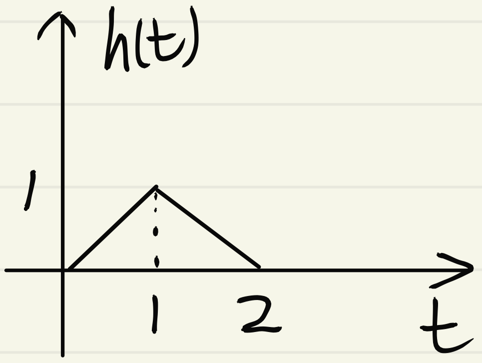
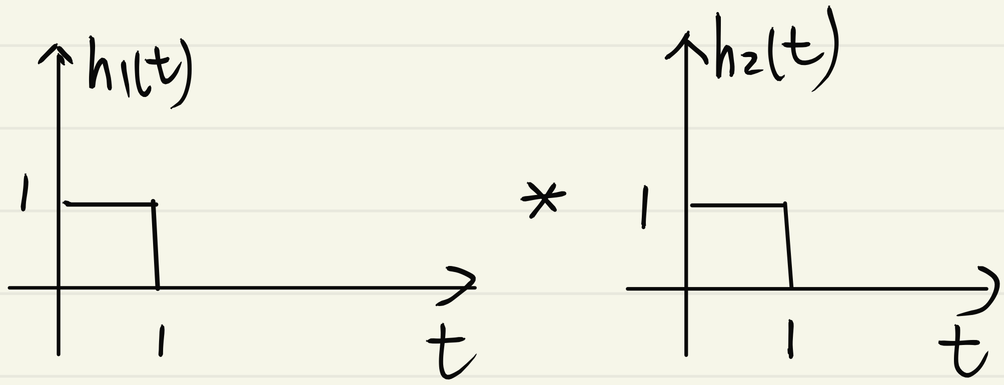
推广:

$$x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega) X_2(\omega)$$



$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$



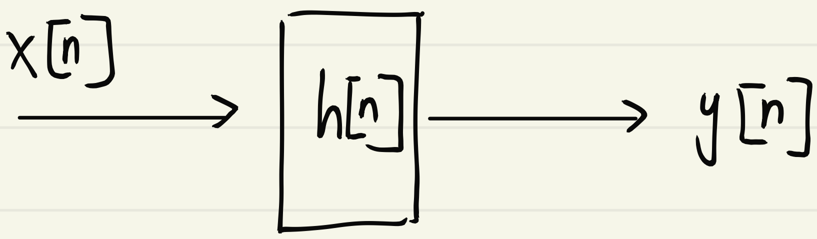
$$h_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_0^1 1\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt = \frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega} = e^{-\frac{j\omega}{2}} \frac{2j\sin\frac{\omega}{2}}{j\omega}$$

$$= e^{-\frac{j\omega}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}$$

$$= e^{-\frac{j\omega}{2}}\cdot Sa\frac{\omega}{2}$$

$$H(\omega) = H_1(\omega)\cdot H_2(\omega)$$

$$= e^{-j\omega}\cdot Sa^2\frac{\omega}{2}$$



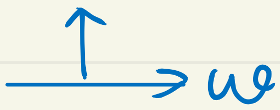
① 非周期 $x[n] \xrightarrow{DTFT} \tilde{X}(\Omega)$, $h[n] \longrightarrow H(\Omega)$ $\quad \tilde{X}(\Omega)H(\Omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y[n]$

② 周期 $\tilde{x}[n] \xrightarrow{DFS} \tilde{X}_k \qquad h[n] \xrightarrow{DTFT} H(\Omega)$

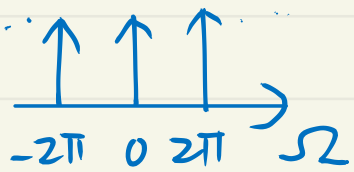
$$\tilde{x}[n] = \sum_{k\in\langle N\rangle} \tilde{X}_k e^{jk\Omega_0 n} \xrightarrow{LTI} \tilde{y}[n] = \sum_{k\in\langle N\rangle} \tilde{X}_k H(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}$$

§5.5 周期信号和奇异函数的傅里叶变换

例：求 $\delta(\omega)$ 和 $\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi l)$ 对应的时域函数/序列



$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)\cdot e^{j\omega t}\cdot d\omega=\frac{1}{2\pi}$$



$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}\tilde{\delta}(\Omega)\,e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega)\,e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{1}{2\pi}\xrightarrow{\mathcal{F}}\delta(\omega)\Rightarrow 1\xrightarrow[CFT]{\mathcal{F}}2\pi\delta(\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi}\xrightarrow[DTFT]{\mathcal{F}}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-2\pi l)\Rightarrow 1\xrightarrow{DTFT}2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi l)$$

在频域上引入冲激后，原来不满足狄利赫里条件的函数/序列也有了$\mathcal{F}$

例2. 求 $\delta(\omega-\omega_0)$ 和 $\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi l)$ 对应的时域函数/序列

$$\delta(\omega-\omega_0)\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)\,e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi l)\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}\delta(\Omega-\Omega_0)\,e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-\Omega_0)\,e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}e^{j\Omega_0 n}$$

$$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{CFT} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$e^{j\Omega_0 n} \xrightarrow{DTFT} 2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi l)$$

对于一般 $\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{CFT} \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_k e^{jk\omega_0 t}\right\}$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_k\,\mathcal{F}\{e^{jk\omega_0 t}\}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_k\,2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_k\,\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k\in\langle N\rangle}\tilde{X}_k e^{jk\Omega_0 n} \xrightarrow{DTFT} \mathcal{F}\left\{\sum_{k\in\langle N\rangle}\tilde{X}_k e^{jk\Omega_0 n}\right\}=\sum_{k\in\langle N\rangle}\tilde{X}_k\cdot\mathcal{F}\{e^{jk\Omega_0 n}\}$$

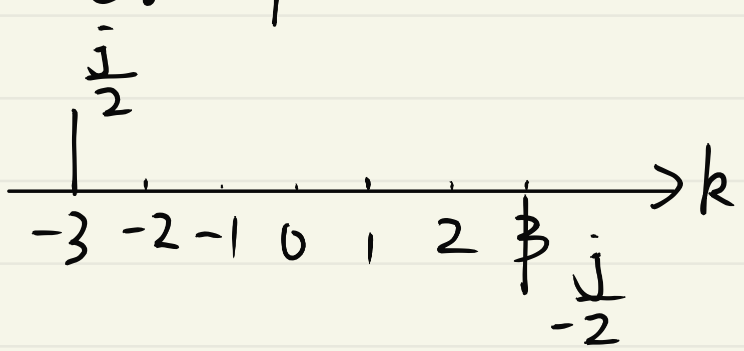
$$=\sum_{k\in\langle N\rangle}\tilde{X}_k\cdot 2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0-2\pi l)$$

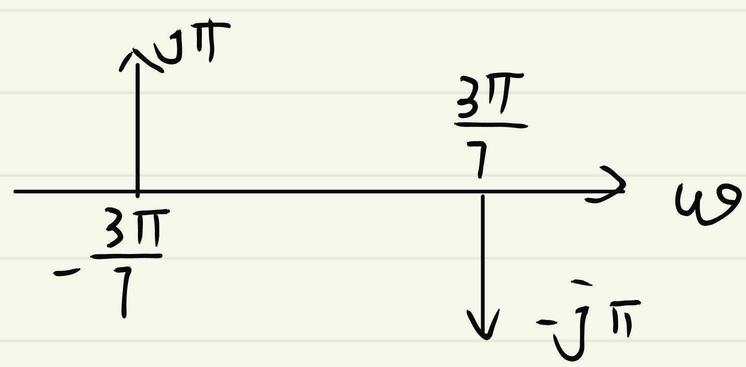
$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}_k\,\delta(\Omega-k\Omega_0)$$

$\tilde{x}(t)=\sin\frac{3\pi}{7}t$，求CFS

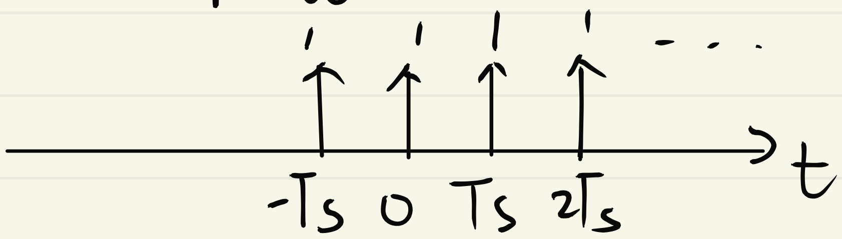
$$=\frac{1}{2j}e^{j\frac{3\pi}{7}t}-\frac{1}{2j}e^{-j\frac{3\pi}{7}t}$$

假设 $\omega_0=\frac{\pi}{7}$

CFS 

$\Rightarrow$ CFT 

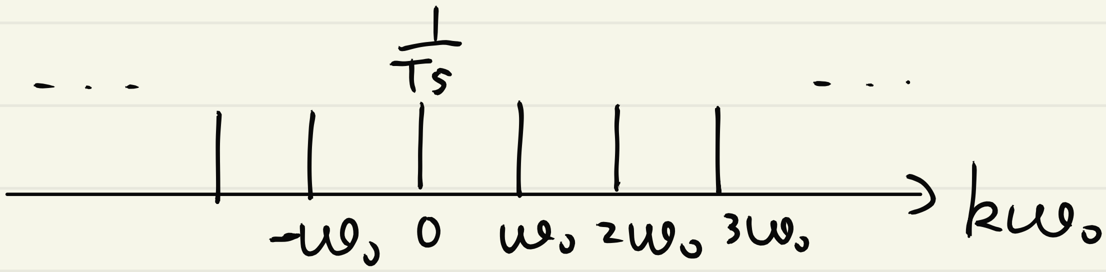
例3. 求 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_s)$ 的傅里叶变换



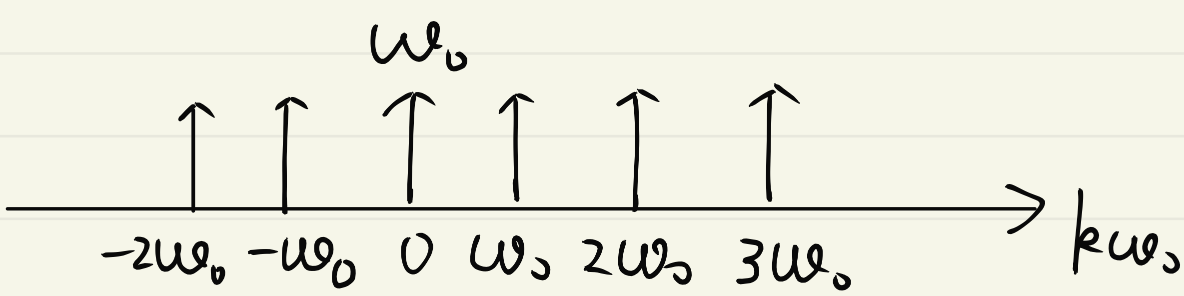
① 求 CFS

$$X_k = \frac{1}{T_s}\int_{\langle T_s \rangle} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$= \frac{1}{T_s}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_s}$$



② 求 CFT



$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \frac{1}{T_s} \cdot \delta(\omega - l\omega_0) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \omega_0\, \delta(\omega - l\omega_0)$$

§5.5.2 奇异函数的傅里叶变换

$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{CFT} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, e^{-j\omega t}\, dt = e^{-j\omega t_0}$$

$$\delta[n-n_0] \xrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0]\, e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n_0}$$

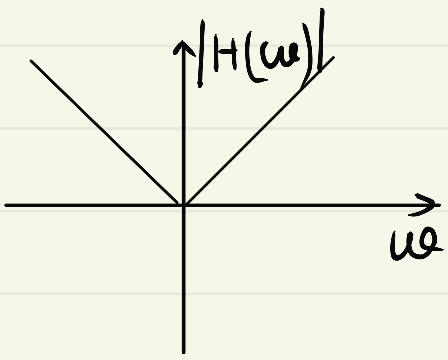
$$H(\omega) = e^{-j\omega t_0} \qquad |H(\omega)| = 1 \qquad \theta(\omega) = -\omega t_0$$

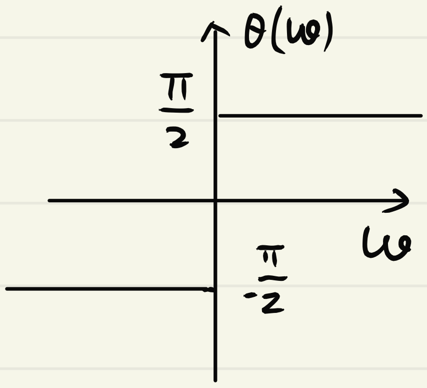
§5.5.2

一. 奇异函数的微分/对偶的 $\tilde{\mathcal{F}}$

$$\delta'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = -\frac{d}{dt} e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = j\omega \cdot e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = j\omega$$

$$\delta[n] - \delta[n-1] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} 1 - e^{-j\Omega}$$

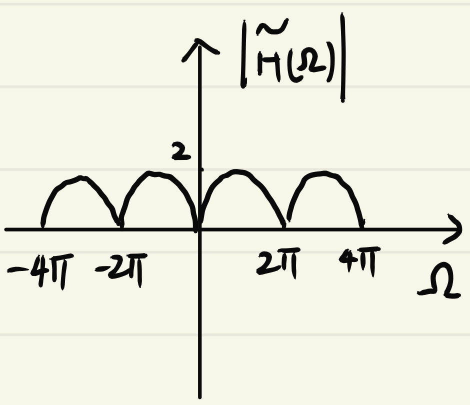


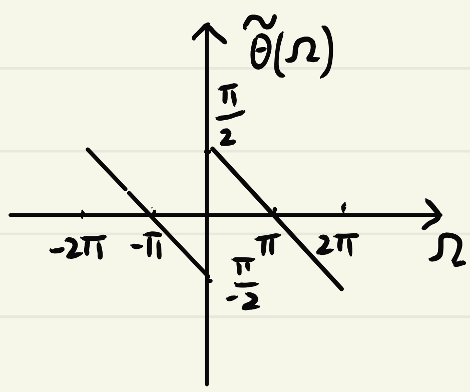


高通滤波器

$$1 - e^{-j\Omega} = e^{-\frac{j\Omega}{2}}\left(e^{\frac{j\Omega}{2}} - e^{-\frac{j\Omega}{2}}\right) = 2j \sin\frac{\Omega}{2} \cdot e^{-\frac{j\Omega}{2}}$$

$$|\tilde{H}(\Omega)| = \left|2\sin\frac{\Omega}{2}\right| \qquad \tilde{\theta}(\Omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{\Omega}{2} & 0 < \Omega < \pi \\ -\frac{\pi}{2} - \frac{\Omega}{2} & -\pi < \Omega < 0 \end{cases}$$



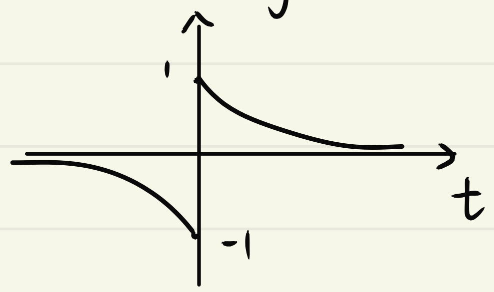


二、单位阶跃函数/序列的傅里叶变换

$\boxed{\delta(t)} \rightarrow \boxed{u(t)} \rightarrow$ ① $\mathcal{F}\{u(t)\} = \dfrac{1}{\mathcal{F}\{\delta(t)\}} = \dfrac{1}{j\omega}$ (错误的)

$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \rightarrow$ 符号函数 $\qquad \frac{1}{2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega)$

定义：$e^{-a|t|}\mathrm{sgn}(t) \qquad \lim\limits_{a\to 0} e^{-a|t|}\mathrm{sgn}(t) = \mathrm{sgn}(t)$



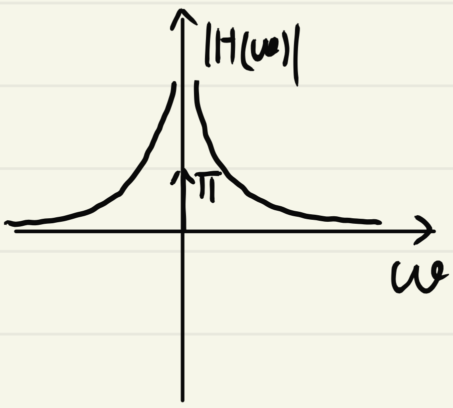
$$e^{-a|t|}\mathrm{sgn}(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt - \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt$$

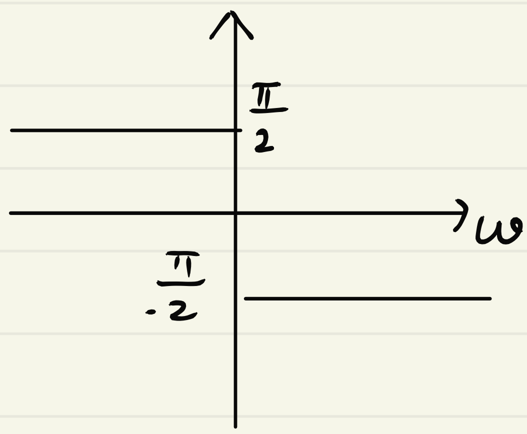
$$= \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} = \frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$\lim_{a\to 0} e^{-a|t|}\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \lim_{a\to 0}\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

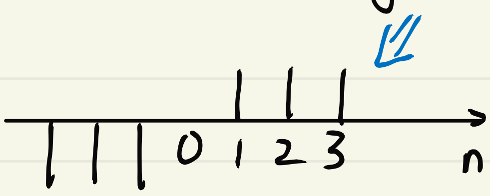
$H_L(\omega) = \pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$





低通滤波器

$u[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}[n] + \frac{1}{2}\delta[n] \qquad \frac{1}{2}\delta[n] \xrightarrow[\text{DTFT}]{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum\limits_{l=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\Omega-2\pi l)$



定义：$a^{|n|}\mathrm{sgn}[n]$，$0<a<1$

$a^{n}\mathrm{sgn}[n] = a^n u[n] - a^{-n}u[-n]$

$$a^n u[n] - a^{-n}u[-n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=0}^{\infty} a^n u[n]\, e^{-j\Omega n} - \sum_{n=-\infty}^{0} a^{-n} u[n]\, e^{-j\Omega n}$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} - \frac{1}{1-ae^{j\Omega}} = \frac{-ae^{j\Omega}+ae^{-j\Omega}}{1+a^2-2a\cos\Omega}$$

$$= \frac{-2aj\sin\Omega}{1+a^2-2a\cos\Omega}$$

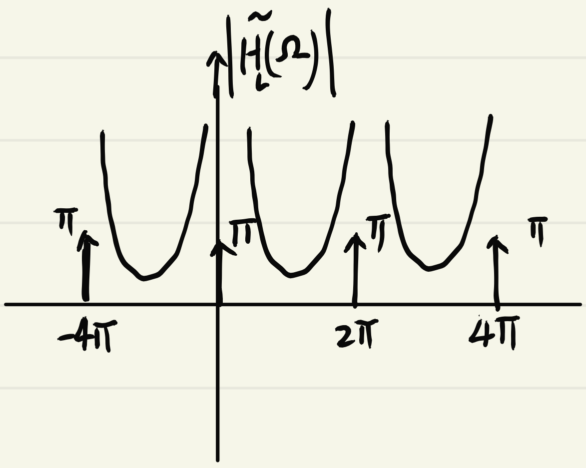
$$\lim_{a\to 1} a^{|n|}\,\mathrm{sgn}[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \frac{-j\sin\Omega}{1-\cos\Omega}$$

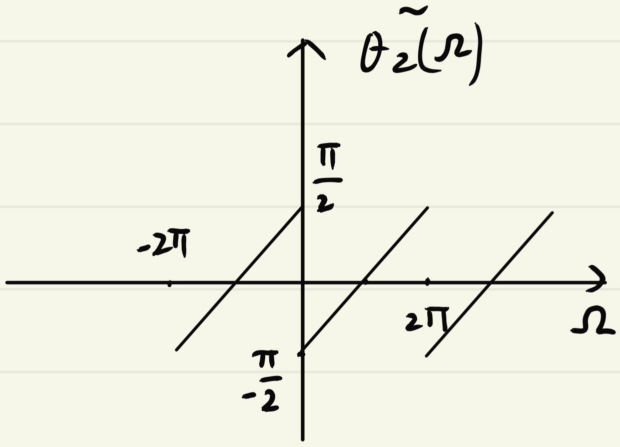
$$\Rightarrow u[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi l) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{j\sin\Omega}{1-\cos\Omega}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{j\sin\Omega}{1-\cos\Omega} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\cos\Omega-j\sin\Omega}{1-\cos\Omega} = \frac{1}{2}\,\frac{1-e^{j\Omega}}{1-\cos\Omega} = \frac{1}{2}\,\frac{(1-e^{j\Omega})(1-e^{-j\Omega})}{(1-\cos\Omega)(1-e^{-j\Omega})}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2-2\cos\Omega}{(1-\cos\Omega)(1-e^{-j\Omega})} = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi l) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}}$$





低通滤波器

§5.6 有限长序列的频域表示法．离散傅里叶变换 (DFT)

对于 M 点的有限长序列 $x[n]$，$n=0,1,\cdots M-1$

其 DTFT：$\tilde{X}(\Omega) = \sum_{n=0}^{M-1} x[n]e^{-j\Omega n}$

对 $\tilde{X}(\Omega)$ 在 $[0,2\pi)$ 区间平均取 M 份 $\tilde{X}(\Omega)$ 就是其 DFT

定义 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{M}$　　$X_k = \sum_{n=0}^{M-1} x[n]\,e^{-jk\Omega_0 n}$，$k=0,1,\cdots M-1$

把 $x[n]$ 以 M 为周期进行周期延拓 $\tilde{x}[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lM]$

$$F_k = \mathrm{DFS}\{\tilde{x}[n]\} = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}\tilde{x}[n]\,e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}x[n]\,e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{M}X_k$$

$$\tilde{x}[n] = \mathrm{IDFS}\{F_k\} = \sum_{k=0}^{M-1}F_k\,e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X_k\cdot e^{jk\Omega_0 n}$$

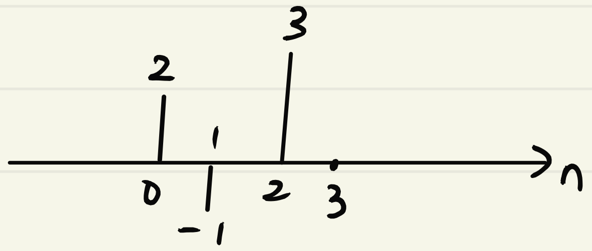
$$\boxed{\begin{cases} x[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X_k e^{jk\Omega_0 n} \\ X_k = \sum_{n=0}^{M-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \end{cases} \quad \text{DFT} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{M}}$$

对比 DFS

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k\in\langle N\rangle} \tilde{X}_k \cdot e^{jk\Omega_0 n}$$

$$\tilde{X}_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in\langle N\rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

