组合学 2023 期末

2023/12/17

1.

(1) 已知 $v \in [22, 34]$, 且存在设计 $(v, 6, 1)$. 求证 $v = 31$.

(2) 给出 $PG(3)$ 与 $AG(3)$ 的" 清晰的" 构造.

个人猜测" 清晰的" 指的是不能直接把讲义上的构造流程复述一遍, 必须要写出具体的子集族.

2.

集合 X 上的一个超滤 (ultrafilter) 指的是其一个非空子集族 F. F 中元素满足:

(a). 若 $A \in F$ 且 $A \subseteq B$, 则 $B \subseteq F$;

(b). 对于每一个子集 A, A 与 A^C 中恰好有一个在 F 中.

证明: 一个超滤一定是一个相交系, 而一个相交系一定包含于某个超滤.

3.

设 $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ 均为不大于 n 的正整数.

证明: 存在非空指标集 $I, J \subseteq [n]$, 使得 $\sum\limits_{i \in I} a_i = \sum\limits_{j \in J} b_j$.

4.

正整数 $k \geq 3$. F 是 $[n]$ 上的一个 $k-$ 均匀子集族 $(\forall A \in F, |A| = k)$. 证明: 如果

$$|F| < \frac{3^{k-1}}{2^k},$$

则存在一个对 $[n]$ 中元素的 3-染色, 使得 $\forall A \in F$, A 中含有每种不同颜色的元素.

5.

$A_1, A_2, ..., A_m$ 均为 $[n]$ 的子集, 且 $m > n$.

证明: 存在指标集 $I, J \in [m]$ 满足 $I \cap J = \emptyset, I \cup J \neq \emptyset$, 使得 $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \bigcup\limits_{j \in J} A_j$.

6.

证明: 存在常数 c, 使得对于任意正整数 n, 存在一个 $C_{100} - free$ 的 n 阶图 G, 满足 $e(G) \geq c \cdot n^{\frac{100}{99}}$.

7.

对于偏序集 $\langle P, \leq \rangle$, 定义二分图 $G =< X \cup Y, E >$, 其中 $X = \{x_a | a \in P\}, Y = \{y_a | a \in P\}$, $x_a y_b \in E$ 当且仅当 $a > b$.

利用 Konig 定理证明: 在偏序集 $\langle P, \leq \rangle$ 中, 存在一条反链 A, 以及一个对 $\langle P, \leq \rangle$ 的 Hasse 图中边的划分 $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_m$, 其中 C_i 均为链, 且满足 $|A| = m$.