复变笔记

1 复数和平面点集

1.1 复数

1.1.1 复数的四则运算

虚单位 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，它能和普通的实数一道进行运算,服从实数范围内原来成立的那些基本运算，并满足$i^2=-1$。

我们把形如 $\mathrm{z}=\mathrm{x}+\mathrm{iy}$ 的数称为复数,其中,x 和 y 是任意实数,分别称为 z 复数的实部和虚部.记为 $\mathrm{x}=\mathrm{Re}\,\mathrm{z},\mathrm{y}=\mathrm{In}\,\mathrm{z}$。特别的，当 $\mathrm{In}\,\mathrm{z}=0$，$\mathrm{z}=\mathrm{x}$ 是实数；当 $\mathrm{Re}\,\mathrm{z}=0$，$\mathrm{z}=\mathrm{iy}$ 是纯虚数。

两个复数相等，是指他们的实部和虚部分别相等。如果一个复数的实部和虚部都等于零，就称这个复数等于零。

两复数 $\mathrm{z}=\mathrm{x}+\mathrm{iy}$ 和$\bar{\mathrm{z}}=x-iy$称为相互共轭的。实数的共轭仍为该实数。

四则运算规则：

（1）加法和减法：$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$及$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$

（2）乘法：$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$，特别地，$\mathrm{z}\bar{\mathrm{z}}=x^2+y^2$，通常记 $\mathrm{z}\bar{\mathrm{z}}=|z|^2$

（3）除法：除数不得为零

规律：

$$z_1+z_2=z_2+z_1,z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1\text{（交换律）}$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3),(z_1\cdot z_2)z_3=z_1(z_2\cdot z_3)\text{（结合律）}$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3\text{（分配律）}$$

全体复数引进了上述相等关系及算术运算后称为复数域，在复数域中，两个复数不能比较大小。

1.1.2 共轭复数

运算性质：

（1）$\bar{\bar{z}} = z$

（2）$\mathrm{z} + \bar{\mathrm{z}} = 2\mathrm{Re}\,\mathrm{z}, \mathrm{z} - \bar{\mathrm{z}} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}\,\mathrm{z}$

（3）$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

（4）$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

（5）$\mathrm{z}\bar{\mathrm{z}} = (\mathrm{Re}\,\mathrm{z})^2 + (\mathrm{Im}\,\mathrm{z})^2 = |z|^2$

复数是实数的充要条件是 $\mathrm{z} = \bar{\mathrm{z}}$，是纯虚数的充要条件是 $\mathrm{z} =- \bar{\mathrm{z}}$且 $\mathrm{z} \neq 0$

1.1.3 复数的几何表示、模与辐角

在平面上取定直角坐标系 Oxy，命坐标（x,y）的点与复数 $\mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{iy}$ 相对应，则复数的全体和平面上的点之间一一对应。当平面上的点被用来代表复数时，我们就把这个平面叫做复数平面。

复数 z 可以用平面上一个自由向量表示，如果起点是原点，则向量终点即 z 点，点 z 的位置也可以用它的极坐标r和φ来确定。$r = \sqrt{x^2 + y^2}, tan\varphi = \frac{y}{x}$。r 就是复数 z 的模，$\varphi$称为复数 z 的幅角。

（1）任一复数 $\mathrm{z} \neq 0$ 有无穷多个幅角。约定 $\mathrm{Arg}\,\mathrm{z} = \arg \mathrm{z} + 2\mathrm{n}\pi$，n 为任意整数，$\arg \mathrm{z} \in (-\pi, \pi]$称为幅角主值。

（2）当 z=0 时，幅角是无意义的。

$$z = x + iy = r(cos\varphi + isin\varphi) = re^{i\varphi}$$

两个指数形式（或三角形式）的复数相等的充要条件是$r_1 = r_2, \varphi_1 = \varphi_2 +$

$2k\pi$，k 为整数。共轭条件是$|\bar{z}| = |z|, arg\ \bar{z} =- arg\ z$，$arg\ z \neq \pi$。

重要不等式：

（1）$max\{|x| = |Re\ z|, |y| = |Im\ z|\} \leq |z|$

（2）$|z| \leq |Re\ z| + |Im\ z|$

（3）$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

（4）$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

（5）$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$

$|z_1 - z_2|$就是点z_1和z_2之间的距离。

复数的指数形式作乘除法具有明显的几何意义——两个复数的乘积，它的模等于原复数模的积，幅角等于两幅角的和，即$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$，$Arg(z_1 z_2) = Arg\ z_1 + Arg\ z_2$;对于除法，$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$，$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg\ z_1 - Arg\ z_2$。

任何一条用隐式方程$F(x, y) = 0$ 表示的平面曲线，都可以表示为复数方程$\mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{z}+\bar{\mathrm{z}}}{2}, \frac{\mathrm{z}-\bar{\mathrm{z}}}{2\mathrm{i}}\right)$。

1.1.4 复数的乘方和开方

$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(cos\ n\varphi + isin\ n\varphi)$，特别地，令 r=1，得$(cos\ \varphi + isin\ \varphi)^{in\varphi} = cos\ n\varphi + isin\ n\varphi$，称为 de Moivre 公式。

方程$w^n = z$的所有解，称为 z 的 n 次方根，记作$\sqrt[n]{z}$，则$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\right)\left(cos\ \frac{\varphi+2k\pi}{n} + isin\ \frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$

1.1.5 复数序列的极限、无穷远点

设z_1，$z_2, \cdots, z_n, \cdots$是一个复数序列，z_0是已给复数，如果$\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$，就称复数$z_0$是复数列$\{z_n\}$的极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$或$z_n \to z_0$。

设$z_0 = x_0 + iy_0, z_n = x_n + iy_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$及

$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$。

如果$z_0 \neq 0$，则$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$的充要条件是$\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$及$\lim_{n\to\infty} Arg\, z_n = Arg\, z_0$。

如果数列z_1，$z_2, \cdots, z_n, \cdots$具有这样的性质：对任意正数 M，总可以找到一个自然数 N，使当 n>N 时，有$|z_n| > M$，即当 n 增大时z_n的模可以变得大于任意预先设定的界限，那么我们就说这个数列收敛于无穷远点，并记作$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$。复球面上的点与复平面上的点一一对应，$(x, y) \leftrightarrow \left(\frac{4Re\, z}{|z|^2+4}, \frac{4Im\, z}{|z|^2+4}, \frac{2|z|^2}{|z|^2+4}\right)$。增加了∞点的复数平面称为扩充平面或闭复平面，与他对应的球面称为复数球面或黎曼球面。原来的复数平面称为开平面或有限平面。

约定：

（1）∞点的实部、虚部及幅角都无意义，模$|\infty| = +\infty$

（2）若$a \neq 0$，则$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$，$\frac{a}{0} = \infty$

（3）若$a \neq \infty$，则$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty, \frac{a}{\infty} = 0$

（4）在闭复平面上任何一个以原点 O 为中心的圆的外部$|z| > R$，都称为无穷远点的邻域。

没有强调闭时，均指开复平面。

1.2 平面点集

1.2.1 基本概念

设z_0是复平面上一点，ρ是任一正数，点集$\{z||z - z_0| < \rho\}$称为z_0的ρ邻域。

设已给集 E，M 是复平面上一点，如果 M 有一个邻域完全属于 E，M 称为 E 的内点；M 的任一邻域既有 E 的点，又有非 E 的点，M 称为 E 的边界点，边界点可以属于集 E，也可以不属于；M 有一个邻域完全不属于 E，M 称为 E 的外点。

如果 E 的点全是内点，E 称为开集，E 的全部边界点的集合，称为 E 的边界。如果 E 的边界点全属于 E，E 称为闭集。如果 E 可以包含在原点的某个邻域内，E 称为有界集，否则为无界集。

1.2.2 区域与曲线

具有下列性质的非空点集 D 称为区域：

（1）D 是开集；

（2）D 中任意两点可以用一条全在 D 中的折线连接起来（连通性）

区域 D 加上它的边界 C 称为闭域，记为$\overline{D}=C+D$

设 $\mathrm{x(t)}$ 及 $\mathrm{y(t)}$ 是定义在$[\alpha,\beta]$上的连续函数，则由方程 $\mathrm{z=z(t)=x(t)+i(t)},\alpha\le \mathrm{t}\le\beta$所决定的点集 *l*，称为复平面上的一条连续曲线；设已给一条连续曲线 *l*，如果t_1,t_2是$[\alpha,\beta]$上的两个不同的参数值，他们不同为$[\alpha,\beta]$的端点，如果他们对应曲线 *l* 的不同点，这样的曲线叫做约当曲线或简单曲线；一条约当曲线，如果满足 $\mathrm{z(\alpha)=z(\beta)}$，称为约当闭曲线或简单闭曲线。简单曲线是一条无重点的连续曲线。

任一条简单闭曲线都把整个平面分成两个没有公共点的区域，其中一个有界的称为它的内区域，一个无界的称为它的外区域。

约当闭曲线的内区域 D 有这样一个性质：域 D 中任何简单闭曲线的内区域中的每一点都属于 D。一般地，我们把具有这种性质的区域，叫做单连通区域，简称单连域。不是单连通的区域称为多连通区域。

复平面上的区域，常是由复数的实部、虚部、模及幅角的不等式所确定的点集。一般来说，多连通区域的边界是由有限条闭曲线及一些割痕和点组成的。

2 复变数函数

2.1 复变数函数的概念

设 E 是复平面上的一个点集，如果对 E 中的每一个点 z，可以按照一定的规律找到一个复数 w 与之对应，就称 E 上定义了一个复变数函数，也简称为函数，记作$w=f(z)$。

如果和每个点 z 对应的复数 w 不止一个，那么这个函数就称为一个多值函数。如未作声明，函数指单值函数。

设$z=x+iy, w=u+iv$，则函数关系$w=f(z)$相当于实变量 x,y 的两个实值函数$u=u(x,y), v=v(x,y)$。

函数$w=f(z)$可以看做一个变换，它把 z 平面上的一个点集 E 变换成 w 平面上的一个点集 E’，E’常记作 *f(E)*。在映照$w=f(z)$下，$w_0=f(z_0)$及$E'=f(E)$分别称为点z_0及点集 E 的像，点z_0及点集 E 则分别称为w_0及点集E'的原像。

设$w=f(z)$是集合 E 上的单值函数，如果对于 E 中的任意两个不同点z_1及z_2，它们在（函数值）集合E'中对应的点$w_1=f(z_1)$及$w_2=f(z_2)$也不同，则称$w=f(z)$是集 E 中的一个一一映照（或双方单值映照），或者说，$w=f(z)$双方单值地把集 E 映成 E’。