例：



求 $x[n]$ 的 4点 DFT

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$X_0 = x[0]+x[1]+x[2]+x[3] = 2-1+3 = 4$$

$$X_1 = 2 - e^{-j\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j\frac{\pi}{2}2} = -1+j$$

$$X_2 = 2 - e^{-j\frac{\pi}{2}2} + 3e^{-j\frac{\pi}{2}2\cdot 2} = 2+1+3 = 6$$

$$X_3 = 2 - e^{-j\frac{\pi}{2}\cdot 3} + 3e^{-j\frac{\pi}{2}\cdot 3\cdot 2} = 2-j-3 = -1-j$$

§ 5.8 双边拉氏变换和 z 变换

§ 5.8.1 定义

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt \qquad Re\{s\} \in Roc$$

收敛域

$$f[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n} \qquad |z| \in Roc$$

与傅里叶变换的关系

① $$F(s)\Big|_{s=j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt = F(\omega) \qquad j\omega \in Roc$$

$$F(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\, e^{-j\Omega n} = \tilde{F}(\Omega) \qquad e^{j\Omega} \in Roc$$

② $$F(s)\Big|_{s=\sigma+j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{ f(t)\, e^{-\sigma t} \}$$

$$F(z)\Big|_{z=re^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\, r^{-n} e^{-j\Omega n} = \mathcal{F}\{ f[n]\, r^{-n} \}$$

例 1. 求 $e^{-at}u(t)$ 和 $-e^{-at}u(-t)$ 的 $\mathcal{L}$ 变换

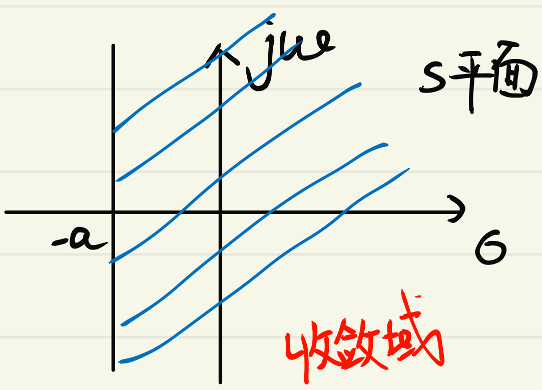
$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)\cdot e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \frac{e^{-(a+s)t}\Big|_0^{\infty}}{-(a+s)} = \frac{1}{s+a}$$

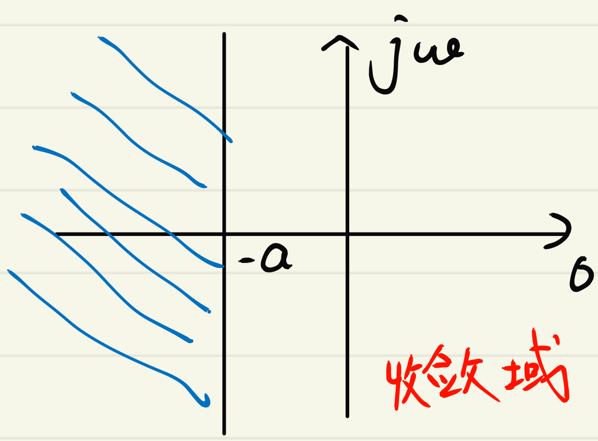
要求 $Re\{a+s\} > 0 \Leftrightarrow Re\{s\} > Re\{-a\}$

$$\mathcal{L}\{-e^{-at}u(-t)\} = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)\, e^{-st} dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t} dt = \frac{e^{-(s+a)t}\Big|_{-\infty}^{0}}{s+a} = \frac{1}{s+a}$$

像函数

要求 $Re\{a+s\} < 0 \Rightarrow Re\{s\} < Re\{-a\}$

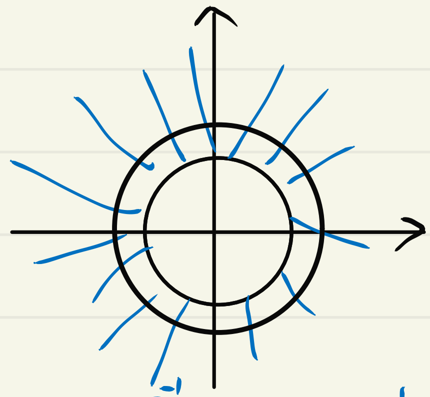




例2. 求 $a^n u[n]$ 和 $-a^n u[-n-1]$ 的 z 变换

$$Z\{a^n u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

要求 $|az^{-1}|<1 \Rightarrow |z|>|a|$



$$Z\{-a^n u[-n-1]\} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} a^{-m} z^{m} = -\sum_{m=1}^{\infty} (a^{-1}z)^m = \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

要求 $|a^{-1}z|<1 \Rightarrow |z|<|a|$

§5.8.2 双边 L氏 和 Z变换的零极点.

一、像函数的零极点分布

零点. $\lim\limits_{s\to z_i} F(s) = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{z\to z_i} F(z) = 0$ $\quad$ z_i 称为像函数的零点.

极点. $\lim\limits_{s\to p_i} F(s) = \infty$ $\quad$ $\lim\limits_{z\to p_i} F(z) = \infty$ $\quad$ p_i 称为像函数的极点.

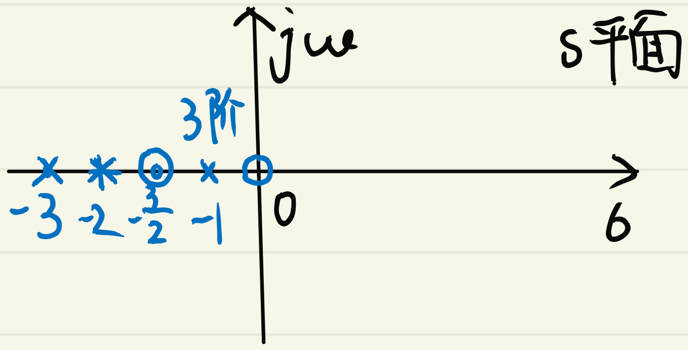
阶数: $\lim\limits_{s\to z_i} \frac{d^k}{ds^k} F(s) = \begin{cases} 0 & k<M \\ \neq 0 & k=M \end{cases}$

$\lim\limits_{z\to z_i} \frac{d^k}{dz^k} F(z) = \begin{cases} 0 & k<M \\ \neq 0 & k=M \end{cases}$ 称为 M 阶零点.

$\lim\limits_{s\to p_i} (s-p_i)^k F(s) = \begin{cases} \infty & k<N \\ 非\infty & k=N \end{cases}$

$\lim\limits_{z\to p_i} (z-p_i)^k F(z) = \begin{cases} \infty & k<N \\ 非\infty & k=N \end{cases}$ 称为N阶极点.

例: $F(s)=\dfrac{s(s+\frac{3}{2})^2}{(s+1)^3(s+2)^2(s+3)}$



二、有理像函数的零极点分布

$F(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$, R_f（收敛域）　　$F(z)=\dfrac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$, R_f　分子分母都是有理多项式

$$F(z)=\frac{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-2})}{(1+\frac{1}{9}z^{-1})^2(1-\frac{1}{8}z^{-2})}$$

性质:

① 孤立性

② 平衡性: 零点数 = 极点数

$$F(s)=\frac{s(s+\frac{3}{2})^2}{(s+1)^3(s+2)^2(s+3)}$$

∞点是3阶零点

③ 充分性:

$$F(s)=F_0\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-z_i)^{\rho_i}}{\prod_{i=1}^{N}(s-p_i)^{\sigma_i}},\ R_f \qquad F(z)=F_0\frac{\prod_{i=1}^{M}(1-z_i z^{-1})^{\rho_i}}{\prod_{i=1}^{N}(1-p_i z^{-1})^{\sigma_i}},\ R_f$$

$\{F_0, z_i, \rho_i, p_i, \sigma_i, R_f\}$ 若确定，则原来的时域也是确定的

§5.8.3 双边L氏和Z变换的收敛域

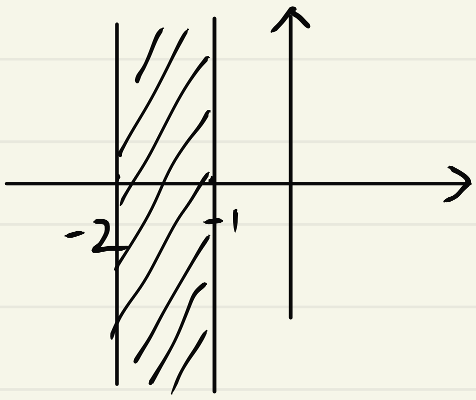
所谓收敛域就是满足 $F(s)\neq\infty$，$F(z)\neq\infty$ 的 s 或 z 的取值区间

一、收敛域的形状

对于双边 $\mathcal{L}$ 变换而言，其收敛域是平行于虚轴的单连通条状区域

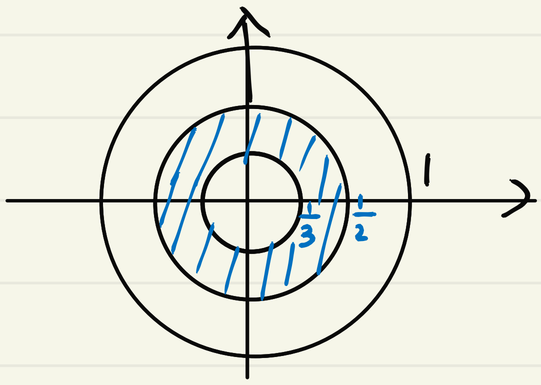
对于 z 变换而言，其收敛域是以原点为圆心的单个圆环状区域

例：$e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$ $\quad -2<Re\{s\}<-1$



$-(\frac{1}{2})^n u[-n-1] + (\frac{1}{3})^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$

$\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$

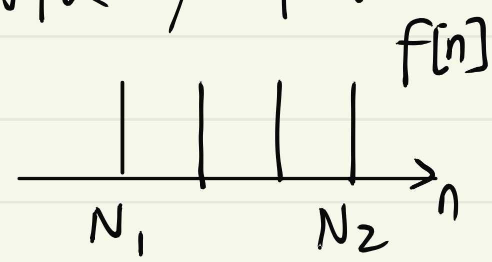


二、收敛域不包含极点且以极点作为边界

三、对于有限持续期的有界函数 其收敛域至少是有限 s 平面或 $0<|z|<\infty$

不包含 ∞ 点的 s、z 平面 $\Rightarrow$ 有限 s/z 平面

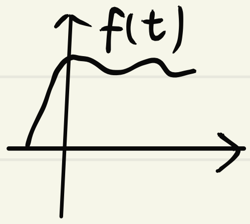
$z\{f[n]\} = \sum_{n=N_1}^{N_2} f[n]z^{-n}$



① $N_1>0$ $\quad 0<|z|\le\infty$

② $N_2<0$ $\quad 0\le|z|<\infty$ $\qquad$ ③ $0<N_1<N_2$ $\quad 0<|z|<\infty$

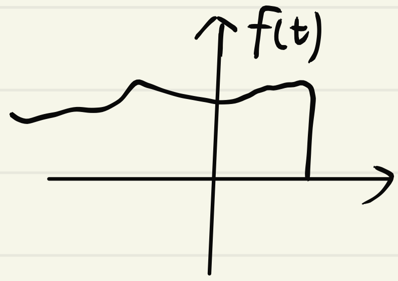
四. 右边函数/序列的$\mathcal{L}$/Z变换的收敛域



对于$\mathcal{L}$氏变换，是最右边极点的右边区域

对于z变换，是最外面极点的外面区域

五. 左边函数/序列的$\mathcal{L}$/Z变换的收敛域



对于$\mathcal{L}$氏变换，是最左边极点的左边区域

对于z变换，是最里面极点的里面区域

$F(s)\big|_{s=j\omega} = F(\omega) \Rightarrow$ 如果收敛域包含虚轴，有严格意义的CFT

$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$ $\mathrm{Re}\{s\} > 0$

$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$e^{-t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}$ $\mathrm{Re}\{s\} > -1$ 有CFT

$F(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = \tilde{F}(\Omega) \Rightarrow$ 如果收敛域包含单位圆，有严格意义的DTFT

$a^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}$ $|z| > |a|$

$|a| < 1$时 $\Rightarrow$ 极点在单位圆内，有严格意义的DTFT

$u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}}$ $|z| > 1$ 无DTFT

u[n] 只有广义的F

六、对于双边函数/序列

$\mathcal{L}$氏变换的收敛域是条状区域

z变换的收敛域是圆环状

§5.8.4 反ℒ/z 变换

一.公式（很少用公式法求反变换）

$$F(s)\big|_{s=\sigma+j\omega} = \mathcal{F}\{f(t)e^{-\sigma t}\}$$

$$F(z)\big|_{z=re^{j\Omega}} = \mathcal{F}\{f[n]r^{-n}\}$$

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}\,d\omega$$

$\Downarrow$ $s=\sigma+j\omega$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\,ds \quad ,\ s\in R_f$$

$$f[n]r^{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} F(re^{j\Omega})e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

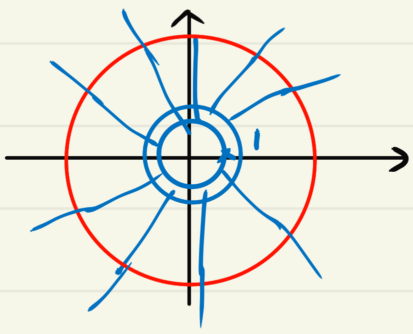
令 $z=re^{j\Omega}$

$dz = jre^{j\Omega}\,d\Omega \qquad d\Omega = \frac{1}{jz}dz$

$$f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} F(re^{j\Omega})\cdot(re^{j\Omega})^n\,d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint F(z)\, z^{n-1}\,dz \quad ,\ r\in R_{oc}$$

在圆周上积分



二.部分分式展开法求反变量

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{A_i}{s-p_i},\ R_i\right\} \qquad R_f = R_1\cap R_2\cdots\cap R_N$$

$$F(z) = \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} = \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{B_i}{1-p_i z^{-1}},\ R_i\right\} \qquad R_f = R_1\cap R_2\cdots\cap R_N$$

例：求 $F(s) = \dfrac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$. $Re\{s\}>-1$，对应的时间函数

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$Re\{s\}>-1 \cap Re\{s\}>-2 \Rightarrow Re\{s\}>-1$

$$f(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$$

例：求 $F(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}$ $\boxed{\frac{1}{2}>|z|>\frac{1}{3}}$，求 $f[n]$

$$F(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{2}{5}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$|z|>\frac{1}{2}$ 或 $|z|<\frac{1}{2}$ $\Downarrow$ $\therefore |z|<\frac{1}{2}$

$|z|>\frac{1}{3}$ 或 $|z|<\frac{1}{3}$ $|z|>\frac{1}{3}$

$$f(z)=-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

三、幂级数展开法求反 z 变换

如果 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f[n]z^{-n}$ $|z|>r_0$ 或 $F(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}f[n]z^{-n}$，$|z|<r_0$

那么 $f[n]$ 就是原序列

例3：求 $\ln(1+az^{-1})$ $|z|>|a|$ 对应的原序列

$$f(x)=\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n},\quad |x|<1$$ $\Rightarrow$ 采用泰勒级数展开

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(az^{-1})^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^n}{n}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^n}{n}\cdot u[n-1]\cdot z^{-n}$$

$$\therefore f[n]=\frac{(-1)^{n+1}a^n}{n}\underline{u[n-1]}$$

$$f[n]\xrightarrow{z}\sum_{n=-\infty}f[n]\cdot z^{-n}$$

采用长除法

例：求 $F(z)=\dfrac{z}{z^{-1}-az^{-2}}$ $|z|>|a|$，求原序列 $f[n]$

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^2+az+a^2+a^3z^{-1} \\
\hline
z^{-1}-az^{-2} & z \\
 & z-a \\
\hline
 & a \\
 & a-a^2z^{-1} \\
\hline
 & a^2z^{-1} \\
 & a^2z^{-1}-a^3z^{-2} \\
\hline
 & a^3z^{-2}
\end{array}
$$

$f[n]z^{-n}$

$f[-k]=0$，$k\le -3$

$f[-2]=1$

$f[-1]=a$

$f[0]=a^2$

$f[1]=a^3$

$\vdots$

§5.9 信号的复频谱及LTI系统的系统函数

一.信号的复频谱

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}\,ds=\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega}\frac{X(s)ds}{2\pi j}e^{st}\qquad s\in Roc$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz=\oint\frac{X(z)z^{-1}dz}{2\pi j}\cdot z^{n}\qquad |z|\in Roc$$

$X(s)$、$X(z)$ 可以认为是信号的复频谱

二.LTI系统的系统函数

$$e^{s_0t}\xrightarrow{h(t)}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{s_0(t-\tau)}dt=e^{s_0t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s_0\tau}d\tau=H(s_0)e^{s_0t}$$

特征函数

其中 $H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}\cdot d\tau$ ← 系统函数

$$z_0^n\xrightarrow{h[n]}\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z_0^{n-k}=z_0^n\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\cdot z_0^{-k}=H(z_0)z_0^n$$

其中 $H(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z^{-k}$ ← 系统函数

三.信号输入LTI系统

$$\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\frac{X(s)ds}{2\pi j}e^{st}\xrightarrow{h(t)}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\frac{X(s)ds}{2\pi j}H(s)e^{st}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)H(s)e^{st}ds$$

定义 $Y(s)=X(s)H(s)$

$$y(t)=x(t)*h(t)\longrightarrow Y(s)=X(s)\cdot H(s)$$

$$\oint\frac{X(z)z^{-1}}{2\pi j}dz\,z^{n}\xrightarrow{h[n]}\oint\frac{X(z)z^{-1}}{2\pi j}H(z)\cdot z^{n}=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)H(z)z^{n-1}dz$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \xrightarrow{z} Y(z) = X(z)\cdot H(z)$$

补充：LTI 系统零点与系统可逆性关系

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s)$$

$$h_I(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H_I(s) \overset{?}{\Longrightarrow} H_I(s) = \frac{1}{H(s)}$$

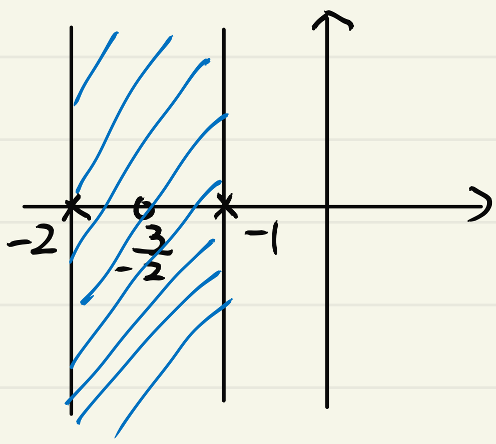
不一定

$$H(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} \qquad -2 < Re\{s\} < -1$$

$$e^{-\frac{3}{2}t} \xrightarrow{H(s)} H(s)\Big|_{s=-\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}t} = 0$$

$$0 \xrightarrow{H(s)} 0$$

不可逆的



收敛域中没有零点才是可逆的

对于 LTI 系统而言，一定要收敛域中没有零点，系统才是可逆的

$$H(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} \qquad Re\{s\} > -1$$

$$= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$h(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$$

第六章 变换的性质及其揭示的时域和变换域的关系

目的：①加快运算 ②理解背后的物理含义

脉络：①卷积性质 ②对偶、对称性质

小的计算公式：对于CFT. $F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot d\omega$$

对于DTFT $\tilde{F}(0)=\tilde{F}(2k\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]$

$$\tilde{F}[(2k+1)\pi]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\cdot(-1)^n$$

§6.2 线性性质

一、$\mathcal{L}$、z变换

如果 $f_1(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}F_1(s)$ R_1 $f_2(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}F_2(s)$ R_2

$$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)\quad R_{oc}\supset R_1\cap R_2$$

对于z变换

如果 $f_1[n]\xrightarrow{z}F_1(z)$，$R_1$ $f_2[n]\xrightarrow{z}$，R_2

$$\alpha f_1[n]+\beta f_2[n]\xrightarrow{z}\alpha F_1(z)+\beta F_2(z)\quad R_{oc}\supset R_1\cap R_2$$

对于收敛域：

①如果像函数出现零极点相消，收敛域扩大

②如果 $R_1\cap R_2=\phi$，则不存在$\mathcal{L}$/z变换

③既 $R_1\cap R_2\neq\phi$，又无零极点相消，$R_{oc}=R_1\cap R_2$

二、对于 CFT、DTFT 而言

如果 $f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)$ $\qquad f_1[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{F_1}(\Omega)$

$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\omega)$ $\qquad f_2[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{F_2}(\Omega)$

则：$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)$

$\alpha f_1[n] + \beta f_2[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha \tilde{F_1}(\Omega) + \beta \tilde{F_2}(\Omega)$

※※※

$\boxed{例1}$：求 $\cos\omega_0 t$、$\sin\omega_0 t$、$\cos\Omega_0 n$、$\sin\Omega_0 n$ 的 $\mathcal{F}$ 变换

周期函数，无 $\mathcal{L}$、$\mathcal{Z}$ 变换，只有广义 $\mathcal{F}$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right] \xrightarrow{CFT} \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right]$$

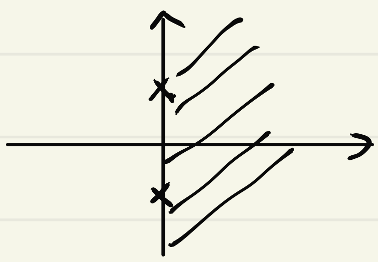
$$= \frac{j}{2}\left[e^{-j\omega_0 t} - e^{j\omega_0 t}\right] \xrightarrow{CFT} j\pi\delta(\omega+\omega_0) - j\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\cos\Omega_0 n = \frac{1}{2}\left[e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega_0 n}\right] \xrightarrow{DTFT} \pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left\{\delta(\Omega-\Omega_0+2\pi l) + \delta(\Omega+\Omega_0+2\pi l)\right\}$$

$$\sin\Omega_0 n = \frac{j}{2}e^{-j\Omega_0 n} - \frac{j}{2}e^{j\Omega_0 n} \xrightarrow{DTFT} j\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left\{\delta(\Omega+\Omega_0+2\pi l) - \delta(\Omega-\Omega_0+2\pi l)\right\}$$

例2：求 $\cos\omega_0 t\, u(t)$、$\sin\omega_0 t\, u(t)$、$\cos\Omega_0 n \cdot u[n]$、$\sin\Omega_0 n \cdot u[n]$

$$\cos\omega_0 t\, u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{j\omega_0 t}u(t)\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-j\omega_0 t}u(t)\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right]$$



$\mathrm{Re}\{s\} > 0$

$$= \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\sin\omega_0 t\, u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{j}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-j\omega_0 t}u(t)\right\} - \frac{j}{2}\mathcal{L}\left\{e^{j\omega_0 t}u(t)\right\} = \frac{j}{2}\left[\frac{1}{s+j\omega_0} - \frac{1}{s-j\omega_0}\right]$$

$$= \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$\mathrm{Re}\{s\} > 0$

$$\cos\Omega_0 n\, u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{e^{j\Omega_0 n}u[n]\} + \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{e^{-j\Omega_0 n}u[n]\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-e^{j\Omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\Omega_0}z^{-1}}\right]$$

$$= \frac{1-\cos\Omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1}+z^{-2}} \qquad |z|>1$$

$$\sin\Omega_0 n\, u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{\sin\Omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1}+z^{-2}} \qquad |z|>1$$

§6.3 卷积性质

时域卷积性质

一. $\mathcal{L}/\mathcal{Z}$ 变换

如果 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$, R_x $\qquad h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s)$, R_h

