第3章综合习题题解

1. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 求 $f'(0)$.

解 令 $g(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, $g(0)=n!$, 则 $f(x)=xg(x)$, 且

$$f'(0)=n!$$

2. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数, 记函数

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

.

(1) 确定 a 的值,使 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(2) 对 (1) 中确定的 a, 证明 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且导函数连续.

证明 因 $f(x)$ 是连续的奇函数, 所以 $f(0)=0$. 因此 $g(x)$ 连续当且仅当

$$a=g(0)=\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0).$$

所以只有当 $a=f'(0)$ 时, $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

当 $x\neq 0$ 时,

$$g'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}.$$

当 $x=0$ 时, 利用Taylor 展开

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2,$$

其中 ξ 介于 0 和 x 之间: $|\xi-0|\leqslant|x-0|$, 即 $|\xi|\leqslant|x|$. 所以

$$\begin{aligned}g'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{1}{2}f''(0).\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)=g'(0)$$

因此 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且导函数连续.

3. 设 $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$, 证明, 方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证明 设

$$f(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+a_nx,$$

则 $f(0)=f(1)=0$, 因此存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f'(\xi)=a_0\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\cdots+a_n=0.$$

即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 中至少有一个根.

4. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

证明 设 $g(x)=\mathrm{e}^x f(x)$, 则 $g(a)=g(b)=0$, 所以存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$g'(\xi)=\mathrm{e}^\xi(f'(\xi)+f(\xi))=0,$$

推出 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

5. 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果任给 I 中两点 x_1,x_2, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数.

证明 (**反证法**) 若 $f(x)$ 不是 I 上的凸函数, 则在 $x_1,x_2\in I$, 及 $x_0\in(x_1,x_2)$ 使得

$$f(x_0)>f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_0-x_1).$$

构造线性函数

$$g(x)=f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

它的图像是连接 $(x_1,f(x_1))$ 和 $(x_2,f(x_2))$ 的弦, 因此有

$$g(x_1)=f(x_1),\quad g(x_2)=f(x_2),\quad f(x_0)>g(x_0).$$

令

$$h(x)=f(x)-g(x).$$

则 $h(x_1)=h(x_2)=0,\ h(x_0)>0$. 取

$$a=\sup\{x\mid x<x_0,h(x)=0\},\quad b=\inf\{x\mid x>x_0,h(x)=0\},$$

显然 $x_1\leqslant a, x_2\geqslant b$ 且$x_0\in(a,b)\subset(x_1,x_2)$. 根据 $h(x)$ 的连续性以及 $h(x_0)>0$, 可知

$$h(x)>0,\ \ x\in(a,b);\qquad \begin{cases} h(a)=f(a)-g(a)=0,\\ h(b)=f(b)-g(b)=0.\end{cases}$$

因此

$$h\left(\frac{a+b}{2}\right)>0,\ \text{即},\ \ f\left(\frac{a+b}{2}\right)>g\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

因为 g 是线性函数, 所以

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>g\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{g(a)+g(b)}{2}=\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

这与条件矛盾!

点评 显然, 如果 $f(x)$ 是凸函数, 题目中的条件自然成立. 因此 $f(x)$ 是凸函数当且仅当

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

因此上式也可以作为凸函数的定义.

6. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的两阶可微函数, $f(0)=f(1)$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

证明 设

$$F(x)=f(x)+x(x-1)f'(x),\ \ x\in[0,1],$$

则$F(x)$ 连续且 $F(0)=F(1)$. 因此存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$F'(\xi)=2\xi f'(\xi)+\xi(\xi-1)f''(\xi)=0,$$

解得 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

7. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)=f(b)=0$, 及 $f'(a)f'(b)>0$. 证明, 在 (a,b) 内存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=0$.

证明 $f'(a)f'(b)>0$ 表明 $f'(a),\ f'(b)$ 同号, 不妨设 $f'(a)>0,\ f'(b)>0$, 即

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)>0,$$

所以存在 $x_1>a$, 使得

$$\frac{f(x_1)}{x_1-a}>0,$$

因 $x_1-a>0$, 所以 $f(x_1)>0$. 同理可证存在 $x_2<b$ 使得 $f(x_2)<0$, 推出存在 $\xi\in[x_1,x_2]\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=1, f(1)=\frac{1}{2}$. 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

证明 1、若 $f(x)$ 没有零点：令

$$F(x)=x-\frac{1}{f(x)},\ x\in[0,1]$$

则 $F(x)$ 满足

$$F(0)=F(1)=-1,\ F'(x)=1+\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

根据 Rolle 定理, 推得存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 也就是

$$f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

2、若 $f(x)$ 有唯一零点$\xi\in(0,1)$ ：因为$f(0)=1, f(1)=\frac{1}{2}$, 所以 $f(x)$ 的最小值$f(x_0)$ 不可能是负的, 否则在$[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$ 各有一个零点, 矛盾. 因此这个唯一零点ξ 也最小值点,所以

$$f(\xi)=0,\ f'(\xi)=0$$

结论显然成立.

