中国科学技术大学

2020 电动力学期终考试试题卷

参考解答

姓名： 学号： 成绩：

共 5 题，每题 20 分(满分 100)：

1. 考虑由一个点电荷Q与一个电中性的、半径为R的实心导体球构成的电荷体系。Q与导体球球心O之间的距离为a $(a>R)$，二者绝缘隔离。整个体系置于场强为$\boldsymbol{E}_0$(设其方向沿OQ连线，从O指向Q)的匀强外静电场中。静电平衡状态达成后，假设导体球的电势为V_0。试求：(1) 导体球外部空间中的电场强度分布(10 分)；(2) 导体球表面上的感应电荷面密度(10 分)。

解：

以导体球球心O为原点建立辅助的笛卡尔直角坐标系，使OQ连线沿z轴正方向。按照电像法，球外空间中位置矢量为$\vec{r}$的场点P处的静电势具有形式：

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) = &\left(V_0 - \frac{Q/a}{4\pi\epsilon_0}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{|\vec{r}-a\vec{e}_3|} - \frac{RQ/a}{|\vec{r}-R^2\vec{e}_3/a|} + \frac{RQ/a}{r}\right] \\ &-\vec{E}_0\cdot\vec{r}\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)\end{aligned} \tag{1}$$

在写(1)式时，我们已经使用了球形界面情形下匀强电场与位于球心的电偶极子互为镜像的常识(课堂上讲到过)。若假设P点的极角为θ，又可把(1)式在球坐标系中表为：

$$\varphi(r,\theta)=V_0-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}-\frac{RQ/a}{\sqrt{r^2+(R^2/a)^2-2(R^2/a)r\cos\theta}}\right]+\frac{RQ/a}{4\pi\epsilon_0 r}-E_0 r\cos\theta\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right) \tag{2}$$

求其负梯度,知:

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q(\vec{r}-a\vec{e}_3)}{|\vec{r}-a\vec{e}_3|^3}-\frac{(RQ/a)(\vec{r}-R^2\vec{e}_3/a)}{|\vec{r}-R^2\vec{e}_3/a|^3}\right]+\frac{(RQ/a)\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}+\vec{E}_0+\frac{R^3}{r^5}\left[3(\vec{E}_0\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{E}_0\right] \tag{3}$$

(3)式就是导体球外部空间的电场强度分布。在球坐标系中,也可以把(3)式等价地表为：

$$\vec{E}(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{(r-a\cos\theta)\vec{e}_r+a\sin\theta\vec{e}_\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\theta)^{3/2}}-\frac{R}{a}\frac{\left[\left(r-\frac{R^2}{a}\cos\theta\right)\vec{e}_r+\frac{R^2}{a}\sin\theta\vec{e}_\theta\right]}{\left[r^2+\left(\frac{R^2}{a}\right)^2-2\left(\frac{R^2}{a}\right)r\cos\theta\right]^{3/2}}\right\}+E_0\cos\theta\vec{e}_r\left(1+2\frac{R^3}{r^3}\right)-E_0\sin\theta\vec{e}_\theta\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)+\frac{(RQ/a)\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4}$$

按照(4)式，导体球表面外侧电场强度的径向分量是:

$$E_r(R,\theta) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\frac{(a^2-R^2)}{(R^2+a^2-2aR\cos\theta)^{3/2}} + 3E_0\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 aR} \quad (5)$$

注意到导体球体内场强为零，故由电场强度分布满足的边界条件知导体球表面上的感应电荷面密度为：

$$\sigma = \epsilon_0 E_r(R,\theta) = -\frac{Q}{4\pi R}\frac{(a^2-R^2)}{(R^2+a^2-2aR\cos\theta)^{3/2}} + 3\epsilon_0 E_0\cos\theta + \frac{Q}{4\pi aR}$$

(6)

容易验证(考试不做要求)，导体球表面上的感应电荷总量为零：

$$\int_S \sigma\ R^2\sin\theta d\theta d\phi = 0 \quad (7)$$

评分规则：

写出电势表达式(1)或者(2)可得5分，接下来求出场强(3)或者(4)再得5分；求出感应电荷面密度(6)式得10分。按错误公式$\boldsymbol{E} = \nabla\varphi$求场强扣2分；求极化电荷面密度$\sigma_P$不得分。