2.2 函数极限和连续性

设函数$w=f(z)$在区域 $0<|\mathrm{z}-\mathrm{z}_0|<\rho$内有定义。如果对任意$\varepsilon>0$，总能找到$\delta>0$，使当 $0<|\mathrm{z}-\mathrm{z}_0|<\delta, \delta\le\rho$时，就有$|f(z)-w_0|<\varepsilon$成立，就称当 z 趋于$\mathrm{z}_0$时，$f(z)$的极限是$w_0$，记作$\lim\limits_{z\to \mathrm{z}_0} f(z)=w_0$。

如果等式$\lim\limits_{z\to \mathrm{z}_0} f(z)=f(\mathrm{z}_0)$成立，就称为函数$f(z)$在点$\mathrm{z}_0$连续。如果$f(z)$在区域 D 中的每点都连续，就称$f(z)$在区域 D 中连续。

函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在$\mathrm{z}_0=\mathrm{x}_0+\mathrm{iy}_0$连续的充要条件是$u(x,y)$和

$v(x,y)$作为二元函数在$(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$处连续。

幂函数$w=z^n,n$为正整数，更一般地，多项式$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$是全平面上的连续函数；而有理函数$R(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}$除去若干个使分母为零的点外，在全平面处处连续。

2.3 导数和解析函数的概念

设$w=f(z)$在 z 点的某邻域 U 内有定义，$\mathrm{z}+\Delta\mathrm{z}\in\mathrm{U}$。如果极限$\lim\limits_{\Delta\mathrm{z}\to 0}\frac{f(z+\Delta a)-f(z)}{\Delta z}$存在，就称函数$f(z)$在 z 点可微，而且这个极限称为$f(z)$在 z 点的导数或微商，记作$f'(z),\frac{df}{dz},\frac{dw}{dz}$，即$f'(z)=\lim\limits_{\Delta\mathrm{z}\to 0}\frac{f(z+\Delta a)-f(z)}{\Delta z}$。若$f(z)$在 z 点可微，则在 z 点连续。

如果$f(z)$在区域 D 内每一点可微，则称$f(z)$在 D 内解析，或者说$f(z)$是 D 内的解析函数；如果$f(z)$在点z_0的某个邻域内可微，则称$f(z)$在点z_0解析；如果$f(z)$在点z_0不解析，则称z_0为$f(z)$的奇点。$f(z)$在闭区域$\overline{D}$上解析，是为$f(z)$在包含$\overline{D}$的某个区域内解析。

幂函数$w=z^n$是全平面上的解析函数，$w=\overline{z}$在全平面每一点都不可微，多项式、有理函数除掉分母为 0 也是全平面上解析。

2.4 柯西-黎曼方程

函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在点 z=x+iy 可微的充要条件是：（1）二元函数$u(x,y)$，$v(x,y)$在点(x,y)可微（2）$u(x,y)$，$v(x,y)$在点(x,y)满足柯西-黎曼方程（C-R 方程），即$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$。有$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$。

函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域 D 内可微的充要条件是：（1）二元函数$u(x,y)$，$v(x,y)$在 D 内可微（2）$u(x,y)$，$v(x,y)$在 D 处处满足 C-R 方程。

极坐标条件下 C-R 方程为：$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}$

2.5 初等函数

如果$w=f(z)$是区域 D 内的一一解析映照，则称$f(z)$是 D 内的单叶函数，D 称为$f(z)$的单叶性区域。

2.5.1 幂函数

z 平面：$\alpha<arg\ z<\beta,\beta-\alpha\leq 2\pi/n$都是变换 $\mathrm{w}=\mathrm{z}^{\mathrm{n}}$的单叶性区域。一般地，$D_k$:$\frac{2k-1}{n}\pi<arg\ z<\frac{2k+1}{n}\pi \xrightarrow{\mathrm{w}=\mathrm{z}^{\mathrm{n}}，单叶} (2k-1)\pi<arg\ w<(2k+1)\pi$，把 $\mathrm{w}=\mathrm{z}^{\mathrm{n}}$ 定义域限制在角域D_k就可以确定相应的单值反函数$z=(\sqrt[n]{w})_k=\sqrt[n]{|w|}exp(i\frac{arg\ w}{n})$。

2.5.2 根式函数

一般地，如果 z 沿着一条闭曲线l的正向绕原点运行了 k 圈，则$\Delta_l arg\ z=2k\pi$。

（1）支点

对于某个多值函数$w=f(z)$，若点$z=a$具有这样一个特性：在$z=a$点的充分小邻域内，作一条包围该点的闭曲线 C，当 z 从 C 上某点出发，绕 C 连续变动一周回到出发点时，$f(z)$将从它的一个值变到另一个值，就称a是$f(z)$的支点。

闭复平面中，除了原点和无穷远点再也没有$w=\sqrt[n]{z}$的其他支点。

（2）支割线和多值函数的单值解析分支

通常在 z 平面上从原点到无穷远点任意引一条射线或简单曲线，将 z 平面割开，这条线称为支割线。在割开了的 z 平面构成的区域 G，在 G 内的某点z_0，选定了它的幅角，也就选定了$w=\sqrt[n]{z}$在z_0处 n 个值的一个，那么其他各点值都可以单值确定，这样确定的单值函数叫做$\sqrt[n]{z}$在 G 内的一个单值连续分支。

一般地，取负实轴为支割线，多值函数$\sqrt[n]{z}$有 n 个单值分支：$w_k=\left(\sqrt[n]{z}\right)_k=\sqrt[n]{r}exp\left(i\frac{arg\ z}{n}\right),(2k-1)\pi<arg\ z<(2k+1)\pi$ ， 且 $w_k=w_{k-1}exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)=$

$\sqrt[n]{r}\left(i\frac{arg\,z+2k\pi}{n}\right)$ ， $\pi(2k-1)\pi < arg\,w < (2k+1)\pi \xrightarrow{w_k=(\sqrt[n]{z})_k，单叶} D_k: \frac{2k-1}{n}\pi < arg\,z < \frac{2k+1}{n}$。

设 *F(z)*是区域 D 内的多值函数，*f(z)*是 D 内的单值解析函数。如果 *f(z)*在 D 内每一点的值，都等于 *F(z)*在该点的一个值，则称 *f(z)*是 *F(z)*在 D 内的一个单值解析分支。

（3）关于支割线两岸的函数值

一般来说，每个单值分支在支割线的两岸取不同的值。

研究一个多值函数时，首先要确定它的支点，然后用一些链接各支点的简单曲线把平面割开，在割开了的平面上就可以讨论它的单值分支了。

2.5.3 指数函数

$$D_n: (2k-1)\pi < Im\,z < (2k+1)\pi \xrightarrow{w=e^z,单叶} (2k-1)\pi < arg\,w < (2k+1)\pi$$

2.5.4 对数函数

满足$e^w = z$的复数w称为 z 的对数，记作$w = Ln\,z = ln|z| + iarg\,z + 2k\pi i$，任何不是零的复数都有无穷多个对数，常取$ln\,z = ln|z| + iarg\,z, -\pi < arg\,z \leq \pi$作$Ln\,z$的主值。$(2k-1)\pi < arg\,z < (2k+1)\pi \xrightarrow{w_k=(Ln\,z)_k,单叶} D_n: (2k-1)\pi < Im\,w_k < (2k+1)\pi$。

2.5.5 三角函数

$cos\,z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), sin\,z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$，复变数三角函数都是全平面的解析函数。所有实三角函数公式在复情形仍然成立。$|cos\,z|$和$|sin\,z|$是无界的。

2.5.6 双曲函数

$cosh\,z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}, sinh\,z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$，双曲函数与三角函数有关系，即$sinh\,z = -isin\,iz, cosh\,z = cos\,iz$。双曲正弦函数和双曲余弦函数是全平面上的解析函数。

实双曲函数的恒等式在复的情形下仍然成立。

2.5.7 一般幂函数

z 的α次幂函数为$w = z^{\alpha} = exp(\alpha Ln\, z) = exp(\alpha[ln|z| + i(arg\, z + 2k\pi)])$，若α为正实数，且当 $z=0$ 时，规定$z^{\alpha} = 0$。

（1）当α为正整数 n 时，$z^{n} = exp(\alpha[ln|z| + iarg\, z])$，与通常幂函数一致，是一个单值函数。

（2）当$\alpha = \frac{1}{n}$时，$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{1/n} exp\left(i\frac{arg\, z + 2k\pi}{n}\right)$，是一 n 值函数。类似地，当α为有理数时，$z^{m/n} = \sqrt[n]{z^{m}}$是一 n 值函数。

（3）当α是无理数或一般复数时，z^{α}是无穷多值的

在复变函数里约定e^{z}是指数函数。

2.5.8 反三角函数

$w = Arcsin\, z = -iLn(iz + \sqrt{1 - z^{2}})$是无穷多值函数。

$$\mathrm{Arccos}z = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^{2} - 1}),$$
$$\mathrm{Arctan}z = -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z},$$
$$\mathrm{Arccot}z = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}},$$
$$\mathrm{Arsinh}z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^{2} + 1}),$$
$$\mathrm{Arcosh}z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^{2} - 1}),$$
$$\mathrm{Artanh}z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + z}{1 - z},$$
$$\mathrm{Arcoth}z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z + 1}{z - 1}.$$

3 解析函数的积分表示

3.1 复变函数的积分

设 C 是平面上的一条逐段光滑的曲线，$w = f(z)$是定义在曲线 C 上的一个单

值连续函数，任意用一系列分点$z_k = x_k + iy_k$把曲线 C 分成许多小段，在每一段任取一点ξ_k，作和$\sum f(\xi_k)\Delta z_k$，令$\lambda = \max\limits_{k} |\Delta z_k|$，如果$\lambda \to 0$，和式极限存在，就称这个极限为$f(z)$沿曲线 C 的积分，记作$\int f(z)dz$。

约定以后提到的曲线（包括简单曲线）都是光滑或逐段光滑的。

设$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$在曲线 C 上连续，则复积分$\int f(z)dz$存在，而且可以表示为两个线积分的和，即$\int f(z)dz = \int u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int v(x,y)dx + u(x,y)dy$，记为$\int f(z)dz = \int (u+iv)(dx+idy)$。

设 C 是简单光滑曲线：$z = z(t) = x(t) + iy(t), a \le t \le b$，且$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$，于是有$\int f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$。

曲线积分的一些基本性质对复积分也成立：

（1）如果 k 是复常数，则$\int kf(z)dz = k\int f(z)dz$。

（2）$\int [f(z) \pm g(z)]dz = \int f(z)dz \pm \int g(z)dz$。

（3）$\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$

（4）如果曲线 C 由C_1和C_2组成，则$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$。

（5）$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|ds$，特别的，若在曲线 C 上有$|f(z)| \le M$，那么$\left|\int_C f(z)dz\right| \le Ml$，叫做长大不等式。