则 $x(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)\cdot H(s)$ $\qquad ROC \supset R_x \cap R_h$

如果 $x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$, R_x $\qquad h[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z)$, R_h

则 $x[n] * h[n] \xrightarrow{\mathcal{L}} X(z)\cdot H(z)$, $ROC \supset R_x \cap R_h$

二. CFT/DTFT 变换

如果: $x(t) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} X(\omega)$ $\qquad h(t) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} H(\omega)$

则: $x(t) * h(t) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} X(\omega)\cdot H(\omega)$

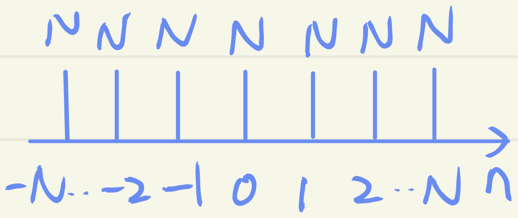
如果: $x[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \tilde{X}(\Omega)$ $\qquad h[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \tilde{H}(\Omega)$

则 $x[n] * h[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \tilde{X}(\Omega)\cdot\tilde{H}(\Omega)$

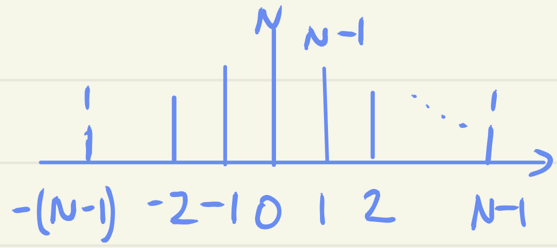
例:

$$x[n] = \begin{cases} |n| & |n|<N \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

求 $x[n]$ 的 $\xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}}$

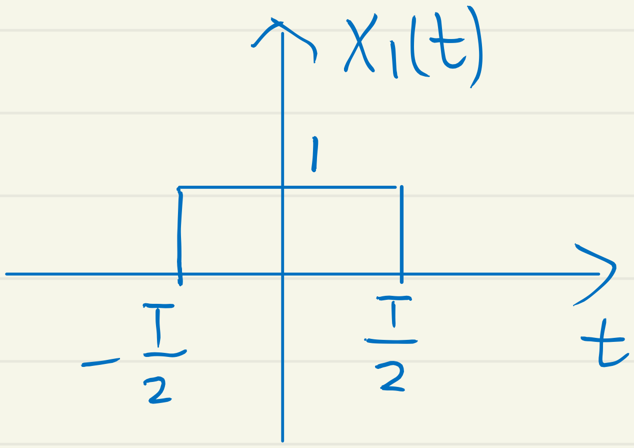
$x[n] =$ 

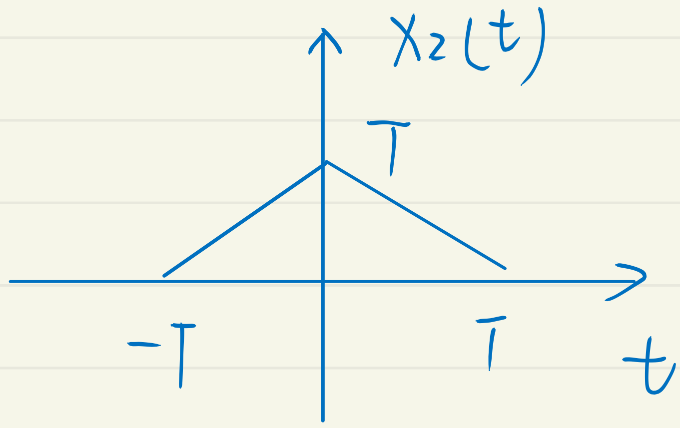
$x_1[n]$

$-$ 

$x_2[n]$

$$x_1[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} \frac{\sin\frac{(2N+1)}{2}\Omega}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$





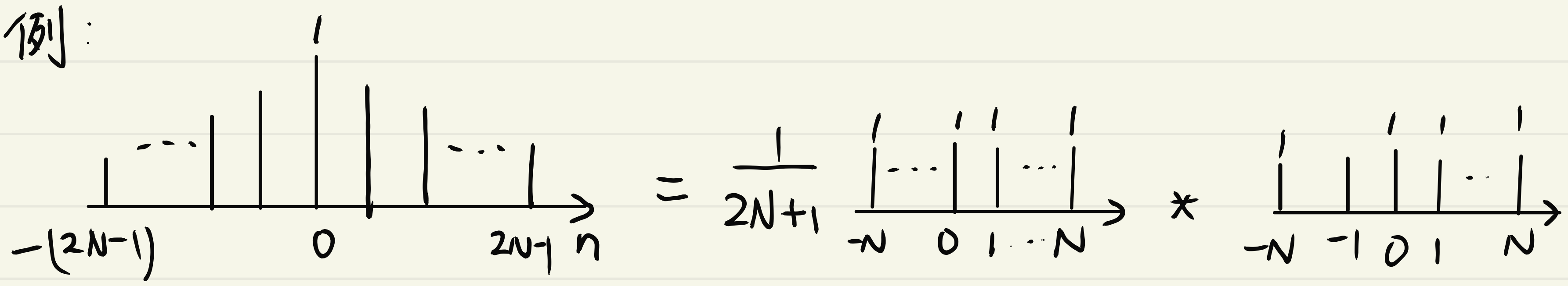
$$x_1(t) * x_1(t) = x_2(t)$$

要求 $x_2(t)$ 的 $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ 或 $\xrightarrow{\mathcal{L}}$

先求 $x_1(t)$ 的 $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ 或 $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ $X_1(\omega)$

再 $X_2(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_1(\omega)$

例：



$$\frac{1}{2N+1}\left[\frac{\sin\frac{(2N+1)\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}}\right]^2 \qquad \frac{\sin\frac{(2N+1)\Omega}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$

6.3.2 频域卷积性质

如果 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$ $\quad p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} P(\omega)$

则 $x(t)\,p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$

如果 $x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{X}(\Omega)$ $\quad p[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{P}(\Omega)$

则 $x[n]\,p[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \tilde{X}(\Omega) \circledast \tilde{P}(\Omega)$

证明：

$$\frac{1}{2\pi}\tilde{X}(\Omega)\circledast\tilde{H}(\Omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{\langle 2\pi\rangle}\tilde{X}(\Omega)\circledast\tilde{H}(\Omega)\,e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

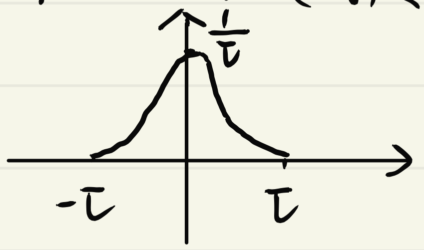
$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{\langle 2\pi\rangle}\int_{\langle 2\pi\rangle}\tilde{X}(\sigma)\,\tilde{P}(\Omega-\sigma)\,d\sigma\,e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

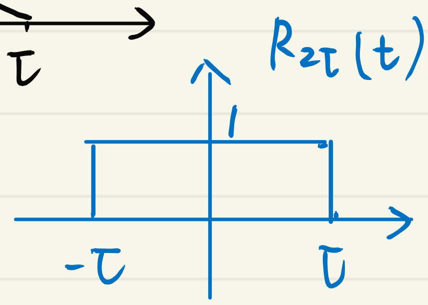
令 $\dfrac{\eta=\Omega-\sigma}{\Omega=\eta+\sigma}$ $\quad \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{\langle 2\pi\rangle}\int_{\langle 2\pi\rangle}\tilde{X}(\sigma)\,\tilde{P}(\eta)\,d\sigma\,e^{j(\eta+\sigma)n}\cdot d\eta$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}\tilde{X}(\sigma)\,e^{j\sigma n}\,d\sigma\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{\langle 2\pi\rangle}\tilde{P}(\eta)\,e^{j\eta n}\,d\eta$$

$$=x[n]\cdot p[n]$$

例：$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{2\tau}\left[1+\cos\frac{\pi}{\tau}t\right] & |t|<\tau \\ 0 & \end{cases}$，求其 $\tilde{F}$ 变换





$$x(t)=\frac{1}{2\tau}\left[1+\cos\frac{\pi}{\tau}t\right]\left[u(t+\tau)-u(t-\tau)\right]$$

$$R_{2\tau}(t)\xrightarrow{\tilde{F}}2\tau Sa(\omega\tau)$$

$$1\xrightarrow{\tilde{F}}2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t}\xrightarrow{\tilde{F}}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\frac{1}{2\tau}\left[1+\cos\frac{\pi}{\tau}t\right]\xrightarrow{\tilde{F}}\frac{1}{2\tau}\tilde{F}\left\{1+\cos\frac{\pi}{\tau}t\right\}$$

$$=\frac{1}{2\tau}\tilde{F}\left\{1+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{\tau}t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{\tau}t}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\tau}\left[2\pi\delta(\omega)+\pi\delta(\omega-\frac{\pi}{\tau})+\pi\delta(\omega+\frac{\pi}{\tau})\right]$$

$$\Rightarrow\tilde{F}\{x(t)\}=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\tau Sa(\omega\tau)*\frac{1}{2\tau}\left[2\pi\delta(\omega)+\pi\delta(\omega-\frac{\pi}{\tau})+\pi\delta(\omega+\frac{\pi}{\tau})\right]$$

§6.4 时移和频移性质

§6.4.1 时移性质

一、$\mathcal{L}$氏变换和 z 变换

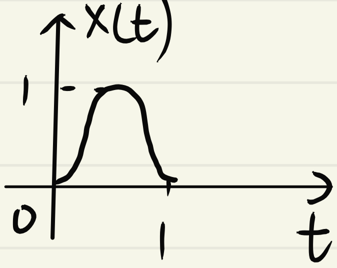
如果 $f(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}F(s)$，$R_f$　　　$f[n]\xrightarrow{z}F(z)$，R_f

则 $f(t-t_0)\xrightarrow{\mathcal{L}}e^{-st_0}F(s)$，$R_{oc}=R_f$　　　$f[n-n_0]\xrightarrow{Z}z^{-n_0}F(z)$，$R_{oc}=R_f$

二、CFT / DTFT 的时移性质

如果 $f(t)\xrightarrow{\tilde{F}}F(\omega)$　　　$f[n]\xrightarrow{\tilde{F}}\tilde{F}(\Omega)$

则 $f(t-t_0)\xrightarrow{\tilde{F}}e^{j\omega t_0}F(\omega)$　　　$f[n-n_0]\xrightarrow{\tilde{F}}e^{j\Omega n_0}\tilde{F}(\Omega)$

例：求，

$x(t)=\sin\pi t\,[u(t)-u(t-1)]$ 求 $x(t)$ 的 $\mathcal{L}$ 变换

$x(t)=\sin\pi t\cdot u(t)+\sin\pi(t-1)\cdot u(t-1)$

$\sin\pi t\cdot u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{\pi}{s^2+\pi^2}$ $x(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{\pi}{s^2+\pi^2}+\frac{\pi}{s^2+\pi^2}\cdot e^{-s}=\frac{\pi(1+e^{-s})}{s^2+\pi^2}$

$\frac{\pi(1+e^{-s})}{s^2+\pi^2}$ $s=(2k+1)j\pi$ 为零点

只有 $s=\pm j\pi$ 2个极点

非有理像函数零点个数 ≠ 极点个数

例 6.7 (8) $X(s)=\frac{e^{s}}{s(1-e^{-s})}$ 要翻到分子上 $Re\{s\}>0$，求反变换

$\frac{1}{1-a}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k,\ |a|<1$

$X(s)=\frac{e^{s}}{s}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}e^{-sk}$

$=\frac{1}{s}\sum_{k=-1}^{\infty}e^{-sk}\quad Re\{s\}>0$

$\frac{1}{s}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}u(t)$

$\frac{e^{-ks}}{s}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}u(t-k)$

$\therefore\ \frac{1}{s}\sum_{k=-1}^{\infty}e^{-sk}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\sum_{k=-1}^{\infty}u(t-k)$

例 6.7 (9) $\frac{1}{z(1-z^{-N})}$，$|z|>1$ 求反变换

$=z^{-1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}z^{-kN}$

$z^{-1}\xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}}\delta[n-1]$

$z^{-(kN+1)}\xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}}\delta[n-(kN+1)]$

$\therefore\ z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}z^{-kN}\xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-(kN+1)]$

§6.4.2 频移性质和复频移性质

一、频移性质

如果：$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$ $\qquad f[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \tilde{F}(\Omega)$

则 $e^{j\omega_0 t} f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega-\omega_0)$ $\qquad e^{j\Omega_0 n} f[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \tilde{F}(\Omega-\Omega_0)$

二、复频域

如果：$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$，$R_f: \sigma_1 < Re\{s\} < \sigma_2$ $\qquad f[n] \xrightarrow{Z} F(z)$ $R_f = r_1 < |z| < r_2$

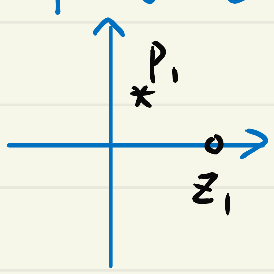
则 $e^{s_0 t} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s-s_0)$ $\quad Roc = R_f + Re\{s_0\}$ $\qquad z_i \Rightarrow z_i + s_0$，$p_i \Rightarrow p_i + s_0$ 零极点的变换

$z_0^n f[n] \xrightarrow{Z} F(\frac{z}{z_0})$ $\quad Roc = R_f \cdot |z_0|$ $\qquad z_i \Rightarrow z_i z_0$，$p_i \Rightarrow p_i z_0$

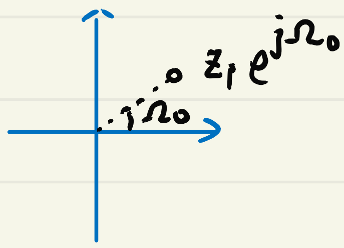
$\Downarrow$

证明：直接套 $\mathcal{L}$、Z 变换的公式

① 如果 $z_0 = e^{j\Omega_0}$ $\quad (\Omega_0 > 0)$



$\Rightarrow$



收敛域不变

② 如果 $z_0 = r$ $\quad (r > 1)$

收敛域会伸缩

例 1. 求 $e^{-at}\cos\omega_0 t \cdot u(t)$、$e^{-at}\sin\omega_0 t \cdot u(t)$ 的 $\mathcal{L}$ 变换

$a^n \cos\Omega_0 n \cdot u[n]$、$a^n \sin\Omega_0 n \cdot u[n]$ 的 Z 变换

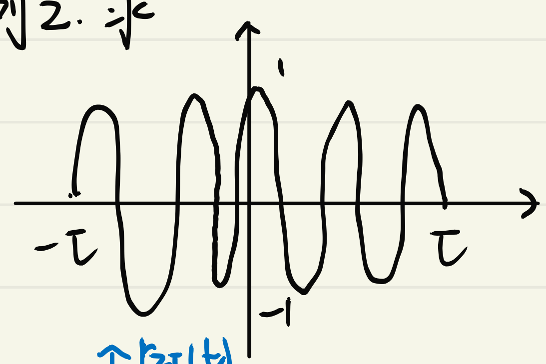
$\cos\omega_0 t \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$ $\quad Re\{s\} > 0$ $\qquad e^{-at}\cos\omega_0 t \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$ $\quad Re\{s\} > Re\{-a\}$

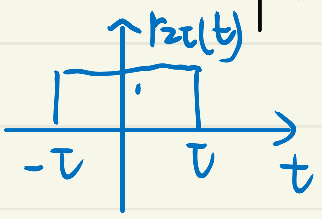
$\sin\omega_0 t \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$ $\quad Re\{s\} > 0$ $\qquad e^{-at}\sin\omega_0 t \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$ $\quad Re\{s\} > Re\{-a\}$

$\cos\Omega_0 n \cdot u[n] \xrightarrow{Z} \dfrac{1-\cos\Omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$ $\quad |z| > 1$ $\qquad a^n\cos\Omega_0 n \cdot u[n] \xrightarrow{Z} \dfrac{1-\cos\Omega_0 (\frac{z}{a})^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 (\frac{z}{a})^{-1}+(\frac{z}{a})^{-2}}$ $\quad |z| > |a|$

$\sin\Omega_0 n \cdot u[n] \xrightarrow{Z} \dfrac{\sin\Omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$ $\quad |z| > 1$ $\qquad a^n\sin\Omega_0 n \cdot u[n] \xrightarrow{Z} \dfrac{\sin\Omega_0 (\frac{z}{a})^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 (\frac{z}{a})^{-1}+(\frac{z}{a})^{-2}}$ $\quad |z| > |a|$

例2. 求 $x(t) = r_{2\tau}(t)\cdot\cos\omega_0 t$，求 $x(t)$ 的 CFT





频谱搬移

$r_{2\tau}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\tau Sa(\omega\tau)$

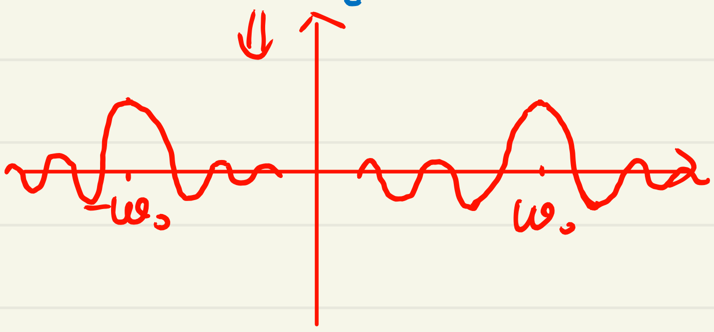
$\cos\omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right\}$　　再二者卷

或

$x(t) = \frac{1}{2}r_{2\tau}(t)\,e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}r_{2\tau}(t)\,e^{-j\omega_0 t}$　　再用 $e^{j\omega_0 t}\cdot f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega-\omega_0)$

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tau Sa\left[(\omega-\omega_0)\tau\right] + \tau Sa\left[(\omega+\omega_0)\tau\right]$

$\Downarrow$



§6.5 时域的微分/积分、差分/累加
变换域的微分/积分性质

§6.5.1 时域的微分/积分、差分/累加

一、微分/差分性质

如果 $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$　　　　$f[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\Omega)$

则 $f'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega\cdot F(\omega)$　　　　$\Delta f[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} (1-e^{-j\Omega})F(\Omega)$

如果 $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$　R_F　　　　$f[n] \xrightarrow{Z} F(z)$，$R_F$

则 $f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s\cdot F(s)$　$R_{oc}\supset R_F$　　　　$\Delta f[n] \xrightarrow{Z} (1-z^{-1})F(z)$，$R_{oc}\supset R_F$

二、积分/累加性质

如果 $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$ 如果 $f[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \tilde{F}(\Omega)$

则 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$ $\sum_{k=-\infty}^{n} f[k] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \frac{\tilde{F}(\Omega)}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\tilde{F}(0)\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi l)$

如果 $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$. R_F $f[n] \xrightarrow{Z} F(z)$. R_F

则：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(s)}{s}$. $Roc \supset \{R_F \cap Re\{s\} > 1$

$\sum_{k=-\infty}^{n} f[k] \xrightarrow{Z} \frac{F(z)}{1-z^{-1}}$ $Roc \supset \{R_F \cap |z|>1\}$

例：求 $x(t) = \sin\pi t\,[u(t) - u(t-1)]$，求 $x(t)$ 的 $\mathcal{L}$ 变换

①可直接 $\sin\pi t \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\pi}{s^2+\pi^2}$ 再时移

② 此处用微分性质解

$x'(t) = \pi\cos\pi t\,[u(t) - u(t-1)]$

$x''(t) = -\pi^2\sin\pi t\,[u(t) - u(t-1)] + \pi[\delta(t) + \delta(t-1)]$

$x''(t) = -\pi^2 x(t) + \pi[\delta(t) + \delta(t-1)]$

$s^2 X(s) = -\pi^2 X(s) + \pi[1 + e^{-s}]$

$\Rightarrow X(s) = \frac{\pi(1+e^{-s})}{s^2+\pi^2}$

一、微分性质

如果：$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$，$R_f$

$f[n] \xrightarrow{z} F(z)$，$R_f$

则：$-t f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dF(s)}{ds}$ $Roc = R_f$

$-n f[n] \xrightarrow{z} z\frac{dF(z)}{dz}$，$Roc = R_F$

如果 $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$

$f[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{F}(\Omega)$

则：$-jt f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{dF(\omega)}{d\omega}$

$-jn f[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d\tilde{F}(\Omega)}{d\Omega}$

例：求 $\frac{1}{(s+a)^2}$，$Re\{s\} > Re\{-a\}$，求其原函数

$\frac{1}{(1+az^{-1})^2}$ $|z| > |a|$，求其原序列

$\frac{1}{s+a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at} \cdot u(t)$ $Re\{s\} > Re\{-a\}$

$-\frac{1}{(s+a)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -t \cdot e^{-at} \cdot u(t)$

$\frac{1}{(s+a)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t \cdot e^{-at} u(t)$

$\frac{1}{1+az^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} (-a)^n u[n]$ $|z| > |a|$

$z \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{(1+az^{-1})^2}$

$\therefore \frac{az^{-1}}{(1+az^{-1})^2} \xrightarrow{z^{-1}} -n \cdot (-a)^n u[n]$

$\therefore \frac{z^{-1}}{(1+az^{-1})^2} \xrightarrow{z^{-1}} n \cdot (-a)^{n-1} u[n]$

再用时移 $f[n] \xrightarrow{z} F(z)$

$f[n-1] \xrightarrow{z} z^{-1} F(z)$

$\therefore \frac{1}{(1+az^{-1})^2} \xrightarrow{z^{-1}} (n+1)(-a)^n \cdot u[n+1]$

二、积分性质

如果 $f(t) \xrightarrow{\tilde{F}} F(\omega)$ 　　　　 $f[n] \xrightarrow{\tilde{F}} \tilde{F}(\Omega)$

则 $\dfrac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t) \xrightarrow{\tilde{F}} \int_{-\infty}^{\omega} F(\sigma)\,d\sigma$ 　　　　 $\dfrac{f[n]}{-jn} \xrightarrow{\tilde{F}} \int_{-\infty}^{\Omega} \tilde{F}(\sigma)\,d\sigma$

要求 $\int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{F}(\sigma)\,d\sigma = 0$

如果 $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$. R_f 　　　　 $f[n] \xrightarrow{Z} F(z)$. R_f

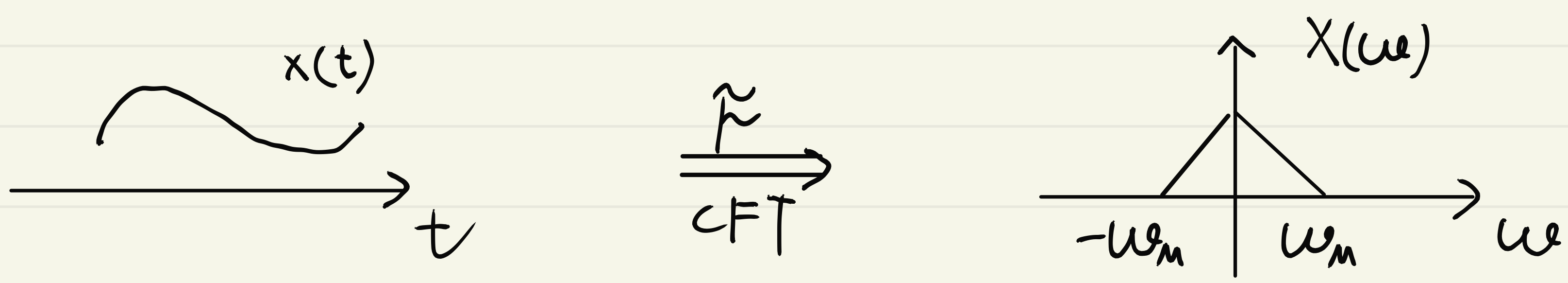
则 $\dfrac{f(t)}{-t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_{-\infty}^{s} F(v)\,dv$ 　　　　 $\dfrac{f[n]}{-n} \xrightarrow{Z} \int_{-\infty}^{z} v^{-1} F(v)\,dv$

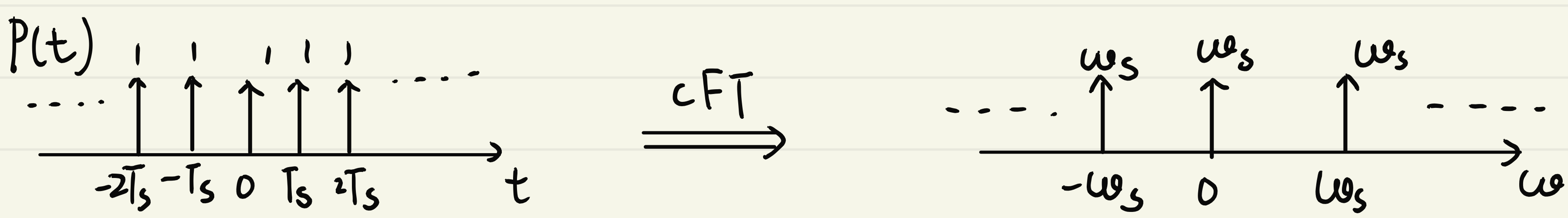
§6.6 抽样定理

对于一个带限于 ω_M 的基带信号 $x(t)$, $X(\omega)=0$, $|\omega| > \omega_M$.