3、若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有超过两个及以上的零点：记

$$E=\{x\mid x\in[0,1], f(x)=0\}$$

因为 $f(0)=1,\ f(1)=\dfrac{1}{2}$, 所以 $E\subset(0,1)$. 分别记 $a=\inf E,\ b=\sup E$.

第一步,证明 a,b 也是零点.这是因为 a 是 E 的下确界, 因此对任意的 $\dfrac{1}{n}$, $a+\dfrac{1}{n}$ 不是下确界,即存在零点 $x_n\in E$, 使得

$$a<x_n<a+\frac{1}{n},\ f(x_n)=0$$

令 $n\to\infty$, 再由函数连续性知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

同理可证 b 也是 $f(x)$ 的零点.

第二步,要证明在区间 $[0,a)$ 和 $(b,1]$ 上,有$f'(a)\leqslant 0,\ f'(b)\geqslant 0$. 这是因为在 $[0,a)$ 上 $f(x)>0$, 在 $(b,1]$ 上 $f(x)>0$. 所以

$$f'(a) = f'_-(a) = \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{x-a}\leqslant 0$$

同理可证 $f'(b)\geqslant 0$.

如果 $f'(a)\leqslant 0,\ f'(b)\geqslant 0$ 中有一个等号成立,那么 $f^2(a)+f'(a)=0$ 或 $f^2(b)+f'(b)=0$. 结果自然成立. 否则有 $f'(a)<0,\ f'(b)>0$.

第三步, 若 $f'(a)<0$, 由

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a} = f'_+(a) = f'(a) < 0$$

得,存在$\delta>0$, 使得

$$f(x)<0,\ a<x<a+\delta$$

记

$$\overline{a} = \inf\{x \mid f(x)=0,\ a+\delta<x<b\},$$

那么在 $a<x<\overline{a}$ 中,$f(x)<0$ 令

$$F(x) = x - \frac{1}{f(x)},\ x\in(a,\overline{a})$$

那么

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = \lim_{x\to \overline{a}^-} F(x) = -\infty$$

所以 $F(x)$ 在 $(a,\overline{a})$ 中有最大值点 $\xi\in(a,\overline{a})$, 所以

$$F'(\xi)=0,\ 即\ f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

说明 在第二步中,令 $g(x)=f^2(x)+f'(x)$,则 $g(a)<0,\ g(b)>0$.因为 $f^2(x)$ 连续,所以是某个函数的导函数,不妨设 $F'(x)=f^2(x)$, 这样 $g(x)=F'(x)+f'(x)=(f(x)+f(x))'$ 是 $F(x)+f(x)$ 的导函数,利用导函数 $g(x)=F'(x)+f'(x)=(f(x)+f(x))'$的介值性.直接可以得到存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $g(\xi)=0$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可微, 且满足 $f(a)>0, f'(a)<0$, 以及当 $x>a$ 时, $f''(x)\leqslant 0$. 试证在区间 $(a,+\infty)$ 内, 函数 $f(x)$ 恰有一个零点.

证明 因为 $f''(x) \leqslant 0$, 推出 $f'(x)$ 单调减, 所以

$$f'(x) \leqslant f'(a) < 0,\ x \geqslant a.$$

推出 $f(x)$ 严格单调减, 因此极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 要么是有限数, 要么是$-\infty$.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 是有限数, 那么存在 $\xi \in (x, x+1)$, 使得 $f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$, 推出

$$0 > f'(a) \geqslant f'(x) \geqslant f'(\xi) = f(x+1) - f(x) \to 0\ (x \to +\infty)$$

矛盾, 因此

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

即当 b 充分大时, 有 $f(b) < 0$, 所以存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) = 0$. 再由 $f(x)$ 的严格单调性, 推出零点唯一.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, $f'(x)$ 严格单调增. 若 $f(a) = f(b) = \lambda$, 则对任意 $x \in (a, b)$, 有 $f(x) < \lambda$.