3.2 柯西积分定理

将简单闭曲线叫做闭路，如非特别声明，凡沿闭路的积分都是按正向取的。

柯西积分定理：设 D 是闭路 C 所围成的单连通区域，$f(z)$在闭域 C+D 上解析，则$\int_C f(z)dz = 0$。

设$f(z)$在单连通域 D 内解析，C 是 D 内的任意封闭曲线，则$\int_C f(z)dz = 0$。

设$f(z)$在单连通域 D 内解析，C 是 D 内任一条起于点z_0而终于点 z 的简单曲

线，则积分$\int_C f(\xi)d\xi$的值不依赖于积分路线 C，而只由z_0和 z 确定。所以这个积分也可以记作$\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$。

设有 n+1 条简单闭曲线$C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$，其中，$C_1, C_2, \cdots, C_n$每一条都在其余各条的外区域内，而且它们又全在$C_0$的内部。由$C_0$及$C_1, C_2, \cdots, C_n$围成一个多连通区域 D，这种区域 D 的全部边界 C 称为一个复闭路。当观察者在 C 上行进时，区域 D 总在它的左边方向，称为 C 的正向。所以，沿正向的复闭路 C 包括在外取逆时针方向的闭路C_0及在内取顺时针方向的闭路$C_1, C_2, \cdots, C_n$。常把复闭路记作$\mathrm{C} = \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1^- + \mathrm{C}_2^- + \cdots + \mathrm{C}_n^-$。

设$f(z)$在复闭路 $\mathrm{C} = \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1^- + \mathrm{C}_2^- + \cdots + \mathrm{C}_n^-$及其包围的多连通区域解析，则$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz$，或$\int_C f(z)dz = 0$.

设 a 为闭路 C 内任一点，$\int \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, n = 1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases}$。

3.3 原函数

如果在区域 D 内有$F'(z) = f(z)$，则$F(z)$称为$f(z)$在区域 D 内的一个原函数。

如果$f(z)$是单连通区域 D 内的解析函数，那么，由变上限积分所确定的函数$\mathrm{F(z)} = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$，也是 D 内的解析函数，而且$F'(z) = f(z)$。

牛顿—莱布尼兹公式：$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = H(z) - H(z_0)$，这里$H(z)$是$f(z)$的任一原函数。

3.4 柯西积分公式

设$f(z)$在闭路（或复闭路）C 及其所围区域 D 内解析，则对 D 内任一点 z，有$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$。

如果两个解析函数在区域的边界上处处相等，则他们在整个区域上也恒等。解析函数在区域的内部有任意阶微商，且微商也可以通过函数在边界上的值表示。

设$f(z)$在闭路（或复闭路）C 及其所围区域 D 内解析，则对 D 内任一点 z，$f(z)$有任意阶导数，且$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$，该公式也叫积分公式。

3.5 解析函数的性质

平均值公式：设$f(z)$在闭圆$|z-a|\le R$上解析，则$f(z)$在圆心 a 的值，等于它在圆周上的值的算数平均值，即$f(a)=\frac{1}{2\pi R}\int_C f(\zeta)\,ds$。

最大模原理：设$f(z)$在有界域 D 内解析，在有界闭域 C+D 上连续，这里 C 是 D 的边界，并且$f(z)$不恒等于常数，那么它的模$|f(z)|$只能在边界 C 上取到它在整个有界闭域 C+D 上的最大值。

柯西不等式：设$f(z)$在区域 D 内解析，以 D 内任一点 z 为圆心，作一个包含在 D 内的圆周 C:$|\zeta-z|=R$，设 *M(R)*是$|f(z)|$在 C 上最大值，则$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!M(R)}{R^n}$。

如果$f(z)$在有限复平面解析，我们就叫它整函数。

刘维尔定理：如果整函数在整个平面上有界，则$f(z)$必是常数。

代数学基本定理：任何复系数多项式$f(z)=\sum_0^n a_{n-i}z^i$，$a_0\neq 0$ 必有零点，即$f(z)=0$ 必有根。

n 次多项式$f(z)$必可以分解为 n 个一次因式的乘积$f(z)=a_0(z-z_1)\cdots(z-z_n)$，即复数域内 n 次多项式有 n 个根。

莫雷拉定理：如果$f(z)$在域 D 中是连续的，且对 D 中任意闭曲线 C 有$\int f(z)dz=0$，则$f(z)$在 D 内解析。

$f(z)$在单连通区域 D 内解析的充要条件是：$f(z)$在 D 内连续，且对 D 内任何闭路 C，有$\int f(z)dz=0$

4 调和函数

4.1 解析函数与调和函数的关系

$\nabla^2 f=0$ 称为拉普拉斯方程。我们把有二阶连续偏导数且满足拉普拉斯方程的函数称为调和函数；把两个由 C-R 方程联系着的调和函数u,v称为共轭调和函数。

设$f(z)$在域 D 内解析，那么它的实部和虚部是该区域内的共轭调和函数。

设$f(z)=u+iv$是一解析函数，且$f'(z)\neq 0$，那么等值曲线簇$u=K_1,v=K_2$在公共点互相正交。

设$u(x,y)$是单连通区域 D 内的调和函数，则由线积分所确定的函数$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C_2$使得$f(z)=u+iv$在 D 内解析。同样地，$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy+C_1$。

4.2 调和函数的性质和狄利克雷问题

平均值定理：设$u(z)$是闭圆$\overline{D}:|z-z_0|\leq R$内的调和函数，则$u(z_0)=\frac{1}{2\pi R}\int u(z)ds$。

极值定理：若函数$u(z)$在一个有界域 D 内调和，且在有界闭域 C+D 连续，且u不恒等于常数，则函数$u(z)$只能在 D 的边界 C 上取 C+D 上的最大值和最小值。

设$u(z)$是闭圆$\overline{D}:|z-z_0|\leq R$内的调和函数，则对此圆内部任一点 z，有$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rrcos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$，称为泊松积分公式。

狄利克雷问题：$\begin{cases}\nabla^2 u(z)=0,z\in D\\ u(z)|_C=u(\zeta)\end{cases}$。

设函数u_1及u_2在有界域 D 内调和，在有界闭域$\overline{D}=C+D$上连续，且u_1及u_2在 C 上相差不超过ε，即当$\zeta\in C$时，$|u_1(\zeta)-u_2(\zeta)|\leq\varepsilon$，则在整个域$\overline{D}$上也有$|u_1(z)-u_2(z)|\leq\varepsilon$。

$u(\zeta)$除了有有限个第一类间断点外处处连续的问题为广义狄氏问题，它要求求出的$u(z)$在$u(\zeta)$上连续点值相等。

5 解析函数的级数展开

5.1 复级数的基本性质

5.1.1 复数项级数

设$\{z_n\}$是一复数列，表达式$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$称为复数项无穷级数。如果它的部分和数列$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$有极限$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则称此级数是收敛的，S 称为级数的和，记作$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k = S$，反之称为级数发散。

令$a_k = Re\, z_n$，$b_k = Im\, z_n$，$a = Re\, S$，$b = Im\, S$。

$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$收敛于 S 的充要条件是：级数$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$收敛于a和级数$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$收敛于b。

（柯西收敛准则）$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$收敛于 S 的充要条件是：$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$，使当$n > N$，$p$为任意自然数，有$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| < \varepsilon$。

级数收敛的必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$。

如果级数$\sum_{k=1}^{+\infty} |z_k|$收敛，则称$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$绝对收敛，正项级数的一切收敛判别法，都可以用来判别复数项级数的绝对收敛性。

$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$绝对收敛的充要条件是级数$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$和级数$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$都绝对收敛。

如果$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$绝对收敛，则它一定收敛。

一个绝对收敛的复数项级数的各项可任意重排顺序，仍绝对收敛，和不变。

两个绝对收敛的复数项级数$\sum_{k=1}^{+\infty} z'_k = A$与$\sum_{k=1}^{+\infty} z''_k = B$，则级数$\sum_{k=1}^{+\infty} z_k = AB$。

5.1.2 复变函数项级数

设$\{f_n(z)\}$是定义在平面点集E上的复变函数列，则称$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$为集$E$上的复变函数项级数。设$z_0 \in E$，如果$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z_0)$收敛，则称级数$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$在$z_0$收敛。如果级数$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$在$E$上每一点都收敛，则称$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$在$E$上收敛。这时，级

数$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$是$E$上的函数，记作$f(z)$。

设级数$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$在集$E$上收敛于$f(z)$，记它的部分和为$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$，如果$\forall \varepsilon > 0$，有一个与$z$无关的自然数$N = N(\varepsilon)$，使当$n \geq N$时，有$|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$，则称级数$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$在$E$上一致收敛于$f(z)$。

（柯西一致收敛准则）级数$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$在$E$上一致收敛于$f(z)$的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0$，可以找到自然数$N(\varepsilon)$，使得$n \geq N$时，对任何自然数 p，有$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$。

（Weierstrass 判别法）如过对于E上所有点 z 都有$|f_k(z)| \leq M_k$，而正项级数$\sum_{k=1}^{+\infty} M_k$收敛，则级数$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$在$E$上一致收敛。$\sum_{k=1}^{+\infty} M_k$称为$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$的强级数。

如果$f_k(z)$都是域 D 内的连续函数，级数$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$在 D 内一致收敛于$f(z)$，则和函数$f(z)$也是 D 内连续函数。

如果$f_k(z)$都在曲线段 C 上连续，且级数$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$在 C 上一致收敛于$f(z)$，则沿 C 可以逐项积分，有$\int_C f(z)dz = \sum \int_C f_k(z)dz$。

（维尔斯特拉斯定理）设$f_n(z)$在 D 内解析，且级数$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$在 D 内一致收敛，则$f(z)$在 D 内解析，且可逐项多阶求导至任意多阶，即有$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(z)$。

5.2 幂级数

最简单的函数项级数是幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$，其中$a$和$a_n$是复常数。

（Abel 定理）（1）如果幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$在某点$z_0(\neq a)$收敛，则它在圆：$|z-a| < |z_0 - a|$内绝对收敛。（2）在（1）的条件下，幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$在任何闭圆$|z-a| \leq \rho < |z_0 - a|$上一致收敛。（3）如果幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$在某点$z_1$发散，则它在圆外域：$|z-a| > |z_0 - a|$内处处发散。

设幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n$的收敛半径为 R，（1）如果 $0<R<+\infty$，则级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$在圆 D：$|z-a|<R$内绝对收敛，在$|z-a|>R$内处处发散。（2）如果$R=+\infty$，则$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$在全平面收敛。（3）如果$R=0$，$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$在除去$z=a$处处发散。称 R 为$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$收敛半径。

在$(z-a)^n$无间隔时，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r$，则$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$收敛半径$R=1/r$。

设$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$收敛半径为$R>0$，则（1）和函数$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$是收敛圆的解析函数，可以逐项求导至任意阶。（2）$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$。

5.3 解析函数的泰勒展开

设函数$f(z)$在点a解析，以a为中心作圆，命圆半径扩大直至碰上奇点，则在圆域内部$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n, a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$，称为$f(z)$在点$a$或圆域内的泰勒展式。

函数$f(z)$在任一解析点的泰勒展式是唯一的。

幂级数即是它和函数在收敛圆内的泰勒展式。

$f(z)$在区域 D 解析的充要条件是$f(z)$在 D 内任一点 a 都可以展开成$z-a$的幂级数。

$T_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}cos(narccost)$是一个$t$的$n$次多项式，称为切比雪夫多项式。

设$f(z)$在z_0解析，且$f(z_0)=0$，则称z_0是$f(z)$零点，在z_0的某邻域 U 泰勒展式为$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$。可能出现两种情况：（1）如果$a_n=0$，那么$f(z)$在 U 恒等于 0。（2）如果$a_m\neq 0$，且对于$n<m, a_n=0$。称$z_0$是$f(z)$的 m 阶零点，特别地，如果$m=1$，称为单零点。

点z_0是$f(z)$的 m 阶零点的充要条件是$f^{(m)}(z_0)\neq 0$ 且对于$n<m, f^{(n)}(z_0)=0$。

点z_0是不恒为 0 的解析函数$f(z)$的 m 阶零点的充要条件是在z_0点附近有$f(z)=(z-z_0)^m g(z), g(z_0)\neq 0$，且$g(z)$在$z_0$解析。

（零点的孤立性）设$f(z)$在z_0解析，且$f(z_0)=0$。那么$f(z)$或者在z_0的一个邻域内恒等于零，或者存在一个邻域使z_0使唯一零点。

5.4 罗朗级数

形如$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n=\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$称为罗朗级数。当$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$和$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$都收敛时，则称罗朗级数$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$收敛。

记$\zeta=1/(z-a)$，那么$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}=\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}\zeta^n$，设它的幂级数收敛半径为 $1/r$，那么它的和函数$f(\zeta)$在圆域：$|\zeta|<1/r$内解析，即$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$在圆外域$D_1{:}\,|z-a|>r$内收敛，和函数$S_1(z)=f(\frac{1}{z-a})$在$D_1$内解析。

设$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$收敛圆为$D_2{:}\,|z-a|<R$，其和函数$S_2(z)$是$D_2$内的解析函数。

当$R>r$时，圆环域 D:$r<|z-a|<R$就是罗朗级数$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$的收敛域，和函数在 D 内解析。

设$f(z)$在圆环域 D:$r<|z-a|<R$中解析，则$f(z)$一定能在这个圆环中展开成罗朗级数，即$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$，其中$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$，其中 C 是 D 内围绕 a 点的任意闭路。

$J_n(t)=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{l!(n+l)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+n}, J_{-n}(t)=(-1)^n J_n(t)$分别称为$\pm n$阶贝塞尔函数，收敛半径为$+\infty$，它还可以表示为$J_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} cos(tsin\theta-n\theta)d\theta$

5.5 解析函数的孤立奇点

如果函数$f(z)$在 a 点的某个邻域：$|z-a|<\rho$内除 a 点外都是解析的，则称

a 是$f(z)$的孤立奇点。

设 a 是$f(z)$的孤立奇点，那么在圆环域 $0<|z-a|<\rho$内可以展成罗朗级数$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n$，称为$f(z)$在孤立奇点 a 的罗郎展开。其中带负次幂的部分称为主要部分，幂级数部分称为正则部分。

如果罗郎展开没有主要部分，$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$，那么称 a 为可去奇点，可当作解析点看待。

设 a 是$f(z)$的孤立奇点，那么 a 为可去奇点的充要条件是，存在某个正数ρ，使得$f(z)$在环域 $0<|z-a|<\rho$内有界。

设 a 是$f(z)$的孤立奇点，那么 a 为可去奇点的充要条件是，$\lim\limits_{z\to a}f(z)=a_0$（有限）。

如果罗朗展开的主要部分只有有限个（至少有一个）不为 0 的项，设a_{-m}是左起第一个不为 0 的系数，即$f(z)=\sum_{n=-m}^{+\infty}a_n(z-a)^n, a_{-m}\neq 0$，称 a 是$f(z)$的 m 级极点。

设 a 是$f(z)$的孤立奇点，则下面命题等价：（1）a 是$f(z)$的 m 级极点；（2）$f(z)$在某环域可表示为$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$，其中$\varphi(z)$在 a 点解析，且$\varphi(a)\neq 0$；（3）a 是函数$g(z)=1/f(z)$的 m 级零点。

$f(z)$的孤立奇点 a 是极点的充要条件是$\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$。

如果罗朗展开的主要部分含有无限多项，称 a 是$f(z)$的本性奇点。

$f(z)$以 a 为本性奇点的充要条件是不存在有限或无限的极限$\lim\limits_{z\to a}f(z)$。

如果$f(z)$在∞点的某邻域$R<|z|<+\infty$内解析，则称∞是$f(z)$的孤立奇点。

设∞点是$f(z)$的孤立奇点，有函数$\varphi(\zeta)=f(\frac{1}{\zeta})$，如果$\zeta=0$ 是$\varphi(\zeta)$的可去奇点、m 级极点或本性奇点，那么$z=\infty$为$f(z)$的可去奇点、m 级极点或本性奇点。

设$\varphi(\zeta)$在 $0<|\zeta|<1/R$的罗朗展开为$\varphi(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\zeta^n$，那么$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a'_nz^n$，其中$a'_n=a_{-n}$。$z=\infty$为$f(z)$的可去奇点、m 级极点、本性奇点分别等价于$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a'_nz^n$不含 z 的正次幂、只有有限个（至少一个）正次幂且最高次幂为 m、含无限个正次幂，等价于$\lim_{z\to\infty}f(z)$有限、∞、不存在。

对于一般的有理函数$f(z)=\frac{a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n},a_0,b_0\neq 0$，当$n\geq m$时，由于$\lim_{z\to\infty}f(z)$有限，故∞点是解析点，当$n<m$，$\lim_{z\to\infty}f(z)=\infty$，故∞点是极点，采用降幂除法，可以得到展开式$f(z)=\frac{a_0}{b_0}z^{m-n}+\cdots$，∞点是 *m-n* 级极点。

6 留数及其应用

6.1 留数定理

设 *a* 是$f(z)$的孤立奇点，C 是 *a* 的充分小邻域内一条把 *a* 点包含在内的闭路，积分$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)dz$称为$f(z)$在 *a* 点的留数或残数，记作$Res[f(z),a]$，即有$\int f(z)dz=2\pi iRes[f(z),a]$。

（留数定理）如果函数$f(z)$在闭路 C 上解析，在 C 内部除去 n 个孤立奇点$a_1,\cdots,a_n$外也解析，则$\int f(z)dz=2\pi i\sum Res[f(z),a_i]$。

函数$f(z)$在 *a* 点的留数等于$f(z)$在 *a* 点的罗朗展开的负一次幂系数，即$Res[f(z),a]=a_{-1}$。

设 *a* 是$f(z)$的 m 级极点，则$Res[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^mf(z)]$。

设$P(z)$及$Q(z)$都在 *a* 点解析，且$P(a)\neq 0,Q(a)=0,Q'(a)\neq 0$，则$Res[\frac{P(z)}{Q(z)},a]=\frac{P(a)}{Q'(a)}$

6.2 积分计算

6.2.1 $\int_0^{2\pi}R(cos\theta,sin\theta)d\theta$型积分

设$R(cos\theta,sin\theta)$是关于$cos\theta,sin\theta$的有理函数，令$z=e^{i\theta}$，那么

$R(cos\theta, sin\theta) = R\left[\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right]$是$z$的有理函数。

$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2pcos\theta+p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2}$，称为泊松积分。

6.2.2 有理函数的积分$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$

一般来说，当$f(x)$在实轴上无暇点时，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_B^A f(x)dx$，当$A \to +\infty, B \to -\infty$时，右边极限存在。对于某些函数，右边极限不存在，但是$\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$存在，称之为广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$的柯西积分主值，记作$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$。当$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$存在时，其柯西积分主值存在，且两者相等。

设$f(x)$在*[a,b]*中有一个瑕点 c，那么$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{r_1\to+0} \int_a^{c-r_1} f(x)dx + \lim\limits_{r_2\to+0} \int_{c+r_2}^{b} f(x)dx$。称$\lim\limits_{r\to+0}\left[\int_a^{c-r} f(x)dx + \int_{c+r}^{b} f(x)dx\right]$称为$\int_a^b f(x)dx$的积分主值，记作$v.p. \int_{a+r}^{b} f(x)dx$。

如果当R充分大时，$f(z)$在圆弧$C_R: z = Re^{i\theta}, \alpha \le \theta \le \beta$上连续，且$\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$，则$\lim\limits_{R\to\infty} \int f(z)dz = 0$。特别地，当$f(z)$是有理函数$\frac{P(z)}{Q(z)}$，且$Q(x)$至少比$P(x)$高两次时，$\lim\limits_{R\to\infty} \int \frac{P(z)}{Q(z)}dz = 0$。

设$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$是一个有理函数，假定$Q(x)$在实数轴上无零点，且$Q(x)$至少比$P(x)$高两次。取辅助函数$R(z)$，它在全平面至多有有限个极点，且都不在实数轴上，设$a_1, \cdots, a_n$是$R(z)$位于上半平面的全部极点。取辅助闭路$C = C_R + [-R, R]$，当R充分大时，$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum Res[f(z), a_i]$。

如果当ρ充分小，$f(z)$在圆弧$C_R: z = a + \rho e^{i\theta}, \alpha \le \theta \le \beta$上连续，且$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = k$，则$\lim\limits_{\rho\to 0} f(z)dz = i(\beta-\alpha)k$。

设 a 是$f(z)$的一级极点，则$\lim\limits_{\rho\to 0} f(z)dz = i(\beta-\alpha)Res[f(z), a]$。

（约当引理）如果当R充分大时$g(z)$在圆弧$C_R: |z| = R, Imz > -a(a > 0)$上连

续，且$\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$，则对任何正数$\lambda$都有$\lim\limits_{R\to+\infty}\int g(z)exp(i\lambda z)dz=0$。