如果我们用 $p(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_s)$ 的信号乘 $x_p(t) = x(t)\cdot p(t)$,

当 $T_s < \dfrac{\pi}{\omega_M}$ 时, $x(t)$ 可以用 $x_p(t)$ 无失真的恢复, T_s 也叫 Nyquist 抽样间隔

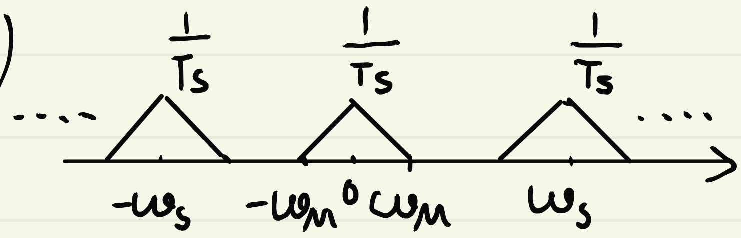




$p(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_s)$ 　　　　 $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s}$

$\omega_s \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - l\omega_s)$

$$x_p(t) = x(t)\cdot p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

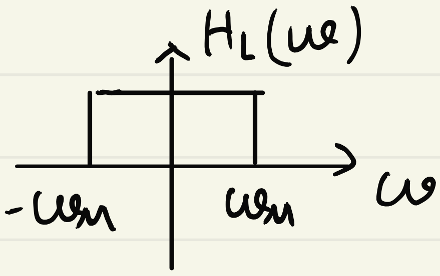


$\omega_s - \omega_M > \omega_M$

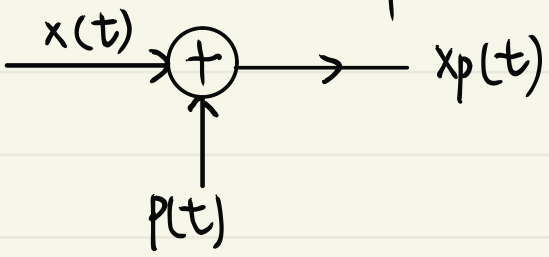
$\omega_s > 2\omega_M$

若要由 $x_p(t)$ 恢复 $x(t)$

只要在频域上乘以 $H_L(\omega)$



连续时间抽样



二.欠抽样

T_s 太大了，$T_s > \frac{\pi}{\omega_M}$ $\quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ 较小，导致 $\omega_s < 2\omega_M$

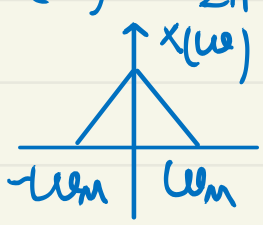
会出现频谱混叠，无法恢复 $x(t)$

例：若 $x(t)$ 是满足带限于 ω_M 的低通信号，对于以下信号进行抽样，为了能够从抽样序列恢复原信号，请问最大的抽样间隔是多少？

(1) $y_1(t) = x(t) + x(t-1)$ $\qquad$ (2) $y_2(t) = x^2(t)$

(1) $Y_1(\omega) = X(\omega) + X(\omega)\cdot e^{-j\omega} = X(\omega)\left[1 + e^{-j\omega}\right]$, $T_{1s} = \frac{\pi}{\omega_M}$

(2) $Y_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X(\omega)$



$X(\omega) * X(\omega)$ 带宽为 $-2\omega_M \sim 2\omega_M$

$\therefore T_{2s} = \frac{\pi}{2\omega_M}$

§6.7 对称性质

§6.7.1 对称性质

一、CFT 和 DTFT 的对称性质

如果 $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$ $\qquad$ $f[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{F}(\Omega)$

则：

$$f(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(-\omega) \qquad f[-n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{F}(-\Omega)$$

$$f^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F^*(-\omega) \qquad f^*[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{F}^*(-\Omega)$$

$$f^*(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F^*(\omega) \qquad f^*[-n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{F}^*(\Omega)$$

二、拉氏变换和z变换的对称性质

如果：

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s),\ \sigma_1 < Re\{s\} < \sigma_2 \qquad f[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} F(z) \quad r_1 < |z| < r_2$$

则

$$f(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(-s),\ -\sigma_2 < Re\{s\} < -\sigma_1 \qquad f[-n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} F\left(\frac{1}{z}\right) \quad \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

$$f^*(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F^*(s^*),\ \sigma_1 < Re\{s\} < \sigma_2 \qquad f^*[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} F^*(z^*) \quad r_1 < |z| < r_2$$

$$f^*(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F^*(-s^*),\ -\sigma_2 < Re\{s\} < -\sigma_1 \qquad f^*[-n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} F^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \quad \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

§6.7.2 时域对称性质与变换域对称之间的关系

一、时域上奇偶对称

如果：$f(t) = \pm f(-t)$ $\qquad$ $f[n] = \pm f[-n]$

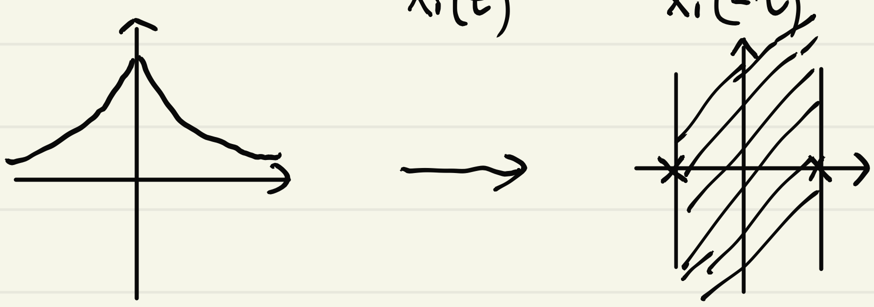
则：$F(\omega) = \pm F(-\omega)$ $\qquad$ $\tilde{F}(\Omega) = \pm \tilde{F}(-\Omega)$

$$F(s) = \pm F(-s) \quad -\sigma_0 < Re\{s\} < \sigma_0 \qquad F(z) = \pm F\left(\frac{1}{z}\right) \quad \frac{1}{r_0} < |z| < r_0$$

例：求 $e^{-a|t|}$, $Re\{a\}>0$ 的$\mathcal{L}$氏变换. $a^{|n|}$, $0<|a|<1$ 的z变换

$$x(t)=e^{-a|t|}=\underbrace{e^{-at}u(t)}_{x_1(t)}+\underbrace{e^{at}u(-t)}_{x_1(-t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}+\frac{1}{-s+a}=\frac{2a}{a^2-s^2}$$

$$Re\{a\}>Re\{s\}>Re\{-a\}$$



$$x[n]=a^{|n|}=a^{n}\cdot u[n]+a^{-n}u[-n]-\delta[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}+\frac{1}{1-az}-1$$

$$|a|<|z|<\frac{1}{|a|} \qquad =\frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$$

对于$\mathcal{L}$而言

z_i, $-z_i$

p_i, $-p_i$ 是成对出现的

对于z变换而言

z_i, $\frac{1}{z_i}$

p_i, $\frac{1}{p_i}$ 是成对出现的

二.时域上共轭对称、

如果：$f(t)=\pm f^*(t)$ $\qquad f[n]=\pm f^*[n]$

则：$F(\omega)=\pm F^*(-\omega)$ $\qquad \tilde{F}(\Omega)=\pm F^*(-\Omega)$

$F(s)=\pm F^*(s^*)$ $\qquad F(z)=\pm F^*(z^*)$

对于$\mathcal{L}$、z变换而言，如果z_i是零点，则z_i^*一定也是零点、
p_i是极点，则p_i^*一定也是极点、

也就是说，对于时域上的实(纯虚)的函数，其零极点如果是复数的话，一定是共轭的

三. 时域上是实偶及实奇函数

① 对于 $\mathcal{F}$ 而言

时域上是实偶的话，其频域上也是实偶的

实奇　　　　　　　　　　　　是纯虚的奇函数

② $\mathcal{L}$ 变换和 z 变换

对于 $\mathcal{L}$ 变换而言，

如果 z_i，一定 z_i^*，$-z_i$，$-z_i^*$ 一定也是像函数的零点

p_i，一定 p_i^*，$-p_i$，$-p_i^*$　　　　　　极点

收敛域一定是 $-\sigma < Re\{s\} < \sigma$

对于 z 变换而言，

如果 z_i，一定 z_i^*，$\frac{1}{z_i}$，$\frac{1}{z_i^*}$ 一定也是……零点

p_i，　p_i^*，$\frac{1}{p_i}$，$\frac{1}{p_i^*}$　　　　极点

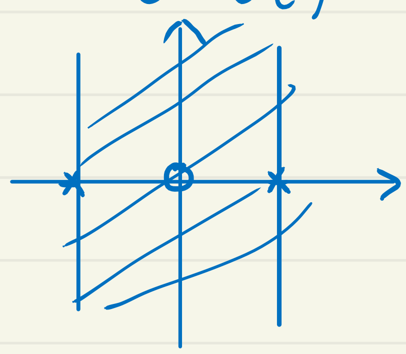
收敛域一定是 $\frac{1}{r_0} < |z| < r_0$

例：求 $e^{-a|t|}sgn(t)$，$Re\{a\}>0$ 的 $\mathcal{L}$ 变换

$a^{|n|}sgn[n]$，$|a|<1$ 的 z 变换

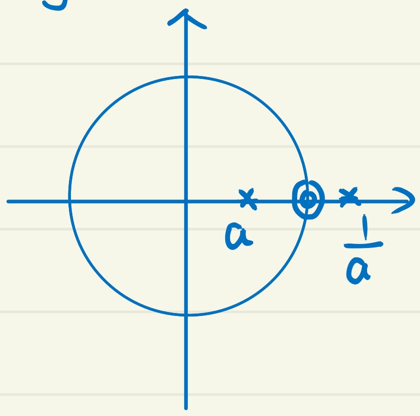
$$e^{-a|t|}sgn(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a} - \frac{1}{-s+a} = \frac{2s}{s^2-a^2}$$

$Re\{s\}>-a$　　$Re\{s\}<a$



$$a^{|n|}\mathrm{sgn}[n] = a^{n}u[n] - a^{-n}u[-n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-az} = \frac{1-z^{-2}}{(1-az^{-1})(1-a^{-1}z^{-1})}$$

$|z|>|a| \qquad |z|<\frac{1}{a}$



四.傅里叶变换的奇偶虚实特性

对于一个实函数(序列)如果求傅里叶变换

$$f(t) \xrightarrow{CFT} F_R(\omega) + jF_I(\omega)$$

$$f[n] \xrightarrow{DTFT} \tilde{F_R}(\Omega) + j\tilde{F_I}(\Omega)$$

另外如果 $f(t) = f_e(t) + f_o(t) \qquad f[n] = f_e[n] + f_o[n]$

其中 $f_e(\ )$、$f_o(\ )$ 分别为偶、奇分量 $\qquad f_e(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}$

则 $f_e(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_R(\omega) \qquad f_e[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{F_R}(\Omega) \qquad f_o(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$

$f_o(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} jF_I(\omega) \qquad f_o[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} j\tilde{F_I}(\Omega)$

§6.8 尺度变换性质

如果 $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \qquad \sigma_1 < Re\{s\} < \sigma_2$

$f(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad a\sigma_1 < Re\{s\} < a\sigma_2 \ , \ a>0$

$\qquad a\sigma_2 < Re\{s\} < a\sigma_1 \ , \ a<0$

$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$

$f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

§6.9 相关定理 和 Paswal定理、能量谱和功率谱

一、能量信号的相关定理

$R_{xv}(t) = x(t) * v^{T}(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)\cdot V^{*}(\omega)$ $\qquad R_x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} |X(\omega)|^2$

$R_{xv}[n] = x[n] * v^{T}[-n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \tilde{X}(\Omega)\cdot \tilde{V}^{*}(\Omega)$ $\qquad R_x[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} |\tilde{X}(\Omega)|^2$

$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ $\qquad R_x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 e^{j\omega t}\, d\omega$

$R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \cdot d\omega$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}_{\text{能量}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} |\tilde{X}(\Omega)|^2 d\Omega$$

$|X(\omega)|^2$、$|\tilde{X}(\Omega)|^2$ 能量谱密度

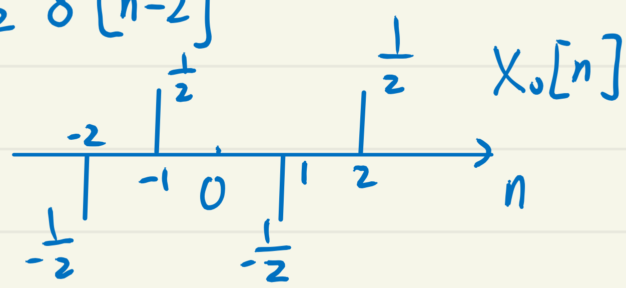
已知实序列 $x[n] \longrightarrow \tilde{X}(\Omega)$ (1) $x[n]=0,\ n>0$ (2) $x[0]>0$

(3) $\int_{\langle 2\pi\rangle} |X(\Omega)|^2 d\Omega = 12\pi$ (4) $x[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \tilde{R}(\Omega) + j\tilde{I}(\Omega)$, $\tilde{I}(\Omega) = \sin\Omega - \sin 2\Omega$

求 $x[n]$

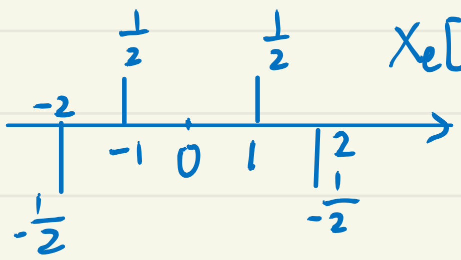
$x_o[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} j\tilde{I}(\Omega) = j\sin\Omega - j\sin 2\Omega = \frac{1}{2}e^{j\Omega} - \frac{1}{2}e^{-j\Omega} - \frac{1}{2}e^{2j\Omega} + \frac{1}{2}e^{-2j\Omega}$

$x_o[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] - \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n+2] + \frac{1}{2}\delta[n-2]$



由 $x[n]=0,\ n>0$

$\Rightarrow$



$x_e[n]$ 除$x[0]$

$\Rightarrow$ 除$x[0]$外 $x[-1]=1,\ x[-2]=-1,\ x[-n]=0$

又: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}|\tilde{X}(\Omega)|^2 d\Omega = 6$

$\therefore \Rightarrow x[0] = 2$

二. 功率信号的相关定理, Pasval 定理和功率谱

对于功率信号. $R_{xv}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}X_{2T}(\omega)\cdot V_{2T}^*(\omega)$

$R_{xv}[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\tilde{X}_{2N+1}(\Omega)\,V_{2N+1}^*(\Omega)$

对于自相关函数: $R_x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|X_{2T}(\omega)|^2$

$R_x[n] \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}|\tilde{X}_{2N+1}(\Omega)|^2$

功率谱密度

$$R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|X_{2T}(\omega)|^2}{2T}d\omega$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|X_{2T}(\omega)|^2}{2T}d\omega$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}\lim_{N\to\infty}\frac{|X_{2N+1}(\Omega)|^2}{2N+1}d\Omega$$

Pasval定理

§ 6.10 希尔伯特变换

一个因果的 $f(t)$. $f(t)=0$, $t<0$, 且在0点包含奇异函数, 也就是

$f(t) = f(t)\cdot u(t)$

如果: $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) = F_R(\omega) + jF_I(\omega)$

则 $F_R(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_I(\sigma)}{\omega-\sigma}d\sigma \qquad F_I(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_R(\sigma)}{\omega-\sigma}d\sigma$

希尔伯特

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_R(\omega) + jF_I(\omega) \qquad u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$F_R(\omega) + jF_I(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[F_R(\omega) + jF_I(\omega)\right] * \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[F_R(\omega) + jF_I(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\left[F_R(\omega) + jF_I(\omega)\right] * \frac{1}{j\omega}$$

$$F_R(\omega) = \frac{1}{\pi} F_I(\omega) * \frac{1}{\omega} \qquad F_I(\omega) = \frac{-1}{\pi} F_R(\omega) * \frac{1}{\omega}$$

§6.11 傅里叶变换和傅里叶级数的对偶性质

一. CFT 正反变换对偶性质

如果 $f(t) \xrightarrow{CFT} g(\omega)$ $\qquad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{g(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)e^{j\sigma t}\,d\sigma$

则 $g(t) \xrightarrow{CFT} 2\pi f(-\omega)$ $\qquad \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)\,e^{-j\omega\sigma}\,d\sigma$

① $1 \xrightarrow{CFT} 2\pi\delta(\omega)$

$\delta(t) \xrightarrow{CFT} 1$

② $R_\tau(t) \xrightarrow{CFT} \tau \, Sa\frac{\omega\tau}{2}$

$\frac{W}{\pi} Sa(Wt) \xrightarrow{CFT} R_{2W}(\omega)$

③ $sgn(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega}$

$\boxed{\frac{1}{\pi t} \xrightarrow{\mathcal{F}} -j\,sgn(\omega)}$ ※

90°相移器

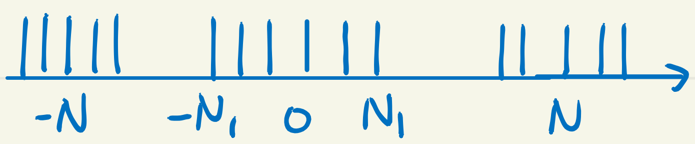
④ $u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$\frac{1}{2\pi}\left[\pi\delta(t) - \frac{1}{jt}\right] \xrightarrow{\mathcal{F}} u(\omega)$

二. DFS 正反变换的对偶性质

如果 $\tilde{x}[n] \xrightarrow{DFS} \tilde{F}_k$

$\tilde{f}[n] \xrightarrow{DFS} \frac{1}{N}\tilde{x}_{-k}$



$\xrightarrow{DFS} \frac{1}{N} \dfrac{\sin\frac{(2N+1)k\Omega_0}{2}}{\sin\frac{k\Omega_0}{2}}$

$$\frac{\sin\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)n\Omega_0}{\sin\frac{n}{2}\Omega_0} \xrightarrow{DFS} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_{2N_1+1}[k - lN]$$

三、CFS与DTFT正反变换的对偶关系

如果 $f[n] \xrightarrow{DTFT} \tilde{g}(\Omega)$ ← 2π为周期

则 $\tilde{g}(t) \xrightarrow{CFS} f_{-k}$ $\qquad \tilde{g}(\frac{2\pi}{T}t) \xrightarrow{CFS} f_{-k}$ ← 周期为T

证明 $f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \tilde{g}(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$ ⇐DTFT的反变换

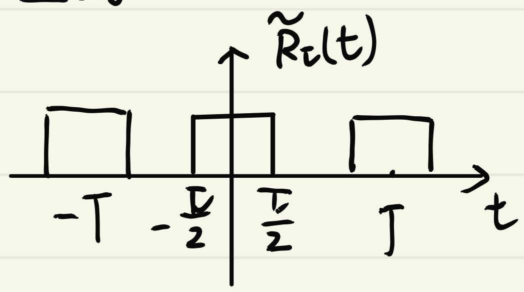
$$CFS\{\tilde{g}(\tfrac{2\pi}{T}t)\} = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} \tilde{g}(\tfrac{2\pi t}{T}) e^{-jk\omega_0 t} dt \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\overset{\text{令}\frac{2\pi}{T}t=\tau}{\underset{t=\frac{\tau T}{2\pi}}{=\!=\!=}} \frac{1}{T}\int_{\langle 2\pi\rangle} \tilde{g}(\tau) e^{-jk\frac{2\pi}{T}\tau\cdot\frac{T}{2\pi}} d\tau \cdot \frac{T}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \tilde{g}(\tau) e^{-jk\tau} \cdot d\tau = f_{-k} = f[-k]$$

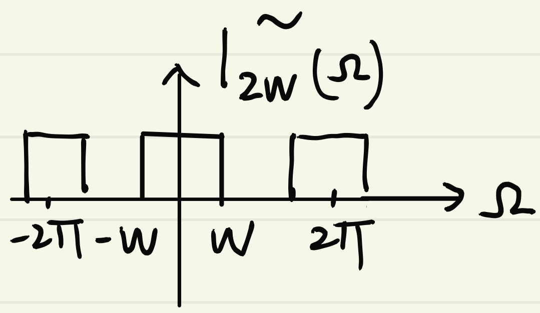
一样的，只是写法不同

典型的

① 

$\xrightarrow{CFS}$ $F_k = \frac{\tau}{T} Sa\frac{k\omega_0\tau}{2} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$\wr$

$\frac{W}{\pi} Sa(Wn) \xrightarrow{DTFT}$ 

§6.12 L氏变换和Z变换的初值和终值定理

一、初值定理

对于一个因果的$f(t)$，也就是$f(t)=0, t<0$，且在0处没有冲激函数，

如 $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$，则：$\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

$f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s)$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{0^+} f'(t)e^{-st}dt + \int_{0^+}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

$$= f(0^+) - \underset{0}{\underset{\parallel}{f(0^-)}} + \int_{0^+}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = sF(s)$$

$$f(0^+) + \underbrace{\lim_{s\to\infty}\int_{0^+}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt}_{=0} = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\therefore \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