2. 请分别在笛卡尔直角坐标系、球坐标系和圆柱坐标系中找出均匀静磁场$\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_3$(这里$\boldsymbol{e}_3$为笛卡尔直角坐标系$z$轴方向单位矢量)的一个矢量势(15分)，并指明相应矢势所在的规范(5分)。

解：

首先在笛卡尔直角坐标系中讨论。直角坐标系的基矢$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{e}_3$均为常矢量，且符合右手法则。注意到：

$$\nabla = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \tag{8}$$

我们有$\nabla x = \boldsymbol{e}_1$。所以，

$$\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_3 = B\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = B\nabla x \times \boldsymbol{e}_2 = \nabla \times (Bx\boldsymbol{e}_2) \tag{9}$$

(9)式意味着我们可以把此均匀静磁场的矢势取作：

$$\boldsymbol{A} = Bx\boldsymbol{e}_2 \tag{10}$$

矢势所在的规范是库仑规范：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial (Bx)}{\partial y} = 0 \tag{11}$$

接下来我们在圆柱坐标系中讨论。圆柱坐标系的基矢分别为$\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{e}_\phi$和$\boldsymbol{e}_3$，它们也形成右旋坐标系。梯度算符在圆柱坐标系中的表达式是：

$$\nabla = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\boldsymbol{e}_\phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \tag{12}$$

由此知$\nabla \rho = \boldsymbol{e}_\rho$及$\nabla \phi = \boldsymbol{e}_\phi / \rho$。所以，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= B\boldsymbol{e}_3 = B\boldsymbol{e}_\rho \times \boldsymbol{e}_\phi = B\nabla\rho \times \rho\nabla\phi = \frac{1}{2}B\nabla\rho^2 \times \nabla\phi \\ &= \nabla \times \left[\frac{1}{2}B\rho^2\nabla\phi\right] = \nabla \times \left[\frac{1}{2}B\rho\,\boldsymbol{e}_\phi\right] \end{aligned} \tag{13}$$

即可把此均匀静磁场的矢势取作：

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}B\rho\,\boldsymbol{e}_\phi \tag{14}$$

其所在的规范也是库仑规范：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}B\nabla\rho \cdot \boldsymbol{e}_\phi = \frac{1}{2}B\boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\phi = 0 \tag{15}$$

最后考虑球坐标系。球坐标系的基矢分别是$\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$和$\boldsymbol{e}_\phi$，梯度算符表达为：

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\boldsymbol{e}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{16}$$

球坐标系与直角坐标系基矢之间存在关系$\boldsymbol{e}_3 = \cos\theta \boldsymbol{e}_r - \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta$，见第 4 题提示。我们有：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= B\boldsymbol{e}_3 = B\cos\theta \boldsymbol{e}_r - B\sin\theta \boldsymbol{e}_\theta = B(\cos\theta \boldsymbol{e}_\theta + \sin\theta \boldsymbol{e}_r) \times \boldsymbol{e}_\phi \\
&= B(r\cos\theta \nabla\theta + \sin\theta \nabla r) \times \boldsymbol{e}_\phi = B\nabla(r\sin\theta) \times (r\sin\theta \nabla\phi) \\
&= \frac{1}{2}B\nabla(r^2\sin^2\theta) \times \nabla\phi = \nabla \times \left[\frac{1}{2}Br^2\sin^2\theta \nabla\phi\right] \\
&= \nabla \times \left[\frac{1}{2}Br\sin\theta \boldsymbol{e}_\phi\right]
\end{aligned} \tag{17}$$

此均匀静磁场的矢势在球坐标系中可取为：

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}Br\sin\theta \boldsymbol{e}_\phi \tag{18}$$

当然，若使用球坐标与圆柱坐标之间的关系，$\rho = r\sin\theta$，也可由(14)式直接写出矢势(18)。其所在的规范也是库仑规范：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}B\nabla(r^2\sin\theta) \cdot \frac{\boldsymbol{e}_\phi}{r} = 0 \tag{19}$$

评分规则：

每写出矢势的一个正确表达式均得 5 分，规范全写对得 5 分。写错一个矢势扣 5 分，写错一个规范扣 1 分。

3. 一谐振腔的几何尺寸为$a \times a \times 2a$，腔壁为理想导体，腔内电磁场的电场强度分布是：

$$E_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\exp(-i\omega t), \quad E_y = E_z = 0$$

式中$\omega = \gamma\pi c/a$为谐振频率，c为真空中的光速，γ因子的取值待定。

请计算腔内电磁场的磁感应强度分布$\boldsymbol{B}$(15分)以及γ因子(5分)。

解:

把题设电场强度分布与谐振腔内模式电磁波的标准形式

$$E_x = A_1 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{p\pi z}{2a}\right)\exp(-i\omega_{mnp}t) \tag{20}$$

作比较，可知$A_1 = E_0$，$m = 0$，$n = 1$且$p = 2$。如此，谐振频率是:

$$\omega_{012} = \pi c\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{2a}\right)^2} = \frac{\pi c}{a}\sqrt{2} \tag{21}$$

即$\gamma = \sqrt{2}$。腔内电磁场的磁感应强度分布由法拉第电磁感应定律确定:

$$\boldsymbol{B} = -\frac{i}{\omega_{012}}\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{ia}{\sqrt{2}\pi c}\left(\boldsymbol{e}_2\frac{\partial E_x}{\partial z} - \boldsymbol{e}_3\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \tag{22}$$

换言之，

$$\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= -\frac{iE_0}{\sqrt{2}c}\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\exp\left(-i\sqrt{2}\pi ct/a\right) \\ B_z &= \frac{iE_0}{\sqrt{2}c}\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\exp\left(-i\sqrt{2}\pi ct/a\right) \end{aligned} \tag{23}$$

评分规则:

写出γ因子的正确取值得5分；写对磁感应强度的每一直角分量得5分，写错或者漏写不得分。

4. 空间中存在着两个紧靠在一起的、以相同角频率ω振动的电偶极子。设电偶极矩之间的相位差为$\pi/2$，振幅的大小均为p_0，但方向互成α角。(1)假设二偶极子的电偶极矩形成xy平面，其中一个偶极子的电偶极矩沿着x轴方向振荡，请写出二偶极子构成体系的、复数化的总电偶极矩矢量(5分)；(2)采取球坐标系计算电偶极辐射场的场强分布(10分)和平均能流密度矢量的角分布(5分)。

Hint: 笛卡尔直角坐标系与球坐标系基矢之间的关系是，

$\boldsymbol{e}_x = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_\theta - \sin\phi\boldsymbol{e}_\phi$， $\boldsymbol{e}_y = \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_\theta + \cos\phi\boldsymbol{e}_\phi$，

$\boldsymbol{e}_z = \cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$.

解:

设$\boldsymbol{p}_1 = p_0\boldsymbol{e}_x\exp(-i\omega t)$，则:

$$\boldsymbol{p}_2 = p_0(\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \sin\alpha\boldsymbol{e}_y)\exp\left(-i\omega t + i\frac{\pi}{2}\right) = ip_0(\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \sin\alpha\boldsymbol{e}_y)\exp(-i\omega t)$$

式中$\boldsymbol{e}_x$和$\boldsymbol{e}_y$分别是x轴与y轴的单位矢量。因此，体系的总电偶极矩矢量为:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = p_0[(1 + i\cos\alpha)\boldsymbol{e}_x + i\sin\alpha\boldsymbol{e}_y]\exp(-i\omega t) \tag{24}$$

或者采取球坐标系，

$$\boldsymbol{p} = p_0\begin{Bmatrix}[\cos\phi + i\cos(\phi - \alpha)](\sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta) \\ -[\sin\phi + i\sin(\phi - \alpha)]\boldsymbol{e}_\phi\end{Bmatrix}\exp(-i\omega t) \tag{25}$$

电偶极辐射的推迟矢势为:

$$A=\frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi\ r}\dot{\boldsymbol{p}}=-i\omega\frac{\mu_0 e^{ikr}}{4\pi\ r}\boldsymbol{p},\qquad k=\frac{\omega}{c} \tag{26}$$

辐射电磁场的场强

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=ik\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0\omega^2\ e^{ikr}}{4\pi c\ r}\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{p}\\&=\frac{\mu_0\omega^2 p_0}{4\pi c}\frac{\exp[i(kr-\omega t)]}{r}\{[\sin\phi+i\sin(\phi-\alpha)]\boldsymbol{e}_\theta+\cos\theta[\cos\phi+i\cos(\phi-\alpha)]\boldsymbol{e}_\phi\}\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_r\\&=\frac{\omega^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\exp[i(kr-\omega t)]}{r}\{-[\sin\phi+i\sin(\phi-\alpha)]\boldsymbol{e}_\phi+\cos\theta[\cos\phi+i\cos(\phi-\alpha)]\boldsymbol{e}_\theta\}\end{aligned} \tag{28}$$