6.2.3 $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)cosmxdx$及$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)sinmxdx\,,m>0$ 型的积分

设$R(z)$是有理函数，分母至少比分子高一次，$R(z)$在实数轴上除有限个单极点$x_1,\cdots,x_l$外处处解析。

记$I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{imx}dx=I_1+iI_2$，设辅助函数$F(z)=R(z)e^{imz}$。取闭路$C=C_R+[-R,R]/\{x_j,j=1,\cdots,l\}+\sum C_{rj}\,,C_R\colon|z|=R,Imz>0,C_{rj}\colon|z-x_j|=r,Imz>0$，当$R$充分大且$r$充分小时，$\int F(z)dz=2\pi i\sum Res[F(z),a_i]$。那么$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{imz}dx=2\pi i\sum Res[R(z)e^{imz},a_i]+\pi i\sum Res[R(z)e^{imz},x_j]$。

6.2.4 杂例

一般来说，辅助函数$F(z)$选择当使$z=x$时，$F(z)=f(x)$或$ReF(z)=f(x)$或$ImF(z)=f(x)$，辅助闭路则要选择添加路径积分可估计或能转化为原积分，还应绕过奇点。

$\int_0^{+\infty}cosx^2dx=\int_0^{+\infty}sinx^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，称为弗雷涅积分，

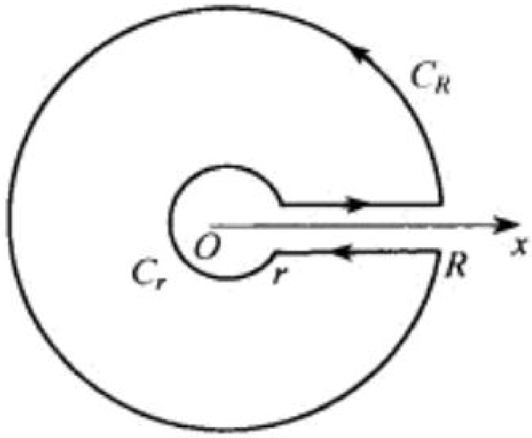
6.2.5 多值函数的积分

计算某些定积分时，辅助函数是多值函数，要分出确定的单值解析分支后进行计算。

形如$\int_0^{\infty}R(x)lnxdx$的积分，其中$R(z)$是一个在正实轴上没有奇点的偶有理函数，分母次数至少比分子高两次。作辅助函数$f(z)=R(z)lnz$，这是一个以 0 和∞为支点的多值函数。选取$C=C_R+[-R,R]/\{0\}+C_r,C_R\colon|z|=R,Imz>0,C_r\colon|z|=r,Imz>0$，这时$f(z)$可在$C$内分出单值解析分支。

形如$\int_0^{\infty}x^pR(x)dx$的积分，其中p不是整数，$R(z)$是一个在正实轴上没有奇点的有理函数，且$\lim\limits_{z\to0}z^{p+1}R(z)=0,\lim\limits_{z\to\infty}z^{p+1}R(z)=0$。作辅助函数$f(z)=z^pR(z)$，

这是一个以 0 和∞为支点的多值函数，取正实轴为支割线，约定上岸$arg\ z=0$，$f(z)$可分出单值解析分支，此时在割痕上岸$f(z)=x^pR(x)$，下岸$f(z)=x^pR(x)e^{i2p\pi}$。选取C如下图。可得，$\int_0^{\infty}x^pR(x)dx=\frac{2\pi i}{1-e^{i2p\pi}}\sum Resz^pR(z)$。



6.3 幅角原理

设a,b分别是函数$f(z)$的 m 级零点和 n 级极点，则a,b都是$\frac{f'(z)}{f(z)}$的一级极点，且$Res\left[\frac{f'(z)}{f(z)},a\right]=m,Res\left[\frac{f'(z)}{f(z)},b\right]=-n$。

设$f(z)$在闭路 C 内可能有有限多个极点，除去这些极点，$f(z)$在 C 内部解析，且在 C 上无零点，则$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$，其中$N,P$为$f(z)$在 C 内部零点和极点的总数（约定 k 级零点或极点算 k 个零点或极点）。

（幅角定理）$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_C argf(z)$。

（儒歇定理）设函数$f(z)$及$\varphi(z)$在闭路 C 及其内部解析，且在 C 上有不等式$|f(z)|>|\varphi(z)|$，则在 C 的内部$f(z)+\varphi(z)$和$f(z)$的零点个数相等。

设多项式$P(z)=\sum a_{n-k}z^k, a_0=1$ 在虚轴上无零点，如果点 z 自上而下沿虚轴从$-\infty$走向$+\infty$点过程中$P(z)$绕远点转了 k 圈，即 $\underset{y(-\infty,+\infty)}{\Delta\arg}P(iy)=2k\pi$，则$P(z)$在左半平面共有$\frac{n+2k}{2}$个零点。

7 解析开拓

7.1 唯一性定理和解析开拓的概念

（唯一性定理）如果区域 D 内的两个解析函数$f(z)$及$g(z)$在一串互不相同的点列$a_1,\cdots,a_k,\cdots$上的值相等，并且这个点列以 D 内某点a为极限，那么这两个函数在 D 内恒等，即$f(z)\equiv g(z), z\in D$。

设$f(z)$及$g(z)$都在区域 D 内解析，且在 D 内某一段曲线上它们的值相同，则这两个函数在 D 内恒等。

复指数函数e^z是复平面上唯一满足下面两条件的函数：（1）在全平面内解析；（2）在实轴上与实指数函数e^x相一致。

设在实数轴上有恒等式$f(z)\equiv g(z)$，$f(z)$及$g(z)$在全平面解析，且在实轴上分别与$f(z)$及$g(z)$相一致，则对一切复数 z，有$f(z)\equiv g(z)$。

设$f(z)$在集合 E 上有定义，D 是一个包含 E 的更大的区域，如果存在 D 内的解析函数$F(z)$，使得$z\in E$时，有$F(z)=f(z)$，则称$F(z)$是$f(z)$在区域 D 的解析开拓。

如果集合 E 中存在有一串互不相同的点列$a_1,\cdots,a_k,\cdots$，其极限点$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\in E$，那么解析开拓是唯一的。

设函数$f_1(z)$在区域D_1内解析，D_2是另一区域，D_1与D_2相交于区域 D。如果存在一个在区域D_2内解析的函数$f_2(z)$，且在 D 内有$f_1(z)=f_2(z)$，则称$f_2(z)$为$f_1(z)$在D_2内的直接解析开拓，反过来$f_1(z)$是$f_2(z)$在D_1内的直接解析开拓。$f_1(z)$和$f_2(z)$互为直接解析开拓。

根据唯一性定理，这样的函数$f_2(z)$被$f_1(z)$完全确定。那么$f(z)=\begin{cases}f_1(z), z\in D_1\\ f_2(z), z\in D_2\end{cases}$是$f_1(z)$在$G=D_1+D_2$内的解析开拓。

7.2 含复参变量积分及Γ函数

设 C 是平面上一条逐段光滑的有限长（封闭或不封闭）曲线，$f(\xi)$是沿 C 确定的一个连续函数，则当 z 不在曲线 C 上时，含复参变量 z 的积分$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$是解析函数，称为柯西型积分，且$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$。

设$f(t,z)$是t,z的连续函数，$a\le t\le b$，z在区域 D 内，且对于任意t，$f(t,z)$在 D 内解析，则$F(z)=\int_a^b f(t,z)dt$是 D 内的解析函数，且$F'(z)=\int_a^b\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt$。

设$f(t,z)$对于$t\ge a$及区域 D 内的所有 z 有定义，对每一点$z\in D$，广义积分$\int_a^{+\infty}f(t,z)dt$收敛，且对任意$\varepsilon>0$，总存在常数$T(\varepsilon)$，当$T_2>T_1>T(\varepsilon)$时，不等式$\left|\int_{T_1}^{T_2}f(t,z)dt\right|<\varepsilon$对所有$z\in D$都成立，则称广义积分在 D 内一致收敛。

如果存在实函数$\varphi(t)$，使对所有$z\in D$有$|f(t,z)|\le\varphi(t)$，而且$\int_a^{+\infty}\varphi(t)dt$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(t,z)dt$在 D 内绝对一致收敛。

设$f(t,z)$是t,z的连续函数，$t\ge a$，z 在区域 D 内，且对任何$t\ge a$，$f(t,z)$在 D 内解析，$\int_a^{+\infty}f(t,z)dt$在 D 内一致收敛，则函数$F(z)=\int_a^{+\infty}f(t,z)dt$在 D 内解析，且$F'(z)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt$。

上述无穷积分规律都适用于含复参变量的第二类广义积分。

复Γ函数$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$是右半平面的解析函数。利用$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), Re\,z>0$ 及解析开拓，在全平面除了$z=0,\cdots,-n,\cdots$是一级极点外，$\Gamma(z)$处处解析，且$Res[\Gamma(z),-n]=(-1)^n\frac{1}{n!}$。

在有限平面除极点外别无其他奇点的函数称为亚纯函数。$\Gamma(z),tan\,z,ctg\,z$等都是亚纯函数。

$\Gamma(z)$有性质：（1）余元公式：$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{sin\,\pi z}$。（2）加倍公式：$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}),z\ne 0,-\frac{1}{2},-1,\cdots$。（3）$\Gamma(z)$无零点。（4）$\frac{1}{\Gamma(z)}$是整函数。（5）$\int_0^1\frac{t^{\xi-1}(1-t)^{\eta-1}}{(a+bt)^{\xi+\eta}}dt=\frac{B(\xi,\eta)}{(a+b)^{\xi}a\eta},Re\,\xi>0,Re\,\eta>0$。

8 保形变换及其应用

8.1 导数的几何意义

设$w=f(z)$在区域 D 内解析，而$z_0 \in D$，且$f'(z_0) \neq 0$。在 D 内任作一条过点z_0的有向简单光滑曲线 C：$z=z(t)=x(t)+iy(t), a \leq t \leq b$，且设$z'(t) \neq 0$。记$z(t_0)=z_0$，$a \leq t_0 \leq b$,。于是曲线 C 在$z_0$点切向量是$z'(t_0)=x'(t_0)+iy'(t_0)$，它与实轴的夹角为$arg\ z'(t_0)$。

函数$w=f(z)$把曲线 C 变为过$w_0=f(z_0)$点的简单曲线C_1：$w=f(z(t)), a \leq t \leq b$，因为$w'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0) \neq 0$，故曲线$C_1$在$w_0$点也有切线，此切线与$w$平面上实轴夹角$arg\ w'(t_0)=arg\ f'(z_0)+arg\ z'(t_0)$。如果将 z 平面和 w 平面重叠，使$z_0$和$w_0$重合，实轴平行，那么两曲线切线夹角为$arg\ f'(z_0)$，称为变换$w=f(z)$在$z_0$的旋转角。

