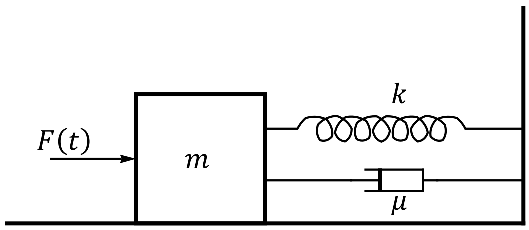
但这个拉氏函数难以推广到多自由、各向异性的情形。

可用分数阶导数表示阻尼

九、 应用：RLC 电路

1. RLC 电路与力学系统的对比





由欧姆定律，

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{e}{C}=E(t),\qquad i=\dot{e}$$

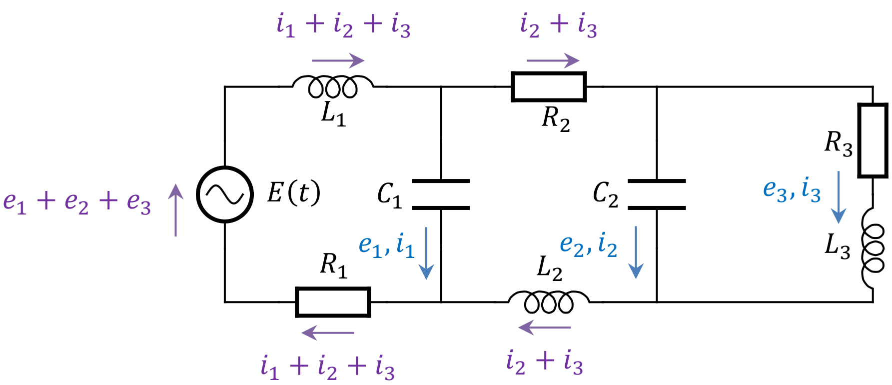
$$m\ddot{q}+\mu\dot{q}+kq=F(t)$$

力学	电路理论
广义坐标q_α	电荷e_α
广义速度$\dot{q}_\alpha$	电流$i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{de_\alpha}{dt}$
动能$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\vec{r}}^2$	$\frac{1}{2}\sum_\alpha Li_\alpha^2+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq\beta}M_{\alpha\beta}i_\alpha i_\beta$
势能V	$\frac{1}{2}\sum_\alpha\frac{1}{C_\alpha}e_\alpha^2$
广义力Q_α	电动势E_α
耗散函数R	$G=\frac{1}{2}\sum_\alpha R_\alpha i_\alpha^2$

表格 1 力学和电路的对应关系

2. 例子

考虑滤波电路：



解：

①取定广义坐标，如图所示。

②用基尔霍夫电流定律确定每个元件的电流或电荷。

③拉格朗日函数

电源为广义力，势能为

$$-E(t)(e_1+e_2+e_3)$$

所以

$$L=\left\{\frac{1}{2}L_1(i_1+i_2+i_3)^2+\frac{1}{2}L_2(i_2+i_3)^2+\frac{1}{2}L_3i_3^2\right\}-\left\{\frac{1}{2C_1}e_1^2+\frac{1}{2C_2}e_2^2-E(t)(e_1+e_2+e_3)\right\}$$

瑞利耗散函数

$$G=\frac{1}{2}R_1(i_1+i_2+i_3)^2+\frac{1}{2}R_2(i_2+i_3)^2+\frac{1}{2}R_3i_3^2$$

④写方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial i_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial e_\alpha}+\frac{\partial G}{\partial i_\alpha}=0,\qquad \alpha=1,2,3.$$

$$\begin{cases}L_1(\ddot{e}_1+\ddot{e}_2+\ddot{e}_3)+R_1(\dot{e}_1+\dot{e}_2+\dot{e}_3)+\dfrac{1}{C_1}e_1 & = & E(t)\\ L_1(\ddot{e}_1+\ddot{e}_2+\ddot{e}_3)+L_2(\ddot{e}_2+\ddot{e}_3)+R_1(\dot{e}_1+\dot{e}_2+\dot{e}_3)+R_2(\dot{e}_2+\dot{e}_3)+\dfrac{1}{C_2}e_2 & = & E(t)\\ L_1(\ddot{e}_1+\ddot{e}_2+\ddot{e}_3)+L_2(\ddot{e}_2+\ddot{e}_3)+L_3\ddot{e}_3+R_1(\dot{e}_1+\dot{e}_2+\dot{e}_3)+R_2(\dot{e}_2+\dot{e}_3)+R_3\dot{e}_3 & = & E(t)\end{cases}$$

思考：怎样表示电路中的二极管、三极管？

附录 拉氏函数不确定性的证明

$$L=L(t,q.\dot{q}),\qquad L'=L'(t,q,\dot{q})\overset{\text{def}}{=}L(t,q,\dot{q})+f(t,q,\dot{q})$$

给出完全相同的拉氏方程，所以

$$\forall q(t), \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} = 0.$$

而

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\ddot{q}_\beta - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \\ &= \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\beta - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right\} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\ddot{q}_\beta \end{aligned}$$

括号中的项只依赖于t, $q, \dot{q}$；含$\ddot{q}$的只有后面一项。对$t = t_0$时刻，可以构造函数$q(t)$，使得$q(t_0), \dot{q}(t_0)$保持不变，但是$\ddot{q}(t_0)$却任意变化，因此等式成立的必要条件为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \equiv 0 \Rightarrow f(t, q, \dot{q}) = A(t, q) + \dot{q}_\alpha B_\alpha(t, q)$$

现在

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial B_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial B_\alpha}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta - \frac{\partial A}{\partial q_\alpha} - \dot{q}_\beta\frac{\partial B_\beta}{\partial q_\alpha} = \left\{\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\right\} + \left\{\frac{\partial B_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial B_\beta}{\partial q_\alpha}\right\}\dot{q}_\beta$$

括号中的项只依赖于t, q。在选定的时刻$t = t_0$，可以构造函数$q(t)$，使得$q(t_0)$保持不变，而$\dot{q}(t_0)$却任意变化，所以等式成立的条件为

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial q_\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial B_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial B_\beta}{\partial q_\alpha} = 0$$

这正好是

$$f(q, \dot{q}, t)dt = A(t, q)dt + B_\alpha(t, q)dq_\alpha$$

可积的条件

$$\frac{\partial A}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial B}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{\partial B_\beta}{\partial q_\alpha}$$

于是

$$f(t, q, \dot{q}) = \frac{d\varphi(t, q)}{dt}.$$

反之，若$f(q, \dot{q}, t) = \frac{d\varphi(q,t)}{dt}$，则很容易验证$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} = 0$。