对于一个因果的 $f[n]$，即 $f[n]=0$，$n<0$，如果 $f[n] \xrightarrow{z} F(z)$

则：$f[0] = \lim_{z\to\infty} F(z)$

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} = f[0]$$

二、终值定理

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$f(0^+) + \lim_{s\to 0}\int_{0^+}^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$= f(0^+) + \int_{0^+}^{+\infty} f'(t)\lim_{s\to 0} e^{-st}dt$$

$$= f(0^+) + f(+\infty) - f(0^+) = f(\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} f[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

$$f[n+1] - f[n] \xrightarrow{z} (z-1)F(z)$$

$$z\{f[n+1]-f[n]\} = \sum_{n=-1}^{\infty}\left(f[n+1]-f[n]\right)z^{-n}$$

$$= f[0]z + \sum_{n=0}^{\infty}\left(f[n+1]-f[n]\right)z^{-n}$$

$$\lim_{z\to 1} f[0]z + \sum_{n=0}^{\infty}\left(f[n+1]-f[n]\right)z^{-n}$$

$$= f[0] + (f[1]-f[0]) + (f[2]-f[1]) \cdots$$

$$= f(\infty)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

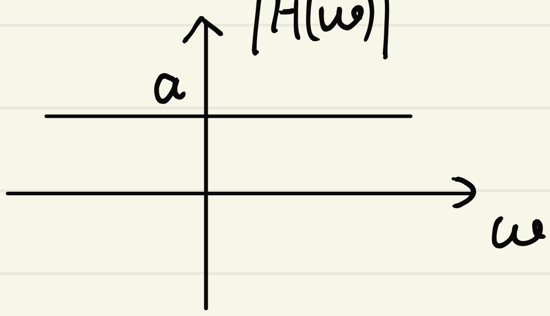
第七章 在通信中的应用

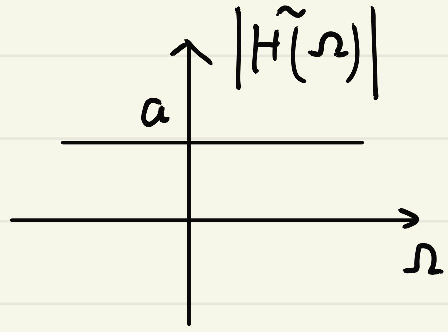
§7.2 信号无失真传输

$y(t) = a x(t-t_0)$ $\qquad$ $y[n] = a x[n-n_0]$

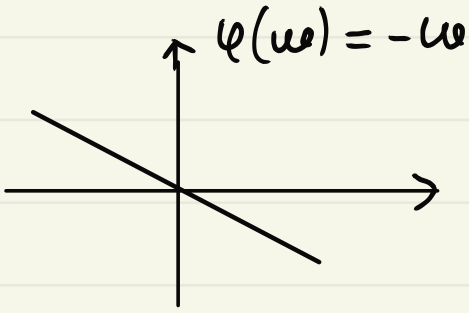
信号无失真传输，也就是 $h(t) = a\delta(t-t_0)$，$h[n] = a\delta[n-n_0]$

$H(\omega) = a e^{-j\omega t_0}$ $\qquad$ $\tilde{H}(\Omega) = a e^{-j\Omega n_0}$

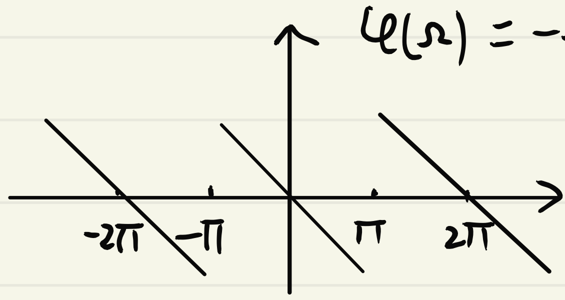




$\varphi(\omega) = -\omega t_0$

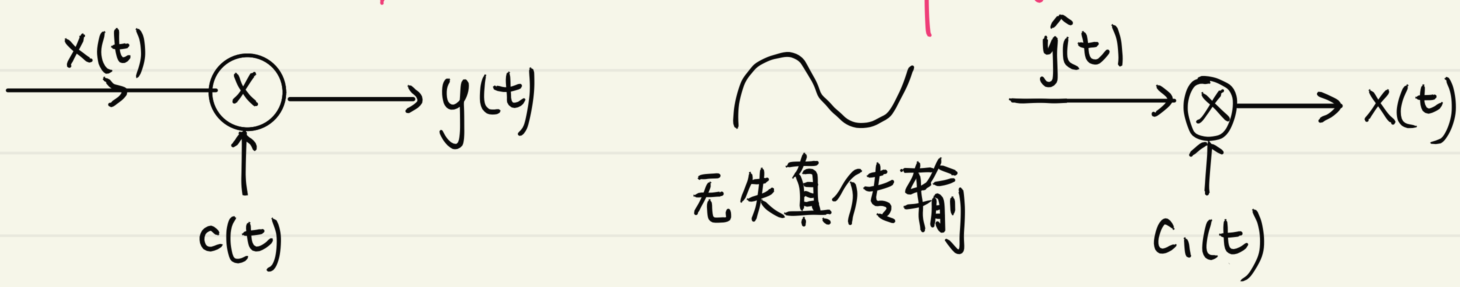


$\tilde{\varphi}(\Omega) = -\Omega n_0$

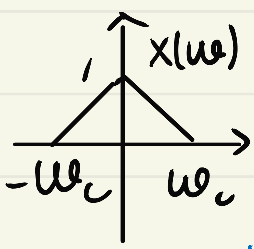


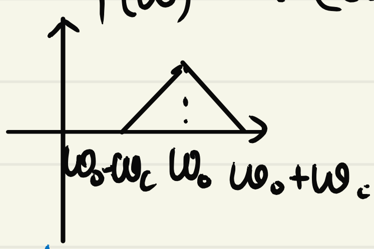
工程上，只要在信号有用的范围内做到无失真传输就可以了

§7.4 正弦幅度调制与相干解调



① $c(t) = e^{j\omega_0 t}$ $\qquad$ $y(t) = x(t)\cdot e^{j\omega_0 t}$ $\qquad$ $Y(\omega) = X(\omega-\omega_0)$





$\hat{y}(t)\, e^{-j\omega_0 t} = x(t)\cdot e^{j\omega_0 t}\cdot e^{-j\omega_0 t} = x(t)$

② $c(t) = \cos\omega_0 t$

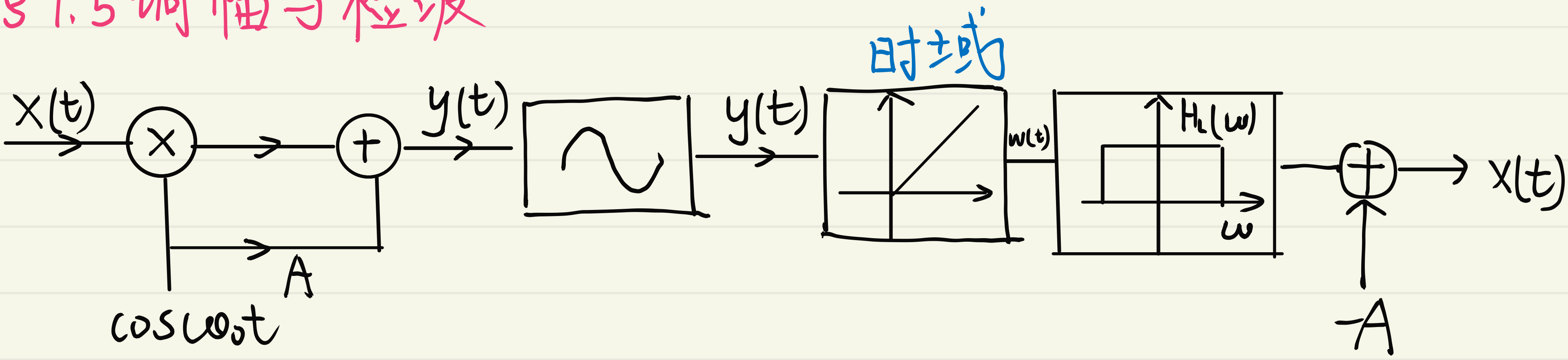
$y(t) = x(t)\cdot\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}x(t)\cdot e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)\cdot e^{-j\omega_0 t}$

$Y(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)$

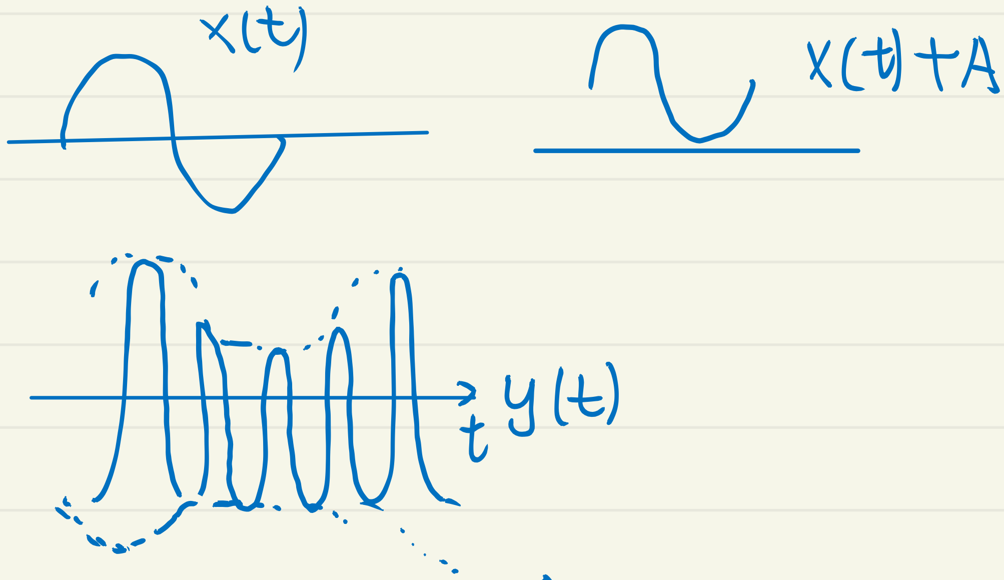
$\hat{y}(t) = y(t)$ $\quad$ $\hat{y}(t)\cos\omega_0 t = x(t)\cos\omega_0 t + \cos\omega_0 t$

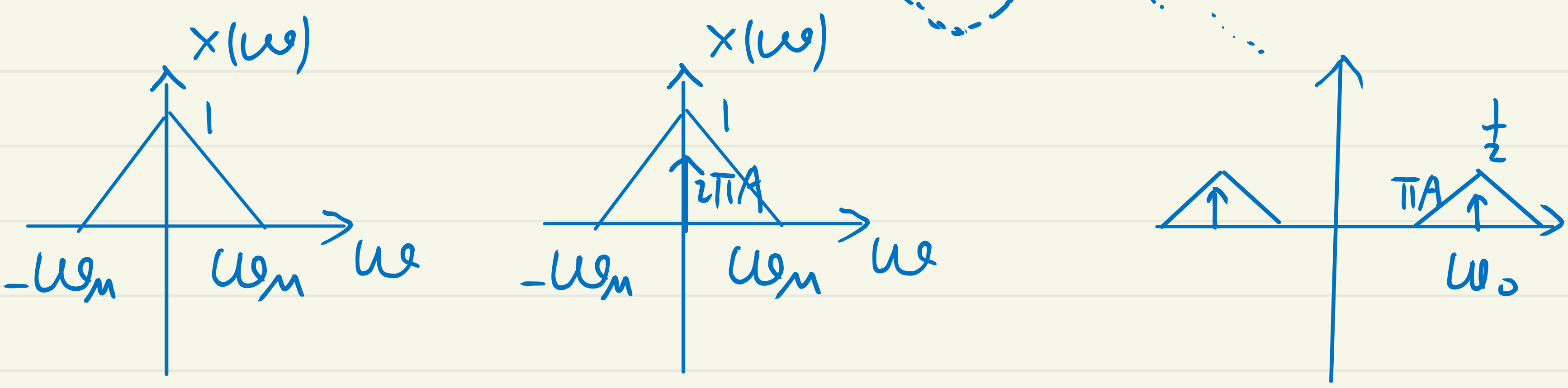
$$= \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos 2\omega_0 t$$

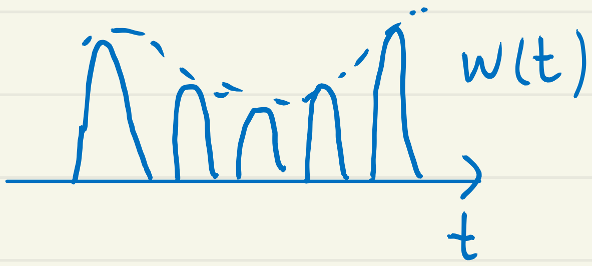
§7.5 调幅与检波



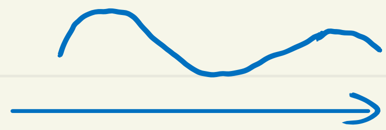
$$y(t) = (x(t)+A)\cos\omega_0 t$$



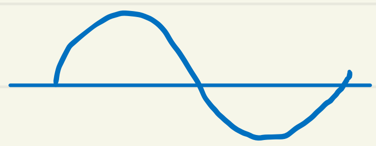




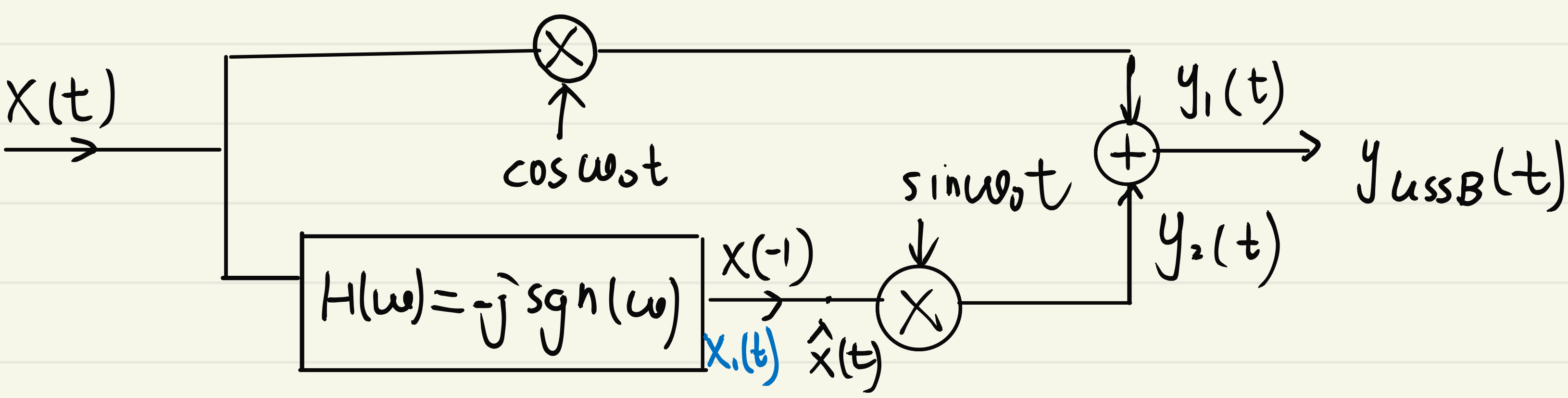
再通过低频滤波器 ⇒



再 −A ⇒

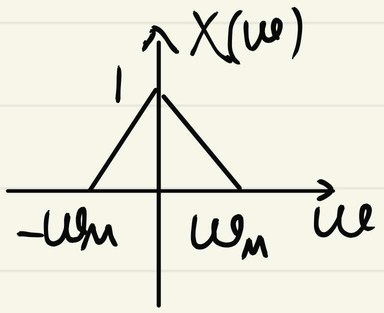


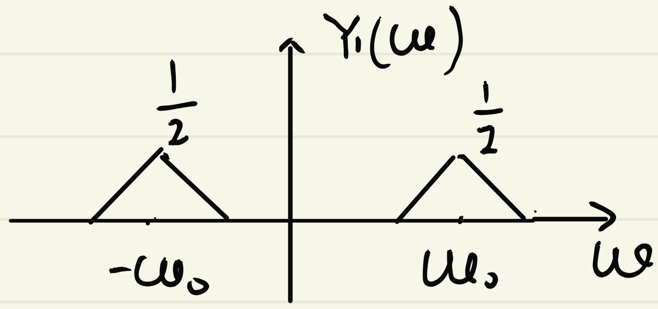
§7.6 单边带调制



$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \xrightarrow{\mathcal{F}} -j\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

$$y_1(t) = x(t)\cdot\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}$$

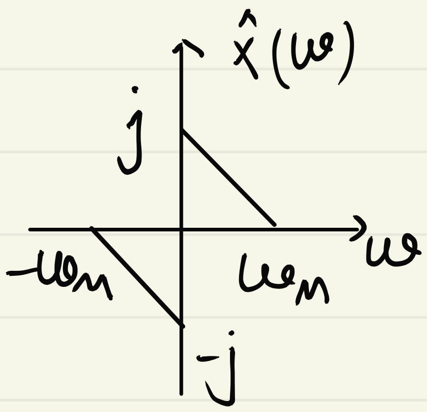


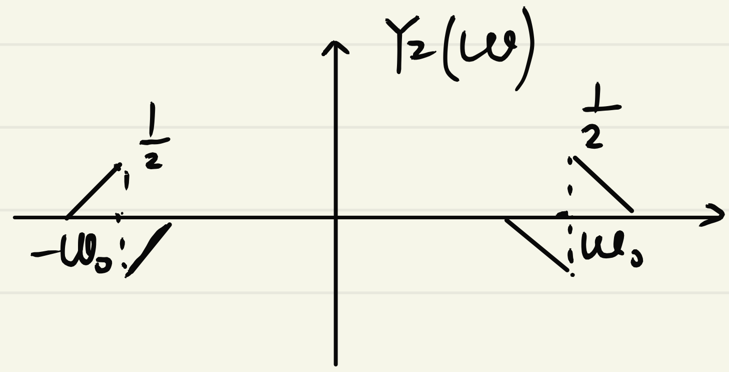


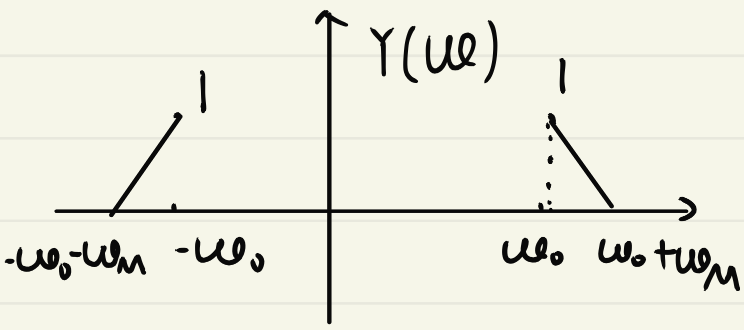
$$\hat{x}(t) = x_1(-t)$$

$$y_2(t) = \hat{x}(t)\cdot\sin\omega_0 t = \frac{j}{2}\hat{x}(t)e^{-j\omega_0 t} - \frac{j}{2}\hat{x}(t)e^{j\omega_0 t}$$

$$Y_2(\omega) = \frac{j}{2}\hat{X}(\omega+\omega_0) - \frac{j}{2}\hat{X}(\omega-\omega_0)$$

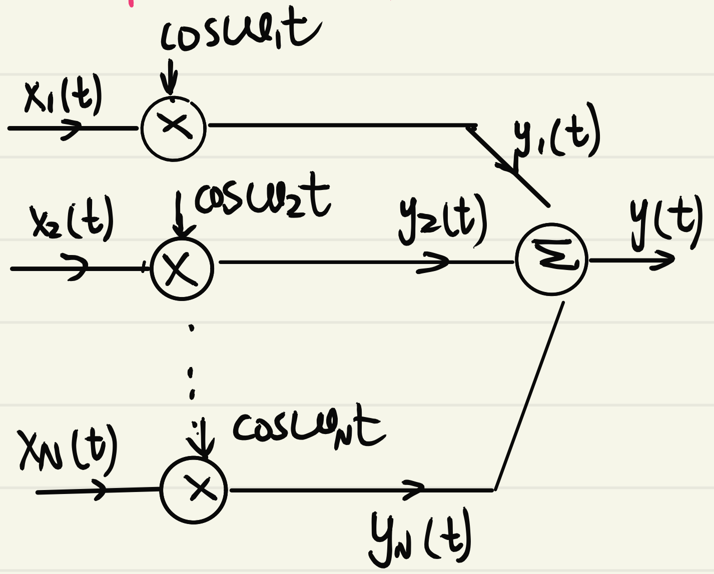


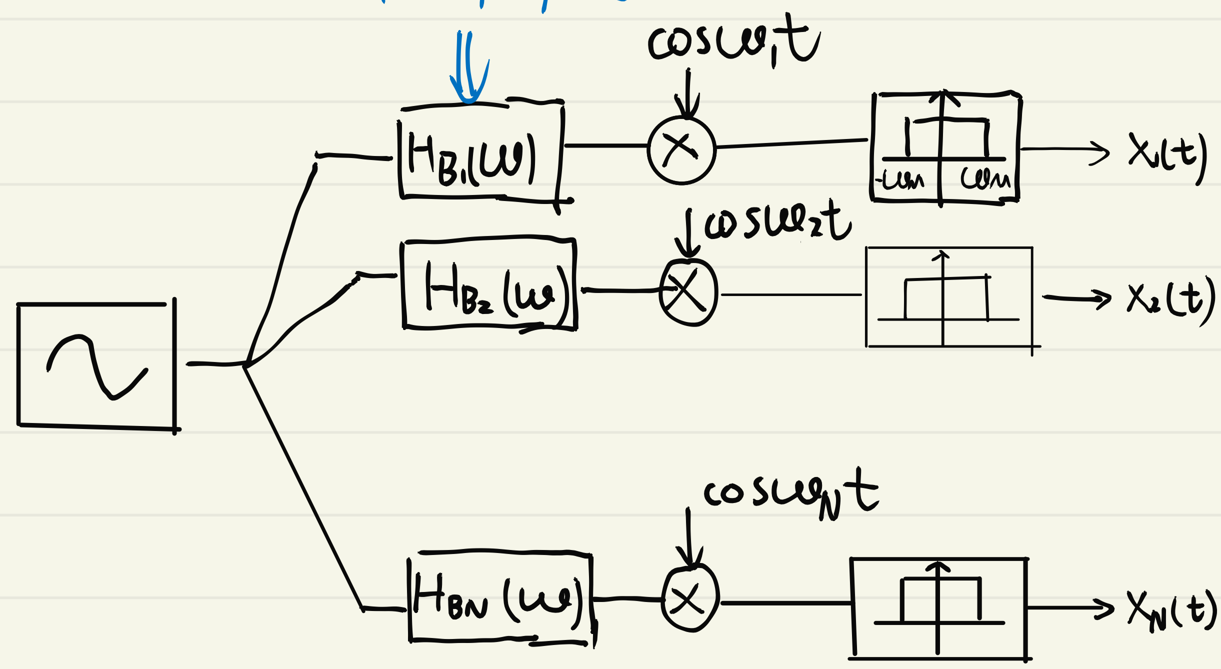




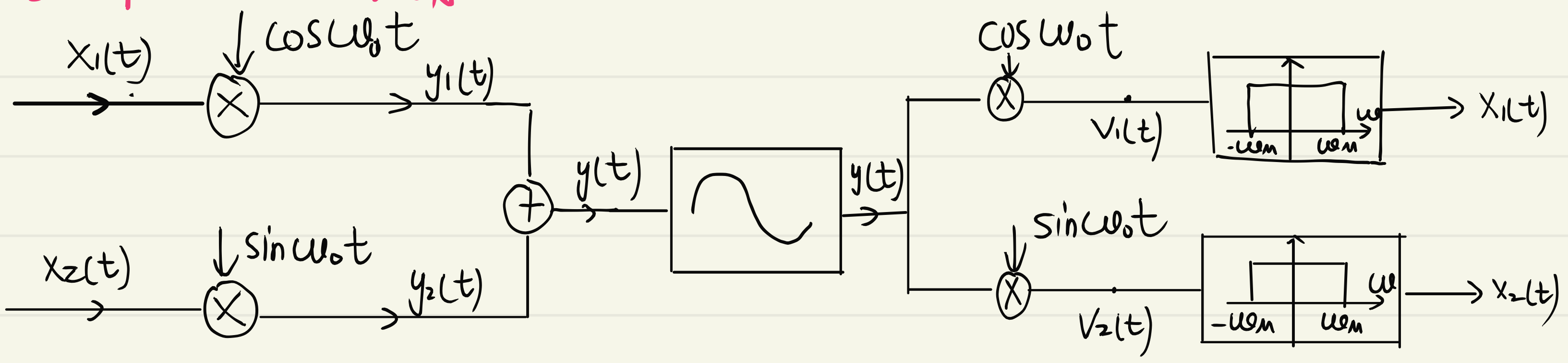
§7.9 多路复用

带通滤波器 只选出某一频段的





§7.9.2 正交复用



$y(t) = x_1(t)\cos\omega_0 t + x_2(t)\sin\omega_0 t$

解调端

$v_1(t) = y(t)\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}x_1(t)\cdot\cos 2\omega_0 t + \frac{1}{2}x_2(t)\sin 2\omega_0 t$