如果函数$w=f(z)$在区域 D 内解析，设$z_0 \in D$，且$f'(z_0) \neq 0$，则变换$w=f(z)$在z_0具有保角性，即在变换$w=f(z)$下，通过z_0的任意两条曲线的交角不变。

由于$|\Delta z|$和$|\Delta w|$分别是向量Δz和Δw的长度，故$|f'(z_0)|=\lim\limits_{z \to z_0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$可以看成曲线 C 受到变换后在$z_0$的伸张系数。

变换$w=f(z)$把z_0附近一个不太大的几何图形变成了和原来大致一样的图样。

8.2 保形变换的概念

设$f(z)$是区域 D 内的单叶函数，则在 D 内的任一点 z，$f'(z) \neq 0$。

区域 D 的单叶函数所确定的变换，称为 D 内的保形变换。

设变换$T_1: v=f(z)$把 z 平面的点 L 变成 v 平面的点集 M，变换$T_2: w=g(v)$又把点集 M 变成 w 平面的点集 N，则复合函数$w=g(f(z))$相当于新变换，把 L 变为 N，记为T_2T_1。显然，保形变换的乘积仍是保形变换。

设变换$T: w=f(z)$把集合 M 双方单值地变换为集合 N，其反函数$z=f^{-1}(w)$确定一个从集合 N 到集合 M 的变换，称为 T 的逆变换，记作T^{-1}。显然，保形变换的逆变换也是保形变换。

（黎曼定理）如果 D 是闭复平面上一个边界至少包含有两个点的单连通区域，则必存在单叶函数$w=f(z)$把 D 变为单位圆内部D_1。如果还有条件$w_0=f(z_0), arg\, f'(z_0)=\alpha_0$，则这个变换是唯一的。

8.3 分式线性变换

由函数$w=\frac{az+b}{cz+d}$所确定的变换称为分式线性变换 M，这里a,b,c,d是复常数，且$ad-bc\neq 0$。后者是必须的，否则$w\equiv\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$。当$c=0$，M 变成变换$L: w=\alpha z+\beta$，称为整线性变换。

对分式线性变换规定$w(\infty)=a/c, w(-d/c)=\infty$。M 的逆变换也是线性变换$M^{-1}: z=\frac{dw-b}{-cw+a}$，且$z(c/a)=\infty, z(\infty)=-d/c$。这样，M 就是一个把闭 z 平面变成闭 w 平面的双方单值变换。

当$z\neq -d/c$及∞时，有$w'=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$，因而分式线性函数是除去$-d/c$及$\infty$的闭复平面内的单叶函数。

如果$t=\frac{1}{f(z)}$或$t=\frac{1}{f(1/\xi)}$把$z=z_0$或$\xi=0$ 的一个邻域保形映照成$t=0$ 的一个邻域，则称$w=f(z)$把$z=z_0$或$z=\infty$的一个邻域保形映照成$w=\infty$的一个邻域。

任意一个分式线性函数$w=\frac{az+b}{cz+d}, ad-bc\neq 0$ 给出一个由闭 z 平面到闭 w 平面的双方单值的保形变换。

特殊情形有：（1）平移变换：$T: w=z+b$。（2）旋转变换：$R: w=e^{i\theta}z$。（3）相似变换：$S: w=rz, r>0$。（4）倒数变换：$I: w=\frac{1}{z}$。

任何一个分式线性变换都可以表述为上述四类变换的乘积，当$c=0, w=$

$\left|\frac{a}{d}\right| e^{iarg\frac{a}{d}}\left(z+\frac{b}{a}\right)$，当$c \neq 0, w=\left|\frac{bc-ad}{c^2}\right| e^{iarg\frac{bc-ad}{c^2}} \frac{1}{z+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}$。

分式线性变换把圆周（直线）变为圆周（直线）。

设已给圆周 C: $|z-z_0|=\mathrm{R}, 0<\mathrm{R}<+\infty$，如果两个有限点$z_1$及$z_2$在自$z_0$点出发的同一条射线上，且$|z_1-z_0| \cdot |z_2-z_0|=\mathrm{R}^2$，则称$z_1$及$z_2$关于圆周 C 对称。规定$z_0$及$\infty$关于 C 对称。

两点z_1及z_2关于圆周 C 对称的充要条件是：过z_1及z_2的任意圆与 C 直交。

分式线性变换把对某一圆周为对称的点变为对这个圆周的像圆周对称的点。

任给 z 平面上三个不同点z_1, z_2, z_3和 w 平面上三个不同点w_1, w_2, w_3，存在唯一一个分式线性变换，把z_1, z_2, z_3分别变为w_1, w_2, w_3。

设$w=w(z)$是一分式线性变换，且$w(z_1)=w_1$，$w(z_2)=w_2$，则此分式线性变换可表为$\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}, k$为任意复常数。

8.4 初等函数的映照

初等函数（初等多值函数取确定的单叶解析分支）在其单叶性区域内都是保形变换。

8.4.1 变换$w=z^n$和$w=\sqrt[n]{z}, n \geq 2$ 是自然数

$w=z^n$把任何一个以原点为顶点的角域$\alpha<arg\, z<\beta, \beta-\alpha \leq 2\pi/n$保形映照成$w$平面以原点为顶点的角域$n\alpha<arg\, w<n\beta$。特别地，它把角域 $0<arg\, z<\pi/n$保形映照成上半w平面，把 $0<arg\, z<2\pi/n$保形映照成去掉正实轴的w平面。

$w=\sqrt[n]{z}$是$w=z^n$的反函数，取正实轴为支割线，在沿正实轴割开了的z平面 D 内可以分出 n 个单值解析分支$w_k=\sqrt[n]{r} exp(i\frac{\varphi+2k\pi}{n}), k=0,\cdots,n-1, z=re^{i\varphi}, 0<\varphi<2\pi$，这些分支可以用来作区域的保形变换，他们分别把 D 内的角

域 $(0\le)\alpha<arg\,z<\beta(\le 2\pi)$ 变成角域 $(\frac{2k\pi}{n}\le)\frac{\alpha+2k\pi}{n}<arg\,w<\frac{\beta+2k\pi}{n}(\le\frac{2(k+1)\pi}{n}),k=0,\cdots,n-1$。作具体区域的保形变换时，常用第零支，表示为$w=\sqrt[n]{z},w(1)=1$，特别地，若取正实轴为支割线，分支$w=\sqrt[n]{z},\sqrt{1}=1$ 把区域 D 保形地映照成上半w平面$Im\,w>0$。

对于分式幂函数$w=z^{n/m},n/m$是既约分数，它是一个m值函数。设ω是实数，满足 $0<\omega,\frac{n}{m}\omega<2\pi$，取正实轴为支割线，它的一支$w=r^{\frac{n}{m}}e^{i\frac{n}{m}\varphi},z=re^{i\varphi},0<\varphi<\omega,w(1)=1$ 把角域 $0<arg\,z<\omega$变成角域 $0<arg\,w<\frac{n}{m}\omega$。

8.4.2 变换$w=e^z$和$w=Ln\,z$

$w=e^z$把条形域$a<Im\,z<b,b-a\le 2\pi$保形映照成角域$a<arg\,w<b$。特别地，条形域 $0<Im\,z<\pi$被保形映照成上半w平面。

$w=Ln\,z$是$w=e^z$的反函数，取正实轴为支割线，在沿正实轴割开了的 z 平面 D 内可以分出它的无穷多个单值解析分支$(Ln\,z)_n=ln|z|+i\theta+2n\pi i,n=0,\pm 1,\cdots,0<\theta<2\pi$。每个分支都可用作保形变换，他们分别把顶点在原点的角域$a<arg\,w<b,b-a\le 2\pi$保形地变换成条形域 $2n\pi+a<Im\,w<2n\pi+b$。常用$n=0$ 的一支，$ln\,z=ln|z|+i\theta$。

8.4.3 儒可夫斯基变换

变换$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$称为儒可夫斯基变换。除$z=0$ 它在全平面处处解析。区域 D 是它的单叶性区域的充要条件是 D 中不含有互为倒数的点。

令$z=re^{i\theta}$，那么$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$将圆周$|z|=r,r<1$ 变成椭圆周E_r:$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1$，其两个半轴长$a_r=\frac{1}{2}\left|r+\frac{1}{r}\right|,b_r=\frac{1}{2}\left|r-\frac{1}{r}\right|$，两焦点为$w=\pm 1$。当$r\to 0$时，$a_r,b_r\to\infty$，而$a_r-b_r=r\to 0$，椭圆$E_r$逐渐变大且越来越圆。当$r\to 1-0$

时，$a_r \to 1$，$b_r \to 0$，椭圆逐渐变扁且无限地向u轴上线段$[-1,1]$压缩。由此，儒可夫斯基变换把单位圆内部 D 单叶地变为w平面上除去实轴上一线段$[-1,1]$的区域D_1，并且把上（或下）半单位圆的内部保形变换为下（或上）半w平面。

另一方面，$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$将单位圆内一段射线$z = re^{i\varphi}$，$0 \le r < 1$ 被变成w平面上双曲线H_φ:$\frac{u^2}{cos^2\varphi} - \frac{v^2}{sin^2\varphi} = 1$ 的四分之一，H_φ也以± 1 为焦点。特别地，当上述射线段位于第一象限（$0 < \varphi < \pi/2$）时，它对应于H_φ在第四象限的四分之一支。整个双曲线（不包括与线段$[-1,1]$交点）则是由四条射线段$z = re^{i\varphi}, z = re^{i(\pi-\varphi)}, z = re^{i(\varphi-\pi)}, z = re^{-i\varphi}, 0 \le r < 1, 0 < \varphi < \pi/2$ 变换。由保形性可知椭圆族E_r和双曲线族H_φ构成正交曲线网。

儒可夫斯基函数的反函数$z = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$是一个双值函数，有两个支点$w = \pm 1$。取支割线$[-1,1]$，可以分出两个解析分支。其中一支$z = w - \sqrt{w^2 - 1}, z(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$ 把w平面上除去轴上一线段$[-1,1]$的区域D_1保形地变成单位圆内部 D。

如果先用变换$z = 1/\xi$把单位圆外部$|z| > 1$ 变成ξ平面的单位圆内部$|\xi| < 1$，再作变换$w = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)$就知道，儒可夫斯基变换$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$把$|z| > 1$ 变成上述区域D_1。反函数的另一支$z = w + \sqrt{w^2 - 1}, z(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 1$ 把D_1变成$|z| > 1$。