证明 （反证）若存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) \geqslant \lambda$, 则分别存在 $\xi_1 \in (a, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, b)$ 使得

$$f'(\xi_1) = (f(x_0) - f(a))(x_0 - a) \geqslant 0,\ f'(\xi_2) = (f(b) - f(x_0))(b - x_0) \leqslant 0,$$

而 $\xi_1 < \xi_2$, 所以 $f'(\xi_1) \geqslant 0 \geqslant f'(\xi_2)$ 与 $f'(x)$ 严格单调增矛盾. 所以对 $x \in (a, b)$, 有 $f(x) < \lambda$.

11. 函数 $\dfrac{\sin x^2}{x}$ $(x > 0)$ 表明, 若函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 不能保证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在. 证明: 若已知这极限存在, 则其值必然为零.

证明 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = a$, 若 $a \neq 0$, 因存在 $\xi_n \in (n, n+1)$ 使得

$$f'(\xi_n) = f(n+1) - f(n).$$

令 $n \to +\infty$, 有$\xi_n \to +\infty$, 且

$$a = \lim_{n\to+\infty} f'(\xi_n) = \lim_{n\to+\infty} (f(n+1) - f(n)) = 0.$$

矛盾, 因此必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

12. 设函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 时二阶可微, 且 $f''(x)<0, f(0)=0$. 证明: 对任意正数 x_1, x_2, 有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证明 对任意数 $x_1>0, x_2>0$, 设 $g(x)=f(x+x_1)-f(x)\ (x\geqslant 0)$, $f''(x)<0$ 推出 $f'(x)$ 严格单调减. 再推出 $g'(x)=f'(x+x_1)-f'(x)<0$, 因此 $g(x)$ 严格单调减, 所以对 $x_2>0$ 有

$$g(x_2)<g(0)=f(x_1)-f(0)=f(x_1),$$
$$\Longrightarrow f(x_2+x_1)-f(x_2)<f(x_1),$$
$$\Longrightarrow f(x_2+x_1)<f(x_2)+f(x_1).$$

13. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在二阶导数, 求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}.$$

证明 因为

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2),$$
$$f(x_0-h)=f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2),$$

所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\left(f''(x_0)+\frac{o(h^2)}{h^2}\right)=f''(x_0).$$

点评: 本题虽然是$\frac{0}{0}$ 型, 但若用L'Hospital 法则求极限: 对 h 求导, 有

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}\\&=f''(x_0),\end{aligned}$$

则是错误的, 因为最后一步用到了二阶导数连续的条件, 与题意不符.

14. 证明下列不等式.

(1) 对任意实数 x, $e^x \geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$;

(2) 对 $x>0$, $x-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$;

(3) 对 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$;

(4) 对任意实数 x, y, 有 $2e^{\frac{x+y}{2}} \leqslant e^x+e^y$.

证明 (1)

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{4!}x^4,$$

其中 $0<\theta<1$. 因为 $\dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{4!}x^4 \geqslant 0$ 对任意实数 x 成立, 所以不等时成立.

点评：上述结果可以推广到任意奇数次展开. 但是对偶数次展结论不成立. 例如

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{6}x^3,$$

当 $x \leqslant 0$ 时, $\dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{6}x^3 \leqslant 0$, 所以 $\mathrm{e}^x \leqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}$; 当 $x \geqslant 0$ 时, $\dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{6}x^3 \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

(2) 由 $\ln(1+x)$ 的展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+R_n(x),$$

知对于 $x>0$,

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\begin{cases} >0 & \text{当 } n \text{ 是偶数} \\ <0 & \text{当 } n \text{ 是奇数}\end{cases}$$

这里 $0<\theta<1$. 所以（2）中不等式成立.

(3) 的证明类似, 不再重复.

(4) 因 $\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^y$ 都是正数, 利用 $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ $(a, b>0)$ 即可得不等式.

15. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解 利用 $x-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ 得

$$\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4} \leqslant \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2},$$

从$k=1$ 到 $k=n$ 求和得

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leqslant\frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}.$$

16. 求 $\sqrt[n]{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 的最大值.