频域上: 0附近　　$2\omega_0$附近　　$2\omega_0$附近

再低通滤波 → $x_1(t)$

$v_2(t) = y(t)\sin\omega_0 t = \frac{1}{2}x_1(t)\sin 2\omega_0 t + \frac{1}{2}x_2(t) - \frac{1}{2}x_2(t)\cos 2\omega_0 t$

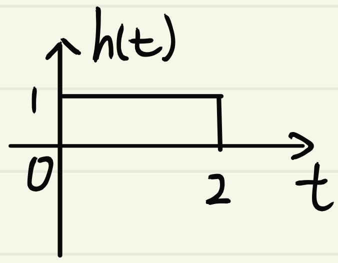
第八章 系统的变换域分析与综合

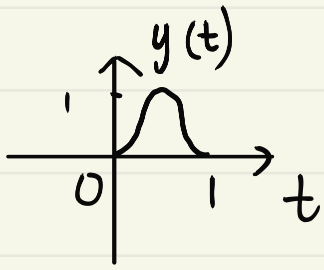
§8.2 LTI 系统的变换域分析

$x(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) H(\omega)$ $\quad x(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) H(s)$，$ROC \supset R_x \cap R_h$

$x[n] * h[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{X}(\Omega) \tilde{H}(\Omega)$ $\quad x[n] * h[n] \xrightarrow{z} X(z) H(z)$ $ROC \supset R_x \cap R_h$

例1. 已知 LTI





$h(t) = u(t) - u(t-2)$

$h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}(1 - e^{-2s})$

极点 0 会被 $z_i = jk\pi, k=0$ 时消掉

∴ 收敛域为有限 s 平面

$y(t) = \sin\pi t \cdot [u(t) - u(t-1)]$

$= \sin\pi t \cdot u(t) + \sin\pi(t-1) \cdot u(t-1)$

$y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\pi}{s^2+\pi^2}[1 + e^{-s}]$ 也是有限 s 平面

极点 $\pm j\pi$，$2kj\pi$

$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{\pi s}{s^2+\pi^2} \frac{1+e^{-s}}{1-e^{-2s}} = \frac{\pi s}{s^2+\pi^2} \cdot \frac{1}{1-e^{-s}}$$

$\mathrm{Re}\{s\} > 0$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi s}{s^2+\pi^2} \cdot e^{-ks}$$

$$\frac{\pi s}{s^2+\pi^2} e^{-ks} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \pi \cos\pi(t-k)\, u(t-k)$$

例2. 已知 $x[n] = a^n u[n]$，输入到因果 LTI 系统，输出为 $y[n] = b^n u[n]$，求 $h[n]$

$x[n] = a^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$

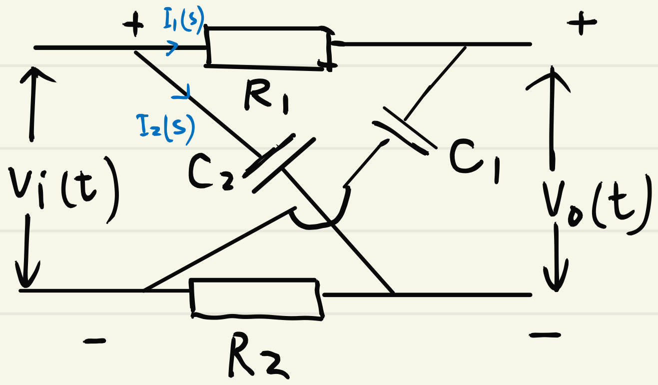
$y[n] = b^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-bz^{-1}} \quad |z| > |b|$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-az^{-1}}{1-bz^{-1}} \quad |z| > |b|$$

$$= 1 + \frac{(b-a)z^{-1}}{1-bz^{-1}}$$

$$h[n] = \delta[n] + (b-a)\, b^{n-1} u[n-1]$$

例：

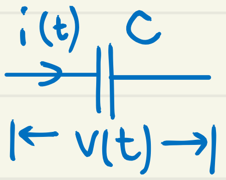


求系统的 $H(s)$

$$V_o(s) = I_1(s)R_1 - I_2(s)\frac{1}{C_2 s}$$

$$I_1(s)R_1 + I_1(s)\frac{1}{C_1 s} = V_i(s)$$

$$I_2(s)\frac{1}{C_2 s} + R_2 I_2(s) = V_i(s)$$

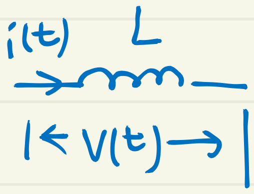


$$i(t) = C\frac{d}{dt}v(t)$$

拉氏变换

$$I(s) = CsV(s)$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$$



$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$$

$$V(s) = LsI(s)$$

$$\Rightarrow I_1(s) = \frac{V_i(s)}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} \qquad I_2(s) = \frac{V_i(s)}{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}$$

$$V_o(s) = V_i(s)\frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} - V_i(s)\frac{1}{C_2 s\left[R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right]}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_1 C_1 s}{1 + R_1 C_1 s} - \frac{1}{1 + R_2 C_2 s}$$

课后 8.22

$$y(t) = \delta(t) - 6e^{-t}u(t) + \frac{2}{34}e^{4t}\left(e^{3jt} + e^{-3jt}\right) + \frac{9}{34j}e^{4t}\left(e^{3jt} - e^{-3jt}\right)$$

$$= \delta(t) - 6e^{-t}u(t) + \alpha e^{(4+3j)t} + \beta e^{(4-3j)t}$$

输入 $x(t) = \delta(t) + r e^{(4+3j)t} + \eta e^{(4-3j)t}$

又∵ $e^{s_0 t} \xrightarrow{H(s)} H(s_0)e^{s_0 t}$

$\therefore \Rightarrow h(t) = \delta(t) - 6e^{-t}u(t)$

$$H(s) = 1 - \frac{6}{s+1} = \frac{s-5}{s+1}$$

8.2.3 用方程描述的LTI系统的变换域分析

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k x^{(k)}(t) \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

起始松弛条件下，转化为因果 LTI 系统

$$y^{(k)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^k Y(s) \qquad y[n-k] \xrightarrow{Z} z^{-k} Y(z)$$

$$x^{(k)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^k X(s) \qquad x[n-k] \xrightarrow{Z} z^{-k} X(z)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{N} b_k s^k X(s) \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$H(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t) \qquad H(z) \xrightarrow{Z^{-1}} h[n]$$

§8.2.5 部分分式展开法求反变换

$$F(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_0} \quad R_F$$

$$= \sum_{l=0}^{M-N} C_l s^l + \frac{\beta_{N-1} s^{N-1} + \beta_{N-2} s^{N-2} + \cdots + \beta_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_0} . \quad R_F$$

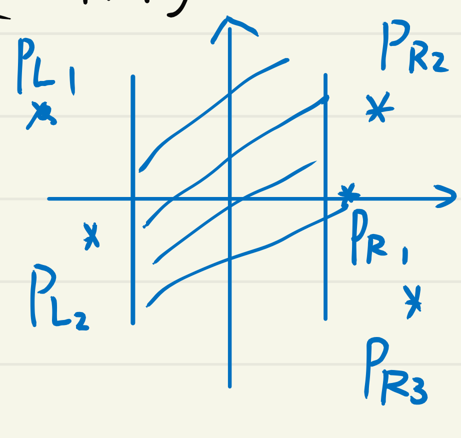
分别有 r 个 σ_i 阶重根

$$= \sum_{l=0}^{M-N} C_l s^l + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{A_{ik}}{(s-p_i)^k} \quad R_F$$

$$= \sum_{l=0}^{M-N} C_l s^l + \sum_{i=1}^{r_L} \sum_{k=1}^{\sigma_{Li}} \frac{A_{Lik}}{(s-P_{Li})^k} + \sum_{i=1}^{r-r_L} \sum_{k=1}^{\sigma_{Ri}} \frac{A_{Rik}}{(s-P_{Ri})^k}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{l=0}^{M-N} C_l \delta^{(l)}(t) + \sum_{i=1}^{r_L} \sum_{k=1}^{\sigma_{Li}} \frac{A_{Lik} \cdot t^{k-1}}{(k-1)!} e^{P_{Li} t} u(t)$$

$$- \sum_{i=1}^{r-r_L} \sum_{k=1}^{\sigma_{Ri}} \frac{A_{Rik} \cdot t^{k-1}}{(k-1)!} e^{P_{Ri} t} u(-t)$$



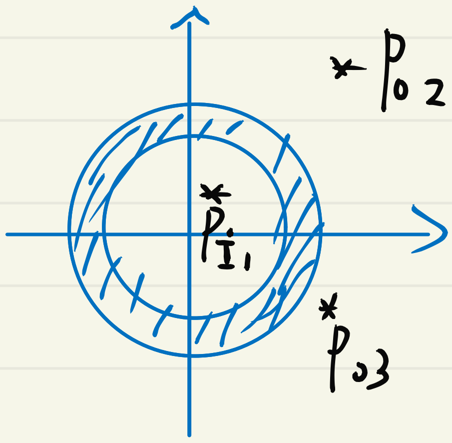
收敛域左边 P_{Li} 对应一个右边的时域函数

右边 P_{Ri} 　　　　　　　左边

$$F(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}}$$

$$=\sum_{l=0}^{M-N}C_lz^{-l}+\frac{\beta_0+\beta_1z^{-1}+\cdots+\beta_{N-1}z^{-(N-1)}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}$$

$$=\sum_{l=0}^{M-N}C_lz^{-l}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{\sigma_i}\frac{B_{ik}}{(1-p_iz^{-1})^k}\quad R_F$$



$$=\sum_{l=0}^{M-N}C_lz^{-l}+\sum_{r=1}^{r_I}\sum_{k=1}^{\sigma_{Ii}}\frac{B_{Iik}}{(1-p_{Ii}z^{-1})^k}+\sum_{r=1}^{r-r_I}\sum_{k=1}^{\sigma_{oi}}\frac{B_{oik}}{(1-p_{oi}z^{-1})^k}$$

$$f[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}=\sum_{l=0}^{M-N}C_l\delta[n-l]+\sum_{i=1}^{r_I}\sum_{k=1}^{\sigma_{Ii}}\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}B_{Iik}p_{Ii}^{n}u[n]$$
$$-\sum_{r=1}^{r-r_I}\sum_{k=1}^{\sigma_{oi}}\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}B_{oik}p_{oi}^{n}u[-n-1]$$

4.11 (f) $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=2x(t)*e^{-2t}u(t)$

两边拉氏 $\quad (s^2+4s+3)Y(s)=2X(s)\cdot\frac{1}{s+2}$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{2}{(s+2)(s^2+4s+3)}=\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3}=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

$$H(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=e^{-t}u(t)-2e^{-2t}u(t)+e^{-3t}u(t)$$

4.12 (e) $y[n]-\frac{3}{2}y[n-1]+\frac{1}{2}y[n-2]=x[n]*u[n]+x[n]$

两边Z变换 $\left(1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)Y(z)=X(z)+X(z)\frac{1}{1-z^{-1}}$

$\cancel{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}(1-z^{-1})\,Y(z)=X(z)\,\frac{2\cancel{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}}{1-z^{-1}}$

因果LTI

∴为右边序列

$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{(1-z^{-1})^2}$

$h[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}=2(n+1)u[n]$

§8.3 用方程描述的因果系统的复频域求解

§8.3.1 单边L变换和单边Z变换

$$\begin{cases}\mathcal{L}_u\{f(t)\}=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt\\ f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F_u(s)e^{st}\cdot ds,\quad t>0_-,\ \sigma\in R_{oc}\end{cases}$$

$$\begin{cases}Z_u\{f[n]\}=\sum_{n=0}^{\infty}f[n]z^{-n}\\ f[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint F_u(z)z^{n-1}dz\quad n\geq 0,\ c\in R_{oc}\end{cases}$$

$\mathcal{L}_u\{f(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)u_{0^-}(t)\}$ $\qquad Z_u\{f[n]\}=Z\{f[n]u[n]\}$

单边变换的收敛域可以不写 原因见课本 P_{365} (3)

例：求 $e^{-a(t+1)}u(t+1)$ 的双边及单边拉氏变换

$a^{n+1}u[n+1]$ 的双边及单边Z氏变换

$e^{-a(t+1)}u(t+1)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{e^{s}}{s+a}\qquad Re\{s\}>Re\{-a\}$

$\mathcal{L}_u\{e^{-a(t+1)}u(t+1)\}=\int_0^{\infty}e^{-a(t+1)}e^{-st}\cdot dt=e^{-a}\int_0^{\infty}e^{-(s+a)t}\cdot dt=\frac{e^{-a}}{s+a}$

$$a^{n+1}u[n+1] \xrightarrow{Z} \frac{z}{1-az^{-1}}$$

$$a^{n+1}u[n+1] \xrightarrow{Z_u} \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} = \frac{a}{1-az^{-1}}$$

§8.3.2 单边拉氏/z变换的性质

一. 单边z变换的时移性质

$$y[n] \xrightarrow{Z_u} Y_u(z)$$

$$y[n-n_0] \xrightarrow{Z_u} z^{-n_0}\left[Y_u(z) + \sum_{k=1}^{n_0} y[-k]\cdot z^{k}\right]$$

$$\boxed{y[n-n_0] \xrightarrow{Z_u} \sum_{n=0}^{\infty} y[n-n_0] z^{-n} = z^{-n_0} Y_u(z) + \sum_{k=1}^{n_0} y[-k] z^{-(n_0-k)} \quad , n_0 \geq 1}$$

$$y[n+n_0] \xrightarrow{Z_u} z^{n_0} Y_u(z) - \sum_{k=0}^{n_0-1} y[k] z^{(n_0-k)} \quad , n_0 \geq 1$$

二. 单边拉氏变换的微分性质

$$y'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}_u} \int_{0^-}^{\infty} y'(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dy(t) = y(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} y(t)\, dt$$

$$= sY_u(s) - y(0_-)$$

$$\boxed{y^{(k)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}_u} s^k Y_u(s) - \sum_{l=0}^{k-1} s^{k-1-l} y^{(l)}(0_-)}$$

§8.3.3 零状态响应和零输入响应的复频域求解

一. 微分方程

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t) \\ y^{(k)}(0_-) = C_k \ , \ k=0,1,\cdots N-1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_u\{y^{(k)}(t)\} = s^k Y_u(s) - \sum_{l=0}^{k-1} s^{k-1-l} y^{(l)}(0_-)$$

$$\mathcal{L}_u\{x^{k}(t)\} = s^k X_u(s)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y_u(s) - \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{k-1} a_k s^{k-1-l} y^{(l)}(0_-) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X_u(s)$$

$$\therefore Y_u(s) = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} X_u(s)}_{\text{零状态响应 } Y_{uzs}(s)} + \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{k-1} a_k s^{k-1-l} y^{(l)}(0_-)}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}}_{\text{零输入响应 } Y_{uzi}(s)}$$

例：$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = x'(t) + 2x(t)$ $\quad y'(0_-) = y(0_-) = 1$，求 $x(t) = e^{-2t}u(t)$ 时的 $y_{zi}(t)$ 和 $y_{zs}(t)$

$$[s^2 Y_u(s) - s y(0_-) - y'(0_-)] + 4[s Y_u(s) - y(0_-)] + 3 Y_u(s)$$

$$s^2 Y_u(s) - s y(0_-) - y'(0_-) + 4 s Y_u(s) - 4y(0_-) + 3 Y_u(s) = (s+2) X_u(s)$$

$$Y_u(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} X_u(s) + \frac{s+5}{s^2+4s+3}$$

$$= \frac{1}{s^2+4s+3} + \frac{s+5}{s^2+4s+3}$$

$$Y_{uzs}(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} \cdot X_u(s) = \frac{1}{s^2+4s+3} = \frac{\frac{1}{2}}{s+1} - \frac{\frac{1}{2}}{s+3}$$

$$\Rightarrow y_{zs}(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) - \frac{1}{2} e^{-3t} u(t)$$

$$Y_{uzi}(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

$$\Rightarrow y_{zi}(t) = 2e^{-t}u(t) - e^{-3t} \cdot u(t)$$

二、差分方程

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \\ y[-k] = C_k, \quad k=1,2,\cdots N \end{cases}$$

$$Z_u\{y[n-k]\} = z^{-k} Y_u(z) + \sum_{l=1}^{k} y[-l] z^{-(k-l)}$$

$$Z_u\{x[n-k]\} = z^{-k} X_u(z)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y_u(z) + \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{k} a_k y[-l] z^{-(k-l)} = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X_u(z)$$

$$Y_u(z) = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} X_u(z)}_{\text{零状态响应}} - \underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{k} a_k y[-l] z^{-(k-l)}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}}_{\text{零输入响应}}$$

例： $y[n]+\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]+3x[n-1]$

$y[0]=1,\ y[-1]=-6$，$x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$，求 $y_{zi}[n]$、$y_{zs}[n]$

$$y[n-2]=8\left\{x[n]+3x[n-1]-y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]\right\}\Rightarrow y[-2]=36$$

$$Y_u(z)+\frac{3}{4}\left[z^{-1}Y_u(z)+y[-1]\right]+\frac{1}{8}\left[z^{-2}Y_u(z)+z^{-1}y[-1]+y[-2]\right]$$

$$Y_u(z)+\frac{3}{4}z^{-1}Y_u(z)+\frac{3}{4}\times(-6)+\frac{1}{8}z^{-2}Y_u(z)+\frac{1}{8}\times z^{-1}\times(-6)+\frac{1}{8}\times(36)=(1+3z^{-1})X_u(z)$$

$$Y_u(z)=\frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}X_u(z)+\frac{\frac{3}{4}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

$$Y_{uzs}(z)=\frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{5}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{11}{3}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow y_{zs}[n]=\frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-5\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$Y_{uzi}(z)=\frac{\frac{3}{4}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{-3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow y_{zi}[n]=\left[3\left(-\frac{1}{4}\right)^n-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

§8.4 系统函数和频率响应表征的LTI系统的特性

一. 记忆性和无记忆性

无记忆: $h(t) = c\,\delta(t)$ $\qquad h[n] = c\,\delta[n]$

满足: $H(s) = C$. RH是整个s平面 $\qquad H(z) = C$ 整个z平面

$H(\omega) = C$ $\qquad \tilde{H}(\Omega) = C$

否则系统是有记忆的

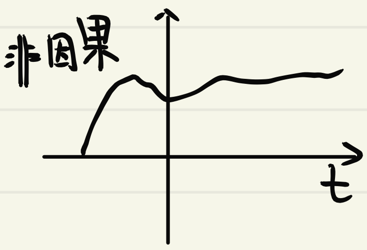
二. 因果性和非因果性

因果性: $h(t) = 0 \quad t<0$ $\qquad h[n]=0, \ n<0$

L氏变换的收敛域满足 $Re\{s\} > \sigma_0$ $\qquad$ z变换的收敛域满足 $\infty \geq |z| > r_0$

系统是因果的

非因果



$\rightarrow$ 收敛域不含∞

如果 $h(t)$ 中不含 $\delta^{(k)}(t)$ $(k \geq 1)$ $\quad \int_{-2}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$

因果

$\rightarrow$ 收敛域包含∞, 即为 $\sigma_0 < Re\{s\} \leq \infty$

三. 稳定性

稳定的 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$ $\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

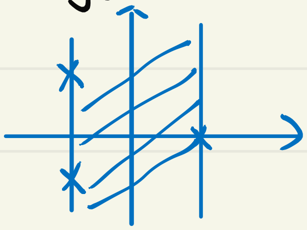
如果其频率响应 $H(\omega)$、$\tilde{H}(\Omega)$ 满足狄利赫里条件 或者说有严格意义的 $H(\omega)$ / $\tilde{H}(\Omega)$, 则系统是稳定的

$1 \xrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$ $\qquad 1 \longrightarrow 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi l)$

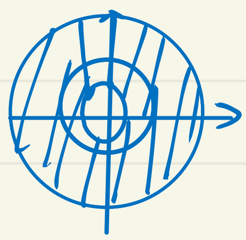
对于L氏变换而言, 如果收敛域包含虚轴, 则系统是稳定的

Z $\qquad$ 单位圆

否则, 系统是不稳定的



$\rightarrow H(s)\big|_{s=j\omega} = H(\omega)$

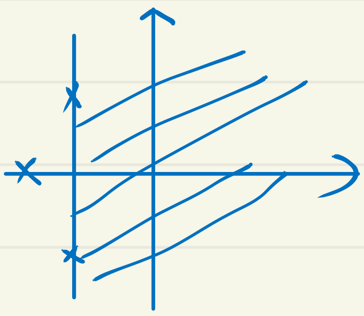


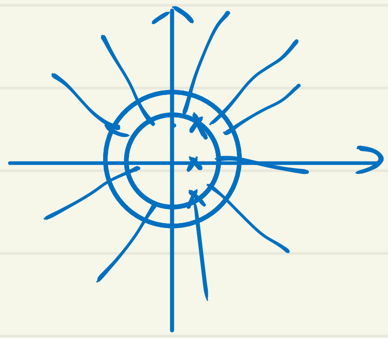
$\rightarrow H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = \tilde{H}(\Omega)$

对于实验的有工程价值的系统(既因果又稳定)

①对于 s 变换而言,所有极点都位于虚轴左侧

② z ,单位圆里面



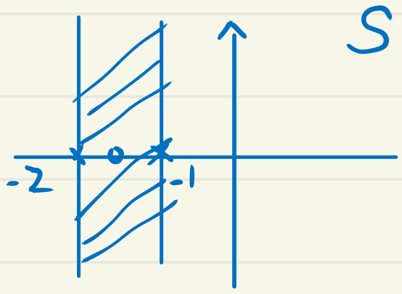


四 可逆性和逆系统

如果一个 $H(s)$ / $H(z)$ 中收敛域中不包含零点,系统是可逆的

且 $H_I(s) = \frac{1}{H(s)}$ $\qquad H_I(z) = \frac{1}{H(z)}$

例: $H(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$, $-2 < Re\{s\} < -1$



$$e^{-\frac{3}{2}t} \xrightarrow{H(s)} H(s)\Big|_{s=-\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}t} = 0$$