因对不同圆周作儒可夫斯基变换，能生成各种形状的儒可夫斯基机翼，故又称机翼剖面函数。可以通过选择适当的圆周，将修正为$w = z + \frac{a}{z} + \cdots$用来制造满足某些工程技术需要的机翼。

8.5 许瓦兹-克利斯托菲变换

如果函数$w = f(z)$作出一个把上半平面$Im\, z > 0$ 变成有界多边形内保形变换，此多边形在顶点A_k处内角为$\beta_k\pi, 0 < \beta_k < 2$，$k = 1, \cdots, n$，$\sum \beta_k = n - 2$，且

实轴上对应于这多边形顶点的点$a_k, -\infty < a_1 < \cdots < a_n < +\infty$已知，那么$f(z) = C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\beta_1 - 1}\cdots(z-a_n)^{\beta_n - 1}dz + B$，$z_0(Im\, z_0 \ge 0)$是任意选定的点，$B, C$是复常数，积分号下多值函数取主值。这个变换称为许瓦兹-克利斯托菲变换，简称许-克变换。

（1）多边形有一个顶点是∞点的像。若某个点$a_k = \infty$，许-克公式中它的因子可以去掉。

（2）对于有一个或几个顶点在无穷远处的“开口”多边形，只要把顶点在无穷远的那两条直线之间的交角规定为在有限点交角乘以-1,，则许-克公式仍然成立。

8.6 平面场

我们称某个物理场是稳定的，意思是，这个场中所有的量都只是空间坐标的函数而不依赖于时间变量。平面向量场$\boldsymbol{E}$则是指一种特殊的空间向量场，在这个场中所有的向量都平行于某一固定的平面 S，且在任一垂直于 S 的直线l上的所有点处，场向量相等。即在所有平行于 S 的平面上，场向量的分布完全相同。选定 S 平面作 x-y 平面，采用复数记号，那么场$\boldsymbol{E}$中向量表示为$E = E_x(x,y) + iE_y(x,y)$。

设在复平面上单连通区域 G 内存在平面场$w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，如果$u(x,y)$及$v(x,y)$在 G 内有连续偏导数，则对 G 内任一简单闭曲线 C，由格林公式，有$\int \overline{w}dz = \Gamma + iQ$，$\Gamma$是场$w(z)$沿 C 的环量，$Q$是场$w(z)$通过 C 的通量。

若$w(z)$是无源无旋场，即有$\nabla w(z) = 0, \nabla \times w(z) = 0$，于是$\Gamma = 0, Q = 0, \int \overline{w}dz = 0$，且$\overline{w}$是 G 内解析函数。

考虑函数$f(z) = \int_{z_0}^{z}\overline{w}dz + C_1 + iC_2$，其中$C_1, C_2$是实常数，因 G 是单连通的，$f(z)$是 G 内的单值解析函数。它的实部和虚部分别为$\varphi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} udx +$

$vdy+C_1, \psi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -ydx+udy+C_2$，这是 G 内一对共轭调和函数。两族等值线$\varphi(x,y)=C'_1, \psi(x,y)=C'_2$构成正交曲线网。

$f(z)$与场向量$w(z)$有微分关系$\overline{f'(z)}=w(z)$，如果给定一个无源无旋的平面场，就可以确定一个单值的解析函数$f(z)$，反之，在 G 内给定一个单值解析函数$f(z)$，也可以确定一个平面场$w(z)$。

对于无源无旋的稳定平面流场，$w(z)=\boldsymbol{V}=u+iv$表示场的速度向量。$f(z)$称为场的复势（复位），φ称为势函数或速度位，ψ称为流函数。等值线$\varphi(x,y)=C'_1, \psi(x,y)=C'_2$分别称为等位线和流线。在流线上任一点切向与速度场在这一点的速度方向一致，即流线就是流体质点的实际流动曲线。

对于稳定平面静电场，$w(z)=\boldsymbol{E}=u+iv$表示场强方向。$\nabla\boldsymbol{E}=4\pi\rho$，且$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，即当 G 中无电荷时，静电场是无源无旋场。依习惯将$\varphi_1=-\varphi$称为静电场的位函数，等值线$\varphi_1=C'_1$称为等位线，$\nabla\varphi_1=-\boldsymbol{E}$。$\psi$称为静电场的力函数，等值线$\psi(x,y)=C'_2$称为电力线，切向与场强方向一致。函数$\Phi(z)=-if(z)=\psi+i\varphi_1$称为静电场的复势（位），$\overline{i\Phi'}=\boldsymbol{E}$，因此要确定一个静电场只要求出它的复势就可以。

如果 G 是多连通域，$f(z)$依赖于积分路线，可能是多值函数。

描述无散无旋的稳定二维场$\boldsymbol{A}$的场函数是一个调和函数。稳定平面场的基本问题是：已知区域 D 的边界 C 上的场分布，确定区域 D 的场分布，即求解拉普拉斯方程的边值问题I:$\begin{cases}\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0, z\in D\\ u|_C=u(\zeta), \zeta\in C\end{cases}$，这里$u(\zeta)$是已知给定在 C 上的除有限多个间断点外的连续函数。

先求一个保形变换$z_1(z)=x_1(x,y)+iy_1(x,y)$把区域 D 化成最简单的区域 G：$|z_1|<1$，这样就把求 D 内场分布问题转化为求 G 内场分布问题。可以证明

$U(z_1)=u[z(z_1)]$是 G 内调和函数。这样问题转化为II:$\begin{cases}\Delta U=0, z_1\in G\\ U|_{C_1}=U(\zeta_1),\zeta_1\in C_1\end{cases}$，它的解可用泊松公式表示。

对于上半平面的狄氏问题III:$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, y>0,-\infty<x<+\infty\\ u|_{y=0}=f(x),-\infty<x<+\infty\end{cases}$，其中$f(x)$是给定在实轴上的有有限多个第一类间断点的连续函数，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在且为有限值。作一个把上半平面$Im\,z>0$ 映到圆$|w|<1$ 内，并且把上半平面内任意（固定）点$z_0(x_0,y_0),y_0>0$ 变成$w=0$ 的保形映照 $\mathrm{w}=\frac{\mathrm{z}-z_0}{\mathrm{z}-\overline{z_0}}$，它的反函数是$z(w)=\frac{w\overline{z_0}-z_0}{w-1}$，于是$U(w)=u[z(w)]$是单位圆内的调和函数，并且$U(0)=u(z_0)$，实数轴上函数$f(x)$变成单位圆周$|w|=1$ 的函数$g(\varphi)=f(x)=f[z(e^{i\varphi})],0\le\varphi\le2\pi$，由调和函数的中值公式，由$U(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)d\varphi$，那么$u(z_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y_0f(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}dx$，即$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(t)}{(t-x)^2+y^2}dt$。

9 拉氏变换

9.1 拉氏变换的定义

当$f(x)$在实轴上任何有限区间内逐段光滑，并且在$(-\infty,\infty)$上绝对可积时，它的傅氏变换是$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-is\xi}d\xi$，其反变换是$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(s)e^{isx}ds$。

记$h(t)=\begin{cases}1,t\ge0\\0,t<0\end{cases}$，它叫做单位函数。

设$f(t)$是实变量t的实函数或复函数，当$t<0$ 时，$f(t)=0$。如果含复参变数p的积分在p的某个区域内收敛，则由此积分确定的函数$F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$称为函数$f(t)$的拉普拉斯变换（简称拉氏变换）或像函数。简记为$F(p)=L[f(t)]$。$f(t)$称为$F(p)$的拉氏反变换或本函数，记为$f(t)=L^{-1}[F(p)]$。

$f(t)$的拉氏变换就是函数$f(t)h(t)e^{-\sigma t}$的傅氏变换。

为使积分存在，通常对本函数加上两个条件：（1）设$f(t)$在t轴上的任何有限区间上逐段光滑。（2）$f(t)$是指数增长型的，即存在两个常数$K>0$，$c\ge0$，使

得对所有的$t \geq 0$，有$|f(t)| \leq Ke^{ct}$，c称为$f(t)$的指数增长。

若$f(t)$满足条件（1）（2），那么像函数$F(p)$在半平面$Re\,p > c$上有意义，且是一个解析函数。

设p趋于无穷远，且$Re\,p$无限增大，则像函数$F(p)$趋于 0，即$\lim\limits_{\sigma \to \infty} F(p) = 0$。当$p$在角域$|arg\,p| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$内趋于无穷时，$F(p) \to 0$。

$L[e^{at}] = \frac{1}{p-a}, L[t^a] = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}, Re\,a >-1, L[h(t)] = \frac{1}{p}, L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, L[\sqrt{t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p^3}}$, $L[\frac{1}{\sqrt{t}}] = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$。

9.2 拉氏变换的基本性质

9.2.1 线性关系

设$f(t)$和$g(t)$都可以作拉氏变换，则对任意两个常数α, β有$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)]$。若记$L[f(t)] = F(p)$，$L[g(t)] = G(p)$，那么$L^{-1}[\alpha F(p) + \beta G(p)] = \alpha L^{-1}[F(p)] + \beta L^{-1}[G(p)]$，即逆变换$L^{-1}$也是线性的。

9.2.2 相似定理

设$L[f(t)] = F(p)$，则对任一常数$\alpha > 0$，有$L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha}), Re\,p > \alpha c$。

9.2.3 本函数的微分法

如果$f(t)$和$f'(t)$都满足条件（1）（2），且设$L[f(t)] = F(p)$，那么$L[f'(t)] = pF(p) - f(+0)$。

若$f(t), f'(t), \cdots, f^{(n)}(t)$都满足条件（1）（2），则$L[f^{(n)}(t)] = p^n L[f(t)] - p^{n-1} f(+0) - \cdots - f^{(n-1)}(+0)$。

9.2.4 本函数的积分法

设$L[f(t)] = F(p)$，则$L[\int_0^t f(t)dt] = \frac{F(p)}{p}$。

9.2.5 像函数的微分法

若$f(t)$满足条件（1）（2），则$F'(p) = L[-tf(t)]$，更一般地，$F^{(n)}(p) = L[(-t)^n f(t)]$。

9.2.6 像函数的积分法

若$f(t)$满足条件（1）（2），其像函数$F(p)$的积分$\int_p^\infty F(p)dp$收敛，且当$t \to 0$时，$|f(t)/t|$有界，则$L[f(t)/t] = \int_p^\infty F(p)dp$。

如果积分$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$存在，则有$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(p)dp.$

9.2.7 延迟定理

对于函数$f(t-\tau) = f(t-\tau)h(t-\tau)$，设$L[f(t)] = F(p)$，则$L[f(t-\tau)] = e^{-p\tau}F(p)$。