解 根据指数函数和对数函数的单调性, 首先考虑 $\ln\sqrt[n]{n}=\dfrac{\ln n}{n}$ 的最大值. 在 $x\in[1,+\infty)$ 中, 令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 那么 $f(x)\geqslant 0$ 且

$$f(1)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

求导得

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

所以$f(x)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 取到最大值, 且当 $1\leqslant x\leqslant\mathrm{e}$ 时, $f(x)$ 单调增, 当 $x\geqslant\mathrm{e}$ 时, $f(x)$ 单调减. 因此如果考虑正整数, 那么在正整数点的最大值是 $n=2$, 或 $n=3$. 由

$$\frac{\ln 3}{3}-\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 9-\ln 8}{6}>0,$$

得 $\sqrt[n]{n}$ 的最大值是 $\sqrt[3]{3}$.

17. 试给出函数 $x\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的一个尽可能小的上界.

解 设 $f(x)=x\cos x$, 因为 $f(x)>0, 0<x<\frac{\pi}{2}, f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$,所以$f(x)$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内部取到最大值. 求导得

$$f'(x)=\cos x-x\sin x,\quad f''(x)=-(2\sin x+x\cos x)<0.$$

因此在驻点 $f'(x_0)=0$ 处取到极大.

但是从 $f'(x)=\cos x-x\sin x=0$ 难以解出具体极值点,更难以计算极值.为此利用Taylor展开计算近似值.因为二阶导数是负的,所以

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2\leqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\ \ (x\in[0,\frac{\pi}{2}])$$

为求一个尽可能小的具体上界,不妨分别选择在 $x_0=0$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$ 处展开.

在 $x_0=0$: $f(x)\leqslant 0+x\leqslant\frac{\pi}{2}$,

在 $x_0=\frac{\pi}{6}$: $f(x)\leqslant\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{\pi}{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right)$,

在$x_0=\frac{\pi}{4}$: $f(x)\leqslant\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+(1-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\right)$.

在$x_0=\frac{\pi}{3}$: $f(x)\leqslant\frac{\pi}{6}+(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{3}})(x-\frac{\pi}{3})\leqslant\frac{\pi}{6}+(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{2})\frac{\pi}{3}$

在$x_0=\frac{\pi}{2}$: $f(x)\leqslant-\frac{\pi}{2}(x-\frac{\pi}{2})\leqslant\frac{\pi^2}{4}$

从中比较一个尽可能小的即可.

18. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数,且 $f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$.

证明 根据条件, 在 $x=0$ 进行Taylor 展开并代入 $x=-1$ 和 $x=1$ 得

$$\begin{aligned}0=f(-1)&=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1),\\ 1=f(1)&=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2),\end{aligned}$$

其中$\xi_1\in(-1,0)$, $\xi_2\in(0,1)$, 两式相减得

$$1=\frac{1}{6}(f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)).$$

因为

$$\min\{f'''(\xi_2),f'''(\xi_1)\}\leqslant\frac{f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)}{2}\leqslant\max\{f'''(\xi_2),f'''(\xi_1)\},$$

根据导函数的介值性, 存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-1,1)$ 使得

$$f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_2)+f'''(\xi_1)}{2}=3.$$

19. 设 $a>1$, 函数 $f:\ (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\ n=1,2,\cdots.$$

证明 (反证法) 若结论不对, 则存在 $M>0$, 使得

$$f'(x)\geqslant f(ax),\ (x\geqslant M).$$

因为 $f>0$, 所以当 $x>M$ 时, $f'(x)>0$, 推出 $f(x)$ 在 $[M,+\infty)$ 严格单调增.

根据微分中值定理, 对 $x>M$, 存在 $\xi\in(x,ax)$ 使得

$$\begin{aligned}f(ax)-f(x)=f'(\xi)(ax-x)&\geqslant f(a\xi)(a-1)x\\&>f(ax)(a-1)x.\end{aligned}$$

这里用到了 $a\xi>ax$, 这是因为$\xi>x$, $a>1$, 所以显然有 $a\xi>ax$. 取 $x>\frac{1}{a-1}>0$, 推出

$$f(ax)-f(x)>f(ax)\Longrightarrow f(x)<0.$$

这与 $f:\ (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 相矛盾, 所以结论成立.

20. 利用凸函数的性质证明 Hölder 不等式: 设 $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $i=1,2,\cdots,n$ 是正数. p,q 是大于 1 的正数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(提示: 考虑函数 $f(x)=x^p$.)

证明 : 设 $f(x)$ 是区间 I 上二阶可导凸函数, 对任意 $x_1,\cdots,x_n\in I$, 令 $\alpha_k>0$, $k=1,\cdots,n$ 满足 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$.