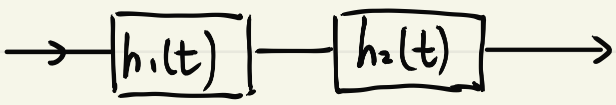
$$0 \xrightarrow{H(s)} 0$$

两个不同输入,输出却相同

不可逆

§8.4.2 LTI系统互联的系统函数和频率响应

一、级联



$H(s) = H_1(s)H_2(s)$ $\quad R_H \supset R_1 \cap R_2$ $\qquad H(z) = H_1(z)H_2(z)$ $\quad R_H \supset R_1 \cap R_2$

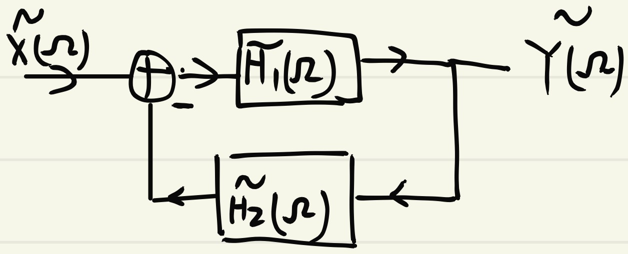
$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)$ $\qquad \tilde{H}(\Omega) = \tilde{H}_1(\Omega)\cdot\tilde{H}_2(\Omega)$

二、并联

$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$ $\quad R_H \supset R_1 \cap R_2$ $\qquad H(z) = H_1(z) + H_2(z)$ $\quad R_H \supset R_1 \cap R_2$

$H(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega)$ $\qquad \tilde{H}(\Omega) = \tilde{H}_1(\Omega) + \tilde{H}_2(\Omega)$

三. 反馈互联



$$[\tilde{X}(\Omega) - \tilde{H}_2(\Omega)\tilde{Y}(\Omega)]\,\tilde{H}_1(\Omega) = \tilde{Y}(\Omega)$$

$$\tilde{X}(\Omega)\tilde{H}_1(\Omega) = \tilde{Y}(\Omega)[1+\tilde{H}_1(\Omega)\tilde{H}_2(\Omega)]$$

$$\tilde{H}(\Omega) = \frac{\tilde{Y}(\Omega)}{\tilde{X}(\Omega)} = \frac{\tilde{H}_1(\Omega)}{1+\tilde{H}_1(\Omega)\tilde{H}_2(\Omega)}$$

同理 $H(z) = \dfrac{H_1(z)}{1+H_1(z)H_2(z)}$

$$H(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{1+H_1(\omega)H_2(\omega)} \qquad H(s) = \frac{H_1(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}$$

§8.5 系统函数与LTI时域和频域的关系

对于典型的LTI系统，比如用方程描述的系统，其 $H(s)/H(z)$ 的函数形式是有理多项式的形式，我们来具体分析其时域，频域特性

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad H(z) = \frac{P^{-1}(z)}{Q^{-1}(z)}$$

§8.5.1 系统函数的零极点分布决定单位冲激响应的时域特征

(1) 如果拉氏变换的零极点关于原点对称，且 $-\sigma_0<\mathrm{Re}\{s\}<\sigma_0$，则 $h(t)$ 一定是一个奇函数或偶函数

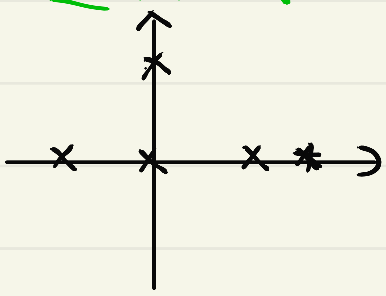
如果z变换的零极点关于单位圆镜像对称，且 $\frac{1}{r_0}<|z|<r_0$，则 $h[n]$ 一定是一个奇序列或偶序列.

(2) 如果系统函数的零极点是共轭对称的，则 $h(t)/h[n]$ 一定是一个实函数/实序列（~~也可以是纯虚函数/序列~~）我们不考虑.

§8.5.2 系统函数的极点决定 $h(t)/h[n]$ 的函数形式

虚轴上点

一、连续时间



$$\frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t)$$

$$\frac{1}{s^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t u(t)$$

$$\frac{1}{s-a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{at} u(t)$$

$$\frac{1}{(s-a)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t e^{at} u(t)$$

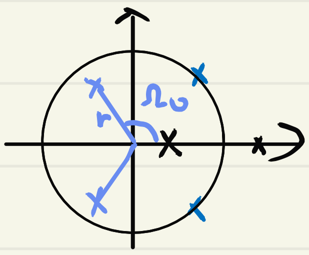
$$\cos \omega_0 t \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\sin \omega_0 t \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$t \cos \omega_0 t \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0^2 - s^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$$

$$e^{at} \cos \omega_0 t \cdot u(t) \rightarrow$$

二、离散时间



$a^n u[n]$ 一阶

$(n+1) a^n u[n]$ 二阶

$\begin{cases} \cos \Omega_0 n \cdot u[n] \\ \sin \Omega_0 n \cdot u[n] \end{cases}$ 一阶

$\begin{cases} (n+1) \cos \Omega_0 n \cdot u[n] \\ (n+1) \sin \Omega_0 n \cdot u[n] \end{cases}$ 2阶

$\begin{cases} r^n \cos \Omega_0 n \cdot u[n] \\ r^n \sin \Omega_0 n \cdot u[n] \end{cases}$ 1阶

$\begin{cases} (n+1) r^n \cos \Omega_0 n \cdot u[n] \\ (n+1) r^n \sin \Omega_0 n \cdot u[n] \end{cases}$ 2阶

§8.5.3 自由响应、强迫响应、暂态响应和稳态响应

一、系统极点、源极点

$$Y(s) = X(s) H(s) \qquad Y(z) = X(z) H(z)$$

由 $H(s)$、$H(z)$ 引入的零极点、分别称为系统零点、系统极点

$X(s)$、$X(z)$ ... 源零点、源极点、

二、自由响应、强迫响应

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_{Hi}}{s-p_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{A_{xi}}{s-q_i}$$

p_i、q_i 分别为系统极点、源极点、

由系统极点导致的输出叫做自由响应，由源极点导致的响应叫做强迫响应

例：$y'(t) + 2y(t) = x(t)$，在 $x(t) = e^{-2t}$ 的输出

$$H(s) = \frac{1}{s+2} \qquad Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$y(t) = t e^{-2t} \cdot u(t)$$

既是自由响应，也是强迫响应

三、暂态响应、稳态响应

$$y(t)=y_T(t)+y_S(t) \qquad y[n]=y_T[n]+y_S[n]$$

其中暂态响应 $y_T(t)/y_T[n]$ 满足 $\lim\limits_{t\to\infty} y_T(t)=0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_T[n]=0$

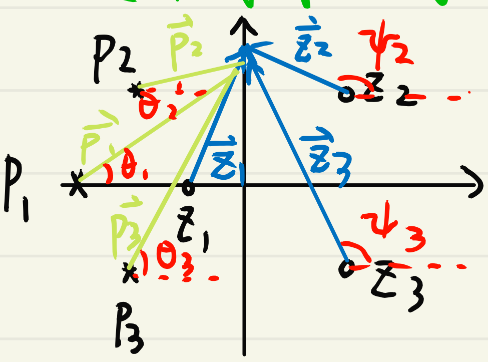
稳态响应 $y_S(t)/y_S[n]$ 在 $t/n\to\infty$ 不为零

§8.5.4 系统零极点确定LTI系统频率响应

特指 分子/分母是有理多项式

$$H(s)=H_0\frac{\prod\limits_{i=1}^{M}(s-z_i)}{\prod\limits_{i=1}^{N}(s-p_i)} \qquad H(z)=H_0\frac{\prod\limits_{i=1}^{M}(z-z_i)}{\prod\limits_{i=1}^{N}(z-p_i)}$$

一、连续时间s域



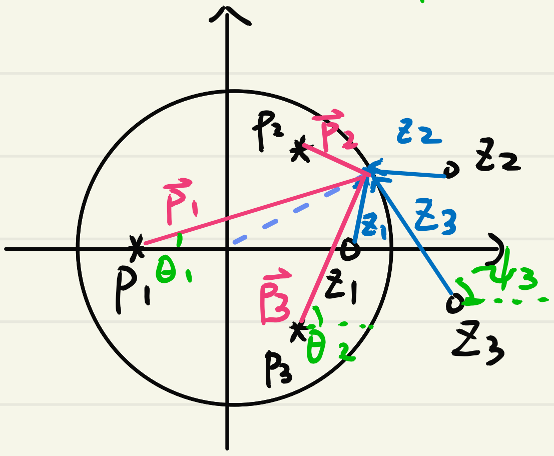
$$H(s)\Big|_{s=j\omega}=H_0\frac{\prod\limits_{i=1}^{M}(j\omega-z_i)}{\prod\limits_{i=1}^{N}(j\omega-p_i)}$$

$$H(\omega)=H_0\frac{\prod\limits_{i=1}^{M}\vec{z_i}}{\prod\limits_{i=1}^{N}\vec{p_i}}$$

幅频响应 $|H(\omega)|=|H_0|\frac{\prod\limits_{i=1}^{M}|\vec{z_i}|}{\prod\limits_{i=1}^{N}|\vec{p_i}|}$

相频响应 $\varphi(\omega)=\sum\limits_{i=0}^{M}\psi_i-\sum\limits_{i=1}^{N}\theta_i$

二、离散时间z平面上由 $H(z)$ 求 $\tilde{H}(\Omega)$

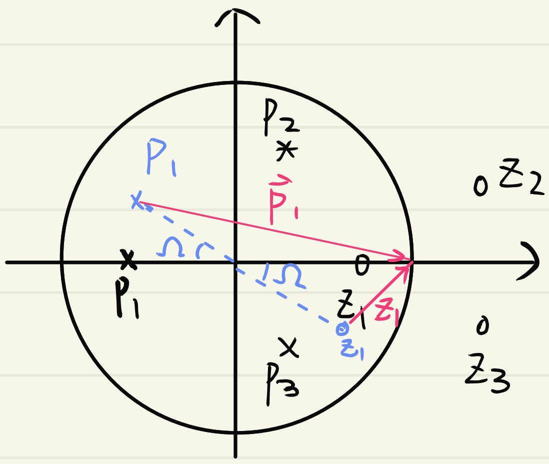


$$\tilde{H}(\Omega)=H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}=H_0\frac{\prod_{i=1}^{M}(e^{j\Omega}-z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(e^{j\Omega}-p_i)}$$

幅频响应 $|\tilde{H}(\Omega)|=|H_0|\frac{\prod_{i=1}^{M}|\vec{z}_i|}{\prod_{i=1}^{N}|\vec{p}_i|}$

相频响应 $\tilde{\varphi}(\Omega)=\sum_{i=0}^{M}\psi_i-\sum_{i=1}^{N}\theta_i$

如果 $H(z)=H_0\frac{\prod_{i=1}^{M}(1-z_iz^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1-p_iz^{-1})}$



$$\tilde{H}(\Omega)=H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}=H_0\frac{\prod_{i=1}^{M}(1-z_ie^{-j\Omega})}{\prod_{i=1}^{N}(1-p_ie^{-j\Omega})}$$

$z_ie^{-j\Omega}$

z_i 顺时针转 Ω

幅频响应：$|\tilde{H}(\Omega)|=|H_0|\frac{\prod_{i=1}^{M}|\vec{z}_i|}{\prod_{i=1}^{N}|\vec{p}_i|}$

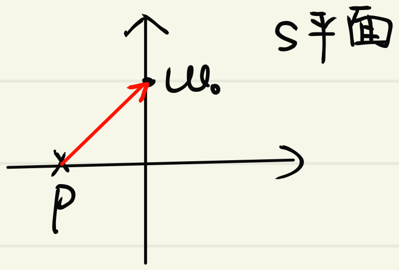
相频响应：$\tilde{\varphi}(\Omega)=\sum_{i=0}^{M}\psi_i-\sum_{i=1}^{N}\theta_i$

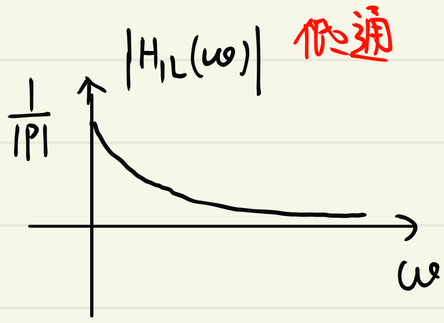
§8.6 连续时间和离散时间一阶/二阶系统

§8.6.1 一阶系统

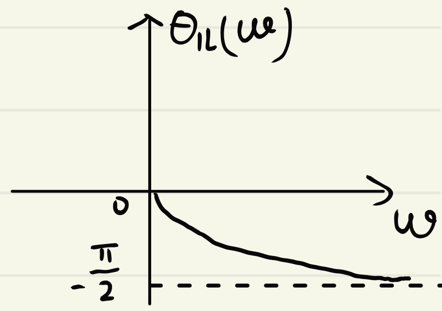
一、连续时间

$H(s)=\frac{1}{s-p}$

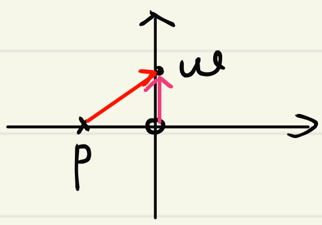


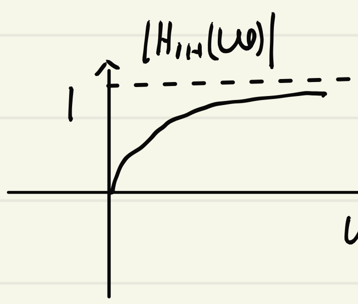


低通

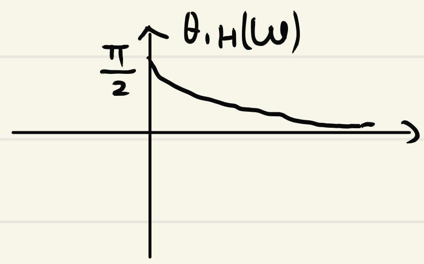


$H(s)=\frac{s}{s-p}$





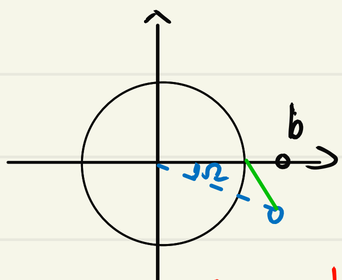
高通

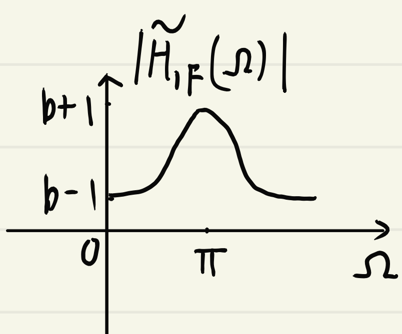


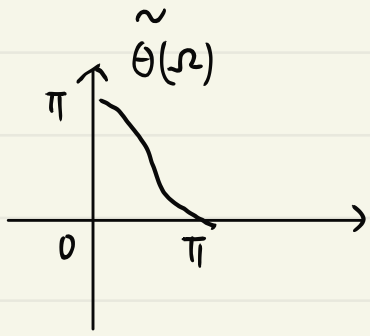
二、离散时间

$y[n]=x[n]-bx[n-1]$

$H(z)=1-bz^{-1}$



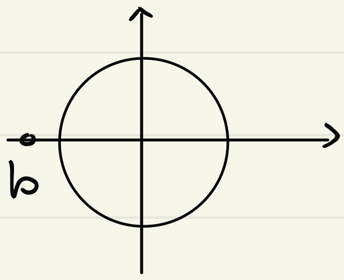


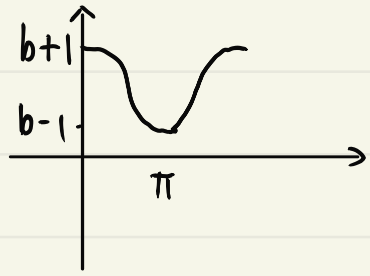


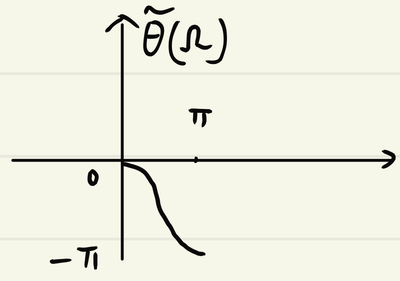
实函数 $\Longrightarrow$ F变换

模函数是偶函数

相频　　　奇

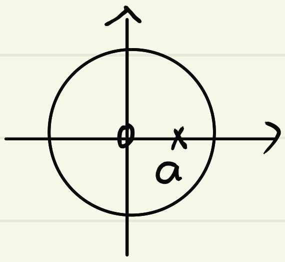


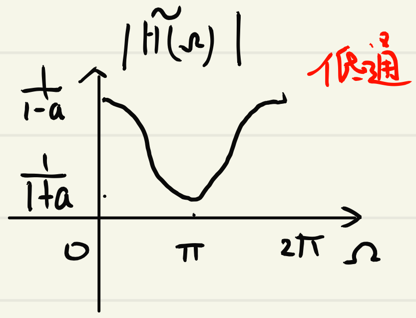


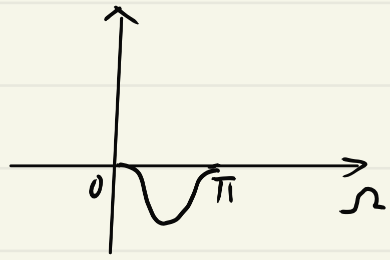


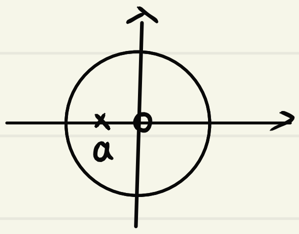
$y[n]-ay[n-1]=x[n]$

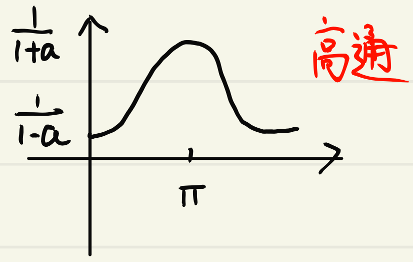
$H_{IIR}(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$

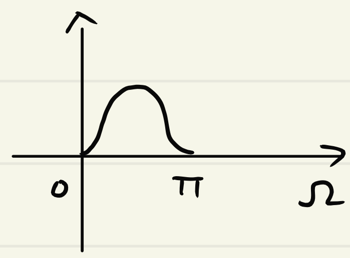








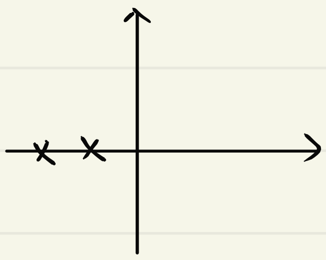


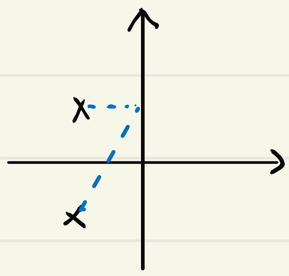


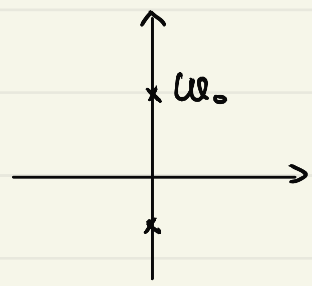
§8.6.2 二阶系统

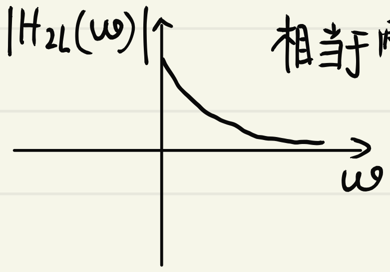
一、连续时间 二阶全极点系统

①

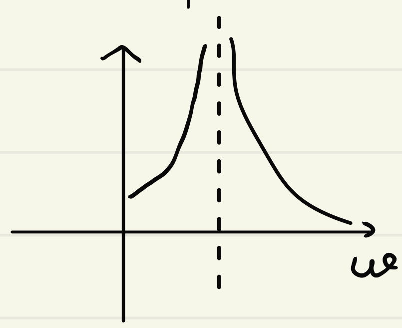


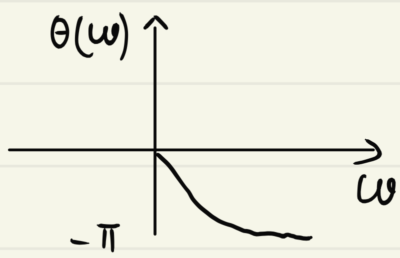


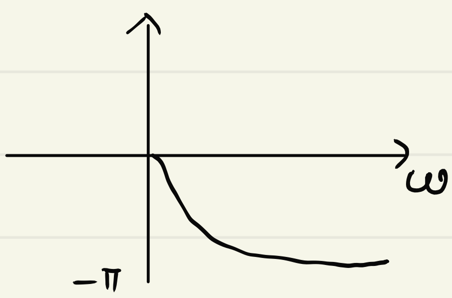


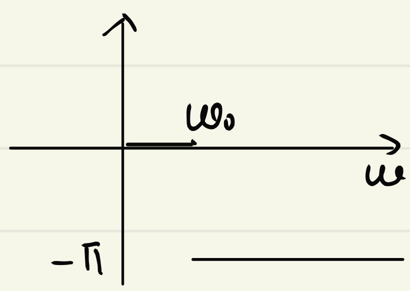


相当于两个一阶系统级联

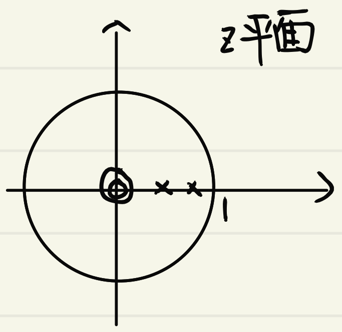


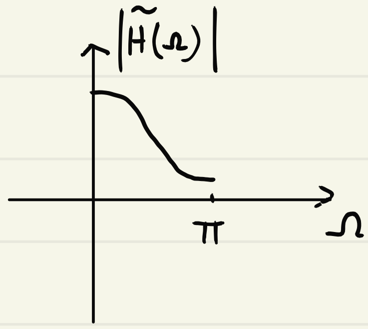


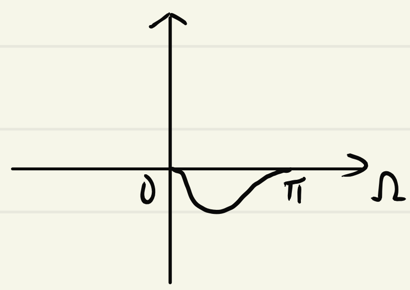


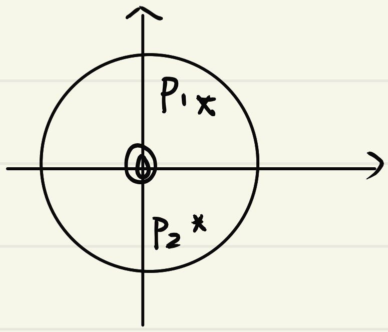


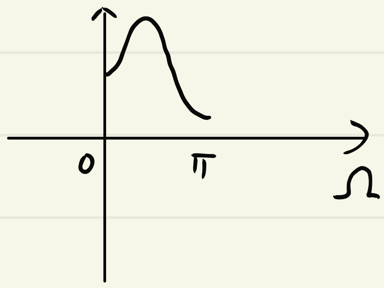
二、离散时间二阶全极点系统

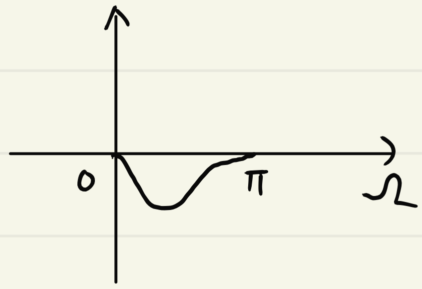








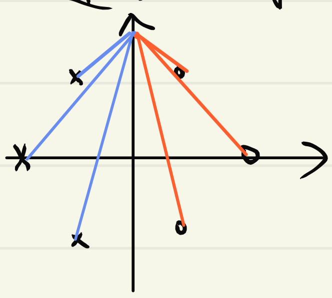




§8.7 全通系统和最小相移系统

§8.7.1 全通系统

一. 连续时间



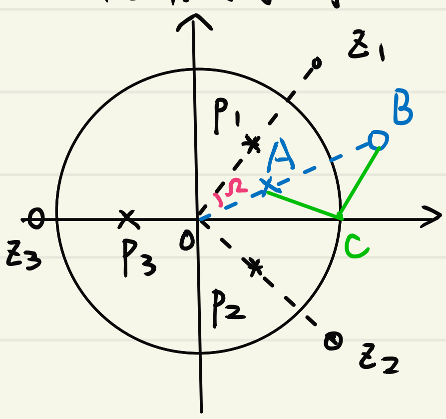
连续时间的全通系统零极点关于虚轴镜像对称

$$H_{ap}(s) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{M}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(s-p_i)} \Rightarrow \text{幅频响应是一个常数}$$