9.2.8 位移定理

设$L[f(t)] = F(p)$，则对任意复常数λ，有$L[e^{\lambda t}f(t)] = F(p-\lambda)$。

9.2.9 周期函数的像函数

设$f(t)$是$[0,+\infty)$内以T为周期的函数，且$f(t)$在一周期内逐段光滑，则$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt$。

9.2.10 卷积定理

如果已知函数$f(x)$和$g(x)$，则含参变量积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$称为函数$f(x)$和$g(x)$的卷积，记为$f*g$。

卷积满足运算法则：（1）交换律：$f*g = g*f$。（2）结合律：$f*(g*h) = (f*g)*h$。（3）分配律：$f*(g+h) = f*g+f*h$。

设$f_1(t)$和$f_2(t)$都满足条件（1）（2），那么f_1*f_2也满足条件（1）（2），且$f_1*f_2 = \begin{cases} 0, t \le 0 \\ \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau \end{cases}$。

$$(f_1 * f_2)h(t)e^{-\sigma t} = [f_1(t)h(t)e^{-\sigma t}] * [f_2(t)h(t)e^{-\sigma t}]$$

卷积定理：设$f_1(t)$和$f_2(t)$都满足条件（1）（2），则$L[f_1 * f_2] = L[f_1] \cdot L[f_2]$。

用$F[]$表示傅氏变换，那么$F[f * g] = F[f] \cdot F[g]$，$F[f(t)] = F[f(t)h(t)e^{-\sigma t}]$。

9.3 由像函数求本函数

9.3.1 部分分式法

对于有理真分式函数$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$，它一定存在本函数。

设$a_k, k = 1,2,\cdots,n$是多项式$B(p)$的m_k级零点，那么$\frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m_k}\frac{A_{ks}}{(p-a_k)^s}$，那么$L^{-1}[\frac{A(p)}{B(p)}] = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m_k}A_{ks}\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{a_k t}$。

9.3.2 拉氏变换的反演公式

设$f(t)$满足条件（1）（2），$L[f(t)] = F(p)$。则对任意取定的$\sigma > c$，在$f(t)$的连续点处，有$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}dp$。该公式称为傅里叶-梅林公式。

设$F(p)$除在半平面$Re\, p \le \sigma$内有奇点$p_1,\cdots,p_n$外，在p平面内处处解析，当$p \to \infty$时，$F(p) \to 0$，且积分$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)dp\,,\sigma > c$绝对收敛，则（1）$F(p)$是函数$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}dp$的像函数；（2）$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}dp = \sum_{k=1}^{n}Res[F(p)e^{pt}, p_k]$，即$f(t) = \sum_{k=1}^{n}Res[F(p)e^{pt}, p_k]\,, t > 0$。

若$L[f(t)] = F(p)$，则$L^{-1}[F(p)e^{-p\tau}] = f(t-\tau)h(t-\tau)$。

9.3.3 其他方法

若$F(p)$在∞点解析，且在∞点的邻域有罗朗展开式$F(p) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{c_k}{p^k}$，那么本函数$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}t^{k-1}$，这个级数的收敛半径为$+\infty$，$|f(t)| \le Ke^{ct}, t \ge 0$。

它的逆定理，即若$f(t)$在整个数轴上的可展开成幂级数，且$|f(t)| \le Ke^{ct}, t \ge 0$，那么他的像函数$F(p) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{c_k}{p^k}$。

附表 1 基本法则表

	$f(t)$	$F(p)$
1	$f(t)$	$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$
2	$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha F(p)+\beta G(p)$
3	$f'(t)$	$pF(p)-f(+0)$
4	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p)-p^{n-1}f(+0)-p^{(n-2)}f'(+0)-\cdots-f^{(n-1)}(+0)$
5	$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
6	$\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^{\tau} f(\lambda)\mathrm{d}\lambda$	$\frac{F(p)}{p^2}$
7	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \equiv f * g$	$F(p)G(p)$
8	$tf(t)$	$-F'(p)$
9	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
10	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_p^{\infty} F(p)\mathrm{d}p$
11	$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$
12	$f(t-\tau)$，$t<\tau$ 时 $f(t)=0$，$\tau>0$	$e^{-\tau p}F(p)$
13	$\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$ $a>0$	$F(ap)$
14	$\frac{1}{a}e^{\frac{bt}{a}}f\left(\frac{t}{a}\right)$ $a>0$	$F(ap-b)$
15	$f(t)$，周期 T $f(t+T)=f(t)$	$\int_0^T e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t/(1-e^{-Tp})$
16	$f(t)$，$f(t+T)=-f(t)$	$\int_0^T e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t/(1+e^{-Tp})$

附表 2 拉普拉斯变换表

	$F(p)$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{1}{p^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$, $n = 0,1,2,\cdots$
3	$\frac{1}{p^{\alpha+1}}$	$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$, $\alpha > -1$
4	$\frac{1}{p-\lambda}$	$e^{\lambda t}$
5	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
6	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
7	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$\sinh\omega t$
8	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	$\cosh\omega t$
9	$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$	$e^{-\lambda t}\sin\omega t$
10	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$	$e^{-\lambda t}\cos\omega t$
11	$\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega}\sin\omega t$
12	$\frac{\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$
13	$\frac{1}{p^3+\omega^3}$	$\frac{1}{3\omega^2}\left[e^{-\omega t} + e^{\frac{1}{2}\omega t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right)\right]$
14	$\frac{p}{p^3+\omega^3}$	$\frac{1}{3\omega}\left[-e^{-\omega t} + e^{\frac{1}{2}\omega t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right)\right]$
15	$\frac{p^2}{p^3+\omega^3}$	$\frac{1}{3}\left(e^{-\omega t} + 2e^{\frac{1}{2}\omega t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega t\right)$
16	$\frac{1}{p^4+4\omega^4}$	$\frac{1}{3\omega^3}(\sin\omega t\cosh\omega t - \cos\omega t\sinh\omega t)$
17	$\frac{p}{p^4+4\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^2}\sin\omega t\sinh\omega t$
18	$\frac{p^2}{p^4+4\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t\cosh\omega t + \cos\omega t\sinh\omega t)$
19	$\frac{p^3}{p^4+4\omega^4}$	$\cos\omega t\cosh\omega t$
20	$\frac{1}{p^4-\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\sinh\omega t - \sin\omega t)$
21	$\frac{p}{p^4-\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega^2}(\cosh\omega t - \cos\omega t)$
22	$\frac{p^2}{p^4-\omega^4}$	$\frac{1}{2\omega}(\sinh\omega t + \sin\omega t)$

	$F(p)$	$f(t)$
23	$\dfrac{p^3}{p^4-\omega^4}$	$\dfrac{1}{2}(\sinh\omega t+\cos\omega t)$
24	$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}, a\neq b$	$\dfrac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$
25	$\dfrac{p}{(p-a)(p-b)}, a\neq b$	$\dfrac{1}{a-b}(ae^{at}-be^{bt})$
26	$\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{p-1}{p}\right)^n$	$L_n(t)\equiv\dfrac{e^t}{n!}\dfrac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$
27	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\coth\dfrac{p\pi}{2\omega}$	$\lvert\sin\omega t\rvert$
28	$\dfrac{p}{(p-a)^{3/2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
29	$\sqrt{p-a}-\sqrt{p-b}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$
30	$\dfrac{1}{(p+\lambda)^{\nu+1}}$	$\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}e^{-\lambda t}t^{\nu}, \nu>-1$
31	1	$\delta(t)^*$
32	e^{-ap}	$\delta(t-a)$
33	p	$\delta'(t)\equiv\lim\limits_{\varepsilon\to0}\dfrac{\delta(t)-\delta(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$（偶极子）
34	pe^{-ap}	$\delta'(t-a)$
35	$e^{-a\sqrt{p}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^2}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$
36	$\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$
37	$\dfrac{1}{\sqrt{p+a}}$	$\dfrac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$
38	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{a^2}{p}}\operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{\sqrt{p}}\right)^*$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{p}}$
39	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{p^2}{4a^2}}\operatorname{erf}\left(\dfrac{p}{2a}\right)$	$e^{-a^2/2}$
40	$\dfrac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi a}}\sin 2\sqrt{at}$

	$F(p)$	$f(t)$
41	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$
42	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{1}{2t}$
43	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\frac{1}{2t}$
44	$\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+\omega^2}-p}{p^2+\omega^2}}$	$\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\cos\omega t$
45	$\sqrt{\frac{\sqrt{p^2+\omega^2}+p}{p^2+\omega^2}}$	$\sqrt{\frac{1}{\omega t}}\cos\omega t$
46	$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}(\sqrt{p^2+a^2}+p)^\nu}$	$\frac{1}{a^\nu}J_\nu(at)^\cdot, \nu>0$
47	$\frac{1}{\sqrt{p^2-a^2}(\sqrt{p^2+a^2}+p)^\nu}$	$\frac{1}{a^\nu}I_\nu(at)^\cdot, \nu>0$
48	$\frac{1}{\nu a^\nu}(\sqrt{p^2+a^2}-p)^\nu$	$\frac{I_\nu(at)}{t}, \nu>0$
49	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(p^2+1)^{\nu+1/2}}$	$t^\nu J_\nu(t), \nu>-\frac{1}{2}$
50	$\frac{1}{p^{\nu+1}}e^{-1/p}$	$t^{\nu/2}J_\nu(2\sqrt{t}), \nu>-1$
51	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}e^{-1/2p}I_n\left(\frac{1}{2p}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{t}}J_{2n}(2\sqrt{t})$
52	$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}e^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}$	$J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})h(t-\tau)$
53	$\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}$	$\operatorname{erf}(\sqrt{at})$
54	$\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}$	$\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
55	$\frac{1}{p+\sqrt{p}}$	$e^t\operatorname{erf}(\sqrt{t})$
56	$\frac{1}{1+\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-e^t\operatorname{erf}(\sqrt{t})$

	$F(p)$	$f(t)$
57	$\frac{\sqrt{p+a}}{p}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-at} + \sqrt{a}\,\mathrm{erf}(\sqrt{at})$
58	$\frac{1}{p}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\arctan p}{p}\right]$	$\mathrm{Si}\,t^{*}$
59	$\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	$\mathrm{Ci}\,t^{*}$
60	$\frac{1}{p}\ln(1+p)$	$-\mathrm{Ei}(-t)^{*}$
61	$\frac{1}{p}\ln(p+\sqrt{1+p^2})$	$\int_t^{\infty}\frac{J_0(t)}{t}\mathrm{d}t$
62	$\ln\frac{p-a}{p-b}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$