取 $x_1,\cdots,x_n$ 的加权平均

$$\overline{x}=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n,$$

并在 $\overline{x}$ 作Taylor展开. 因为 $f''\geqslant0$, 所以

$$\begin{aligned}f(x_k)&=f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_k-\overline{x})+\frac{f''(\xi_k)}{2!}(x_k-\overline{x})^2\\&\geqslant f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_k-\overline{x}),\ \ k=1,\cdots,n.\end{aligned}$$

两边乘以α_k 并求和得

$$\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n)\geqslant f(\overline{x})+f'(\overline{x})(\overline{x}-\overline{x})=f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n),$$

这样对二阶可导凸函数 $f(x)$, 区域内任意$x_1,\cdots,x_n$ 以及满足 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$ 的任意正数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$有.

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n).$$

并称为Jensen **不等式** （第一册习题3.5第一题）

下面证明 Hölder 不等式：设 $p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$（共轭条件），令 $f(x)=x^p$, 显然在 $x>0$ 内 $f''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0$, 因此是凸函数. 对两组正数 $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $i=1,2,\cdots,n$, 取

$$x_k=a_k b_k^{1-q},\ k=1,\cdots,n,$$

以及正数

$$\alpha_k=\frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}>0, k=1,\cdots,n.$$

显然 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$. 代入Jensen 不等式

$$f(\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n)\leqslant \alpha_1 f(x_1)+\cdots+\alpha_n f(x_n)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{\sum_{k=1}^n b_k^q}\right)^p\leqslant \sum_{k=1}^n\left(\frac{b_k^q}{\sum_{i=1} b_i^q}(a_k b_k^{1-q})^p\right)=\frac{\sum_{k=1}^n a_k^p}{\sum_{k=1}^n b_k^q}.$$

这里我们用到了 $p+q-pq=0$. 两边开 p 次根就得到结果

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{p}-1}=\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

习题3.3 **第**22 **题**设 $a\in(0,1)$, $b_1=1-a$,

$$b_{n+1}=\frac{b_n}{1-e^{-b_n}}-a,\ n=1,2,\cdots,$$

问 b_n 是否收敛? 若不收敛, 则给予证明; 若收敛, 则求其极限.

证明 （第一步）欲证其收敛,最好单调有界,欲证单调,借助函数

$$f(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}-a,\ x>0$$

利用不等式 $e^x>1+x$, 有

$$f(x)=-\frac{0-x}{e^{-0}-e^{-x}}-a=e^{\xi}-a>1-a>0\ (0<\xi<x)$$
$$f'(x)=\frac{1-(1+x)e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}>0$$

因此 $f(x)>1-a>0$ 且严格单调增.

（第二步）因为 $b_1=1-a>0$, $b_2=f(b_1)>1-a=b_1$.（归纳）如果 $b_1<b_2<\cdots b_n$ 则

$$b_{n+1}-b_n=f(b_n)-f(b_{n-1})=f'(\xi)(b_n-b_{n-1})>0$$

所以 $\{b_n\}$ 是严格单调增数列.

（第三步）证明 b_n 有上界.

如果 b_n 有上界, 则 b_n 有极限, 记 $b_n \to b$ 因此 $b_n \leqslant b$, 则在 $b_{n+1} = f(b_n)$ 两边取极限得 $f(b) = b$. 所以寻找 b_n 的上界就是要找 $f(x) - x = 0$ 的解.为此设

$$g(x) = f(x) - x = \frac{x}{e^x - 1} - a$$

显然

$$g(0+0) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 - a > 0, \lim_{x \to +\infty} g(x) = -a < 0$$

且

$$g'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2} < 0$$

这是因为从 $e^x > 1 + x$ 中,令 $x \to -x$ 得 $e^{-x} > 1 - x, \Longrightarrow (1-x)e^x < 1$. 所以 $g(x)$ 严格单调减. 由零点定理, 推得 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中有唯一解,记为 b.

下面要证明 b 是b_n 的上界,显然 $b = f(b) > 1 - a = b_1$,（归纳）如果 $b > b_n$, 利用 $f(x)$ 单调增得 $b = f(b) > f(b_n) = b_{n+1}$,所以 b 是b_n 的上界.

这样我们就证明了 b_n 单调增有上界 b,其中 b 是 $f(x) - x = 0$ 的唯一的零点.因此 $b_n \to b$.