	$\omega=0$		$\omega=\infty$		
一对实的零极点	零点	极点	零点	极点	$\omega=0\to\infty$
	π	0	$\frac{\pi}{2}\downarrow$	$\frac{\pi}{2}\uparrow$	相位减少π
四个共轭的零极点	0	0	$-\pi\downarrow$	$\pi\uparrow$	相位减少2π

总计有 N 个零点(极点)，在 ω 由 $0\to\infty$ 变化时，相位单调减少 $N\pi$

二. 离散时间 全通系统



离散时间全通系统零极点关于单位圆镜像对称

$OP_1 = OA = r_0 \qquad OB = OZ_1 = \frac{1}{r_0}$ $\qquad OP_i \times OZ_i = 1$

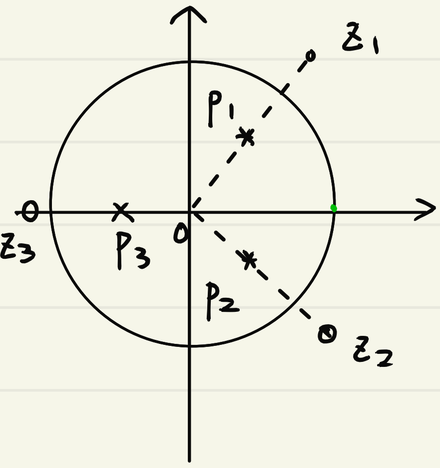
$OA \cdot OB = OC^2$

$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OB}$ 又$\because$ $\triangle AOC$、$\triangle BOC$ 共 $\angle AOC$

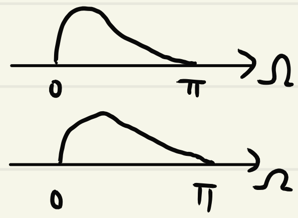
$\therefore \triangle AOC \sim \triangle COB$

$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{OA}{OC} = r_0$ 与 Ω 无关

对于 $\forall\Omega$，幅频响应是一个常数



	$\Omega=0$	$\Omega=\pi$
实极点	0	0
共轭极点	0	0
实零点	0	$-\pi$
共轭零点	0	-2π

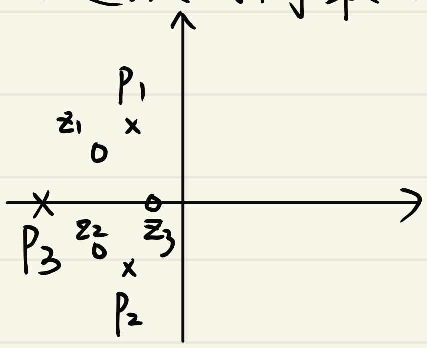


如果有N个零点(极点)，在Ω由0→π变化时，整个系统的相位减少Nπ

在同阶的系统中(最多有N个极点或零点)具有最大的群延时

§8.7.2 最小相移系统

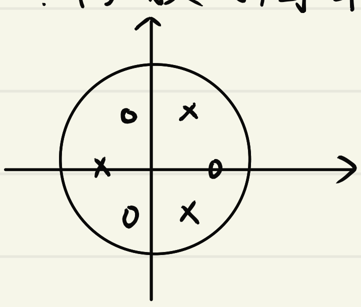
一、连续时间最小相移系统



所有的零极点都位于虚轴左半平面，工程上一般零点数等于极点数

	$\omega=0$	$\omega=\infty$
相位	0	0

二、离散时间最小相移系统



所有的零极点都位于单位圆内，工程上一般零点数等于极点数

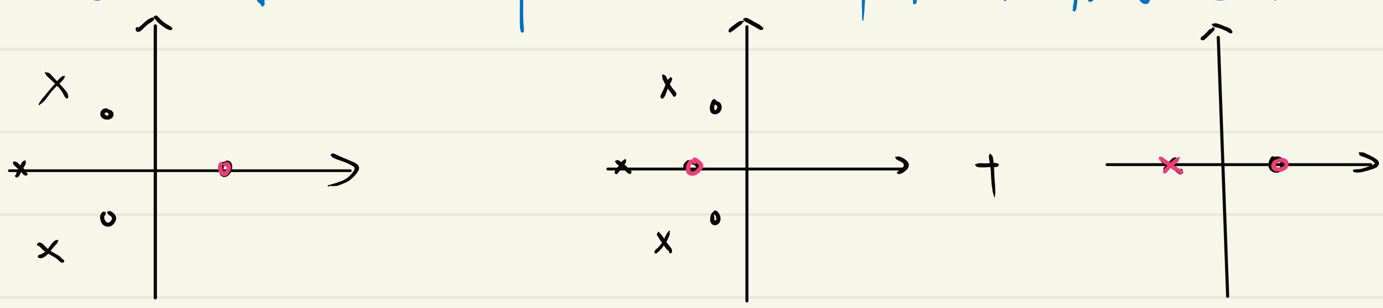
	$\Omega=0$	$\Omega=\pi$
相位	0	0

性质：

① 最小相移系统的逆系统仍是最小相移系统

② 最小相移系统在同阶系统中具有最小的群延时

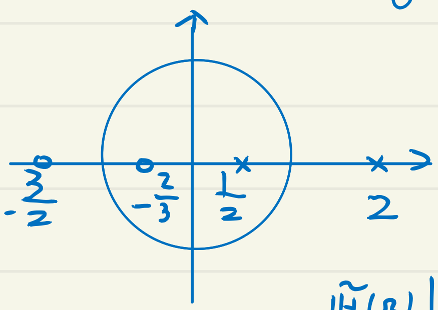
③ 任意的一般系统，都可以表示为一个最小相移系统和全通系统的级联



例：画出 $y[n]+\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{3}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]-3x[n-2]$ 幅频特性

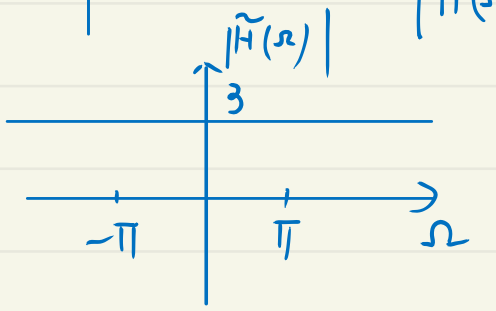
$$Y(z)\left(1+\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{3}z^{-2}\right)=X(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}-3z^{-2}\right)$$

$$H(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}-3z^{-2}}{1+\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{3}z^{-2}}=\frac{(1-2z^{-1})(1+\frac{3}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{2}{3}z^{-1})}$$



全通系统

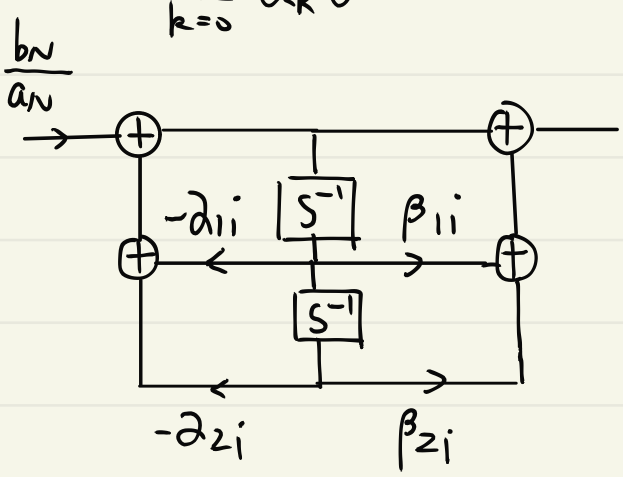
$$|H(\Omega)|=H(z)\big|_{z=e^{j0}}=\left|\frac{(1-2)(1+\frac{3}{2})}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{2}{3})}\right|=3$$

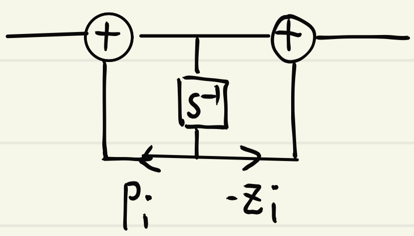


§8.9 有理系统函数表示的LTI系统的级联和并联实现

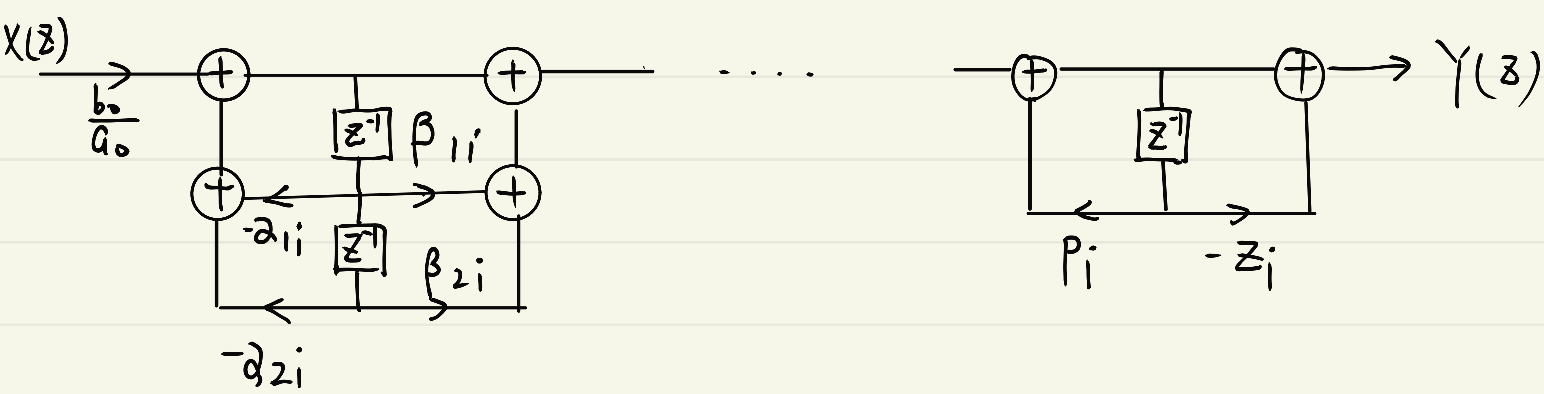
§8.9.1 级联实现结构

$$H(s)=\frac{\sum_{k=0}^{N}b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N}a_k s^k}=\frac{b_N}{a_N}\prod_{i=1}^{r}\frac{1+\beta_{1i}s^{-1}+\beta_{2i}s^{-2}}{1+a_{1i}s^{-1}+a_{2i}s^{-2}}\prod_{i=2r+1}^{N}\frac{1-z_i s^{-1}}{1-p_i s^{-1}}$$





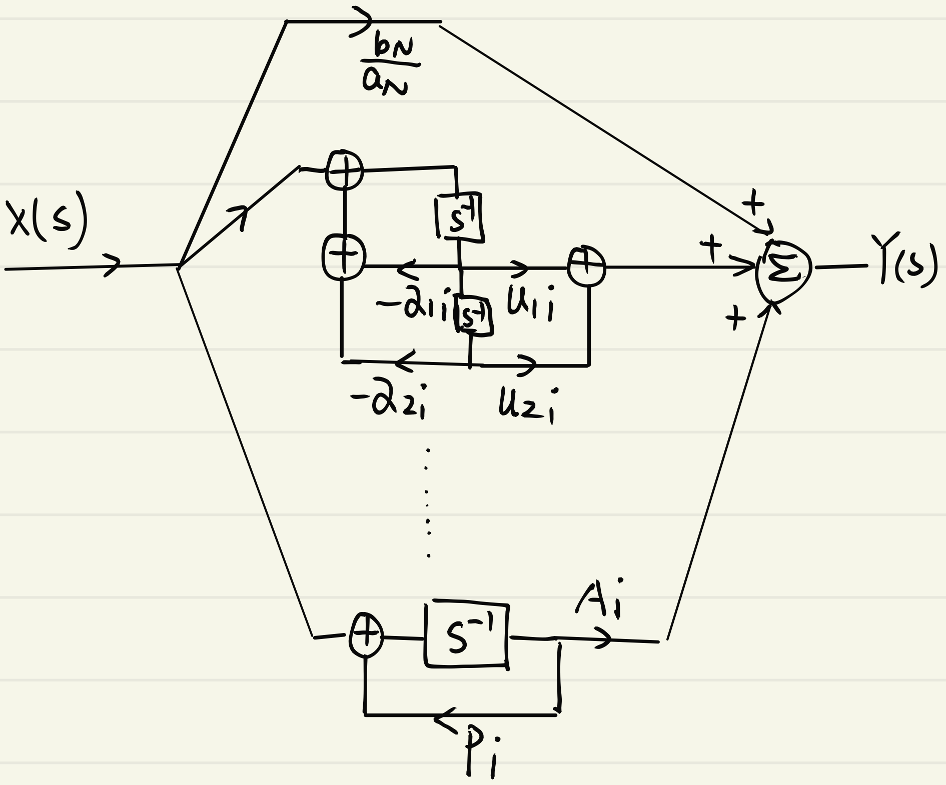
$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{N}b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}=\frac{b_0}{a_0}\prod_{i=1}^{r}\frac{1+\beta_{1i}z^{-1}+\beta_{2i}z^{-2}}{1+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-2}}\prod_{i=2r+1}^{N}\frac{1-z_i z^{-1}}{1-p_i z^{-1}}$$

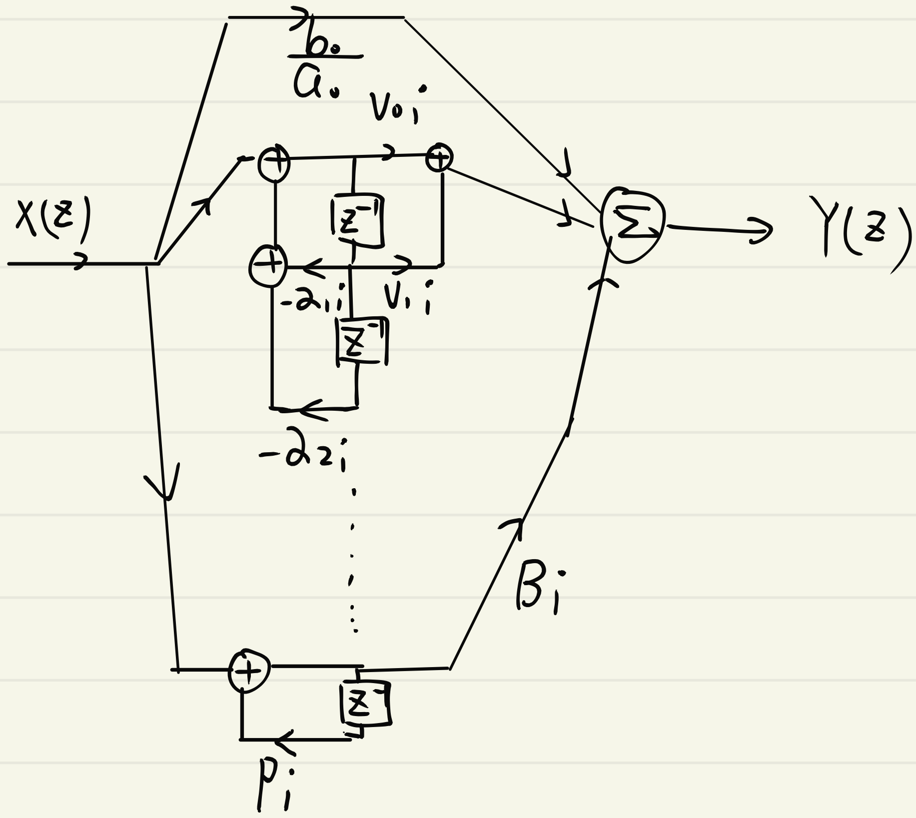


§8.9.2 并联结构

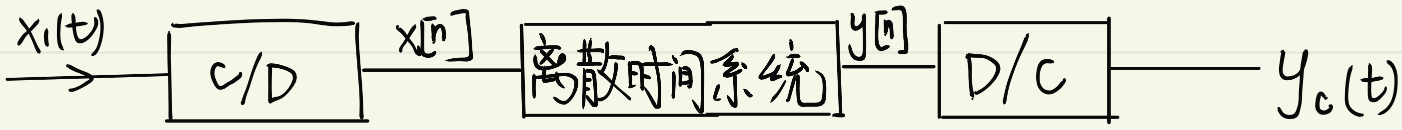
$$H(s)=\frac{b_N}{a_N}+\sum_{i=1}^{r}\frac{u_{1i}s^{-1}+u_{2i}s^{-2}}{1+a_{1i}s^{-1}+a_{2i}s^{-2}}+\sum_{i=2r+1}^{N}\frac{A_i s^{-1}}{1-p_i s^{-1}}$$

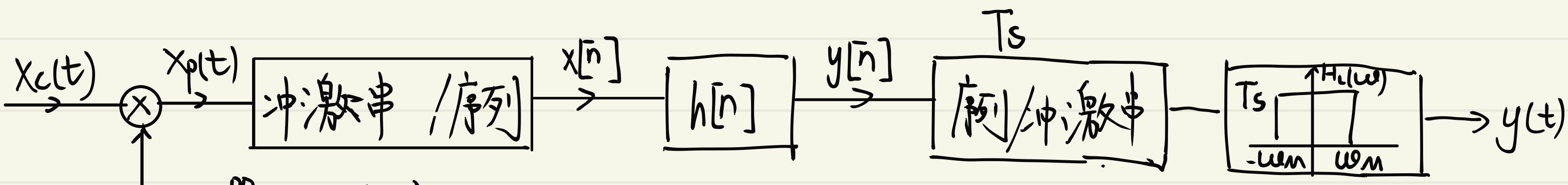
$$H(z)=\frac{b_0}{a_0}+\sum_{i=1}^{r}\frac{v_{0i}+v_{1i}z^{-1}}{1+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-2}}+\sum_{i=2r+1}^{N}\frac{B_i}{1-p_i z^{-1}}$$



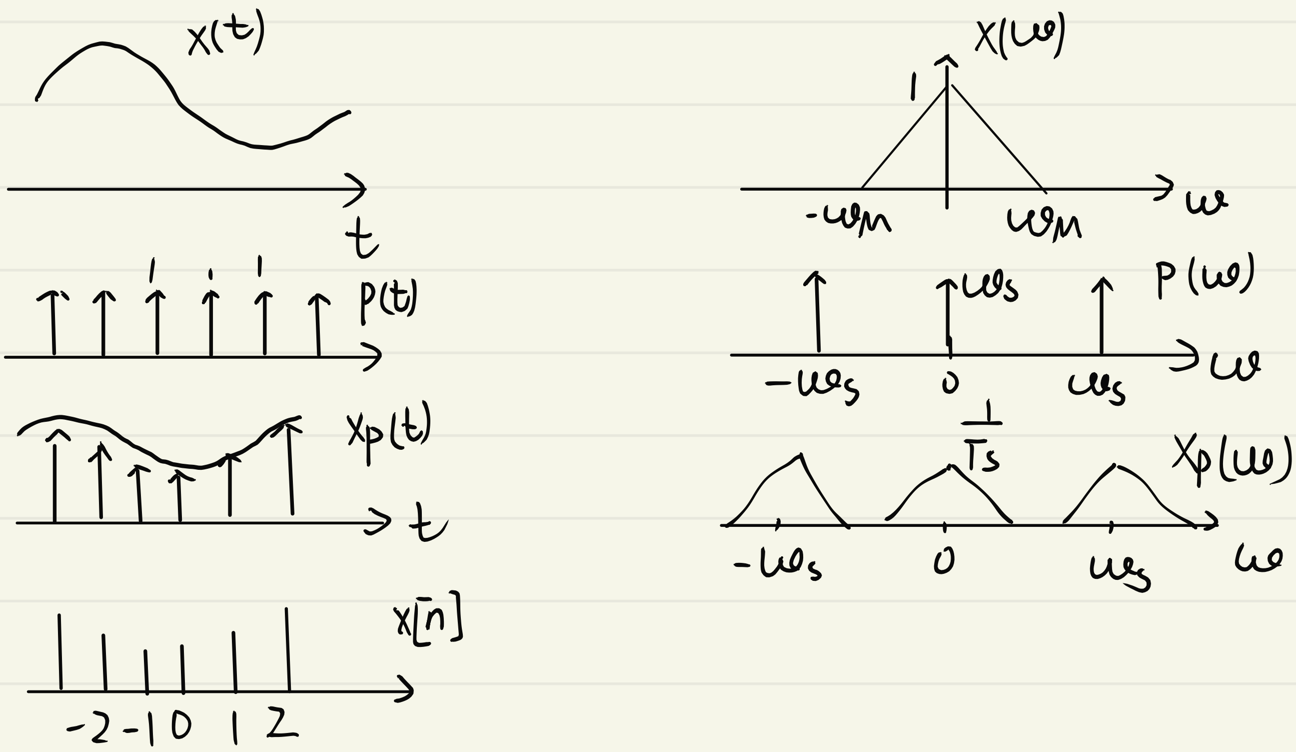


§9.3 连续时间信号的离散时间处理





$$p(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(t-lT_s)$$



$$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$$

$$X_p(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\omega_s)$$