平均能流密度矢量为:

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle=\frac{1}{2\mu_0}\Re(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B})=\frac{1}{2\mu_0}\Re[(c\boldsymbol{B}^*\times\boldsymbol{e}_r)\times\boldsymbol{B}]=\frac{c}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{e}_r \tag{29}$$

其角分布是:

$$f(\theta,\phi)=\sin^2\phi+\sin^2(\phi-\alpha)+\cos^2\theta[\cos^2\phi+\cos^2(\phi-\alpha)] \tag{30}$$

评分规则:

写出复数化电偶极矩(24)或者(25)得5分,写错不得分;写出场强分布的表达式(27)和(28)各得5分,漏写或者写错不得分;求出角分布(30)得5分,写错不得分。

5. 某磁偶极子以速度$\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{\beta}$在实验室参考系$S$中作匀速直线运动,其磁偶极矩在自身系$S'$和实验室系$S$中分别是$\boldsymbol{m}'$与$\boldsymbol{m}$. 已知:

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}'-\frac{(\gamma-1)}{\gamma\beta^2}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{m}')$$

式中$\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$，且磁偶极子激发的电磁势在$S'$系中表达为：

$$\boldsymbol{A}'=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}'\times\boldsymbol{r}'}{r'^3},\qquad \varphi'=0$$

这里$\boldsymbol{r}'$是场点在自身系S'中相对于磁偶极子的位置矢量，r'是其大小。(1) 请采取 Lorenz 规范，写出S系中电磁势的表达式(16 分,矢势与标势各 8 分)；(2) 在非相对论极限下，S系中的电磁标势等同于一个坐落在磁偶极子占据点的电偶极子所激发的静电势。请写出这个等价电偶极子的电偶极矩$\boldsymbol{p}$ (4 分)。

Requirement: 要求用实验室参考系S中的物理量,例如磁偶极矩$\boldsymbol{m}$和场点的位置矢径$\boldsymbol{r}$表达出S系中的电磁势，否则不算完整的解答。

解:

Lorenz 规范中的电磁势$A_\mu=(\boldsymbol{A},\ i\varphi/c)$形成 Minkowski 空间中的 4-矢量，$A_\mu=a_{\nu\mu}A'_\nu$。所以，磁偶极子在$S$系中激发的电磁势为：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{A}')\boldsymbol{\beta},\qquad \varphi=\gamma c(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{A}') \tag{31}$$

式中，

$$\boldsymbol{A}'=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}'\times\boldsymbol{r}'}{r'^3} \tag{32}$$

根据 Lorentz 变换并在S系中取观测时刻为$t=0$，我们有：

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\beta} \tag{33}$$

其大小为：

$$r' = \sqrt{r^2 + \gamma^2 (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{r})^2} \tag{34}$$

此外,按题目给出的信息知:

$$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{m}' \cdot \boldsymbol{\beta} \tag{35}$$

换言之,

$$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m} + \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2} (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{m} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \tag{36}$$

利用(33)式与(36)式可知:

$$\boldsymbol{m}' \times \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{\beta}) - (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\beta})] \tag{37}$$

结合(32)、(34)和(37)式,可以把$\boldsymbol{A}'$用S系中的物理量表达为:

$$\boldsymbol{A}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{\beta}) - (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\beta})]}{[r^2 + \gamma^2 (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\beta})^2]^{3/2}} \tag{38}$$

于是,

$$\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{\beta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\beta}}{[r^2 + \gamma^2 (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\beta})^2]^{3/2}} \tag{39}$$

把(38)与(39)式代回到(31)中,即得磁偶极子在S系中激发的电磁势的最终表达式:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{\beta}) - (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\beta})]}{[r^2 + \gamma^2 (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\beta})^2]^{3/2}} \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{[(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\beta}] \boldsymbol{\beta}}{[r^2 + \gamma^2 (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\beta})^2]^{3/2}} \end{aligned} \tag{40}$$

$$\varphi = \gamma c \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\beta}}{[r^2 + \gamma^2 (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\beta})^2]^{3/2}} \tag{41}$$

在非相对论极限下,$\beta \ll 1$, $\gamma \sim 1$, 在(41)式中略去$\mathcal{O}(\beta^2)$, 可得:

$$
\varphi \approx \frac{\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{m})}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{42}
$$

式中，

$$
\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{m}}{c^2} \tag{43}
$$

评分规则：

求出电磁势的正确表达式(40)和(41)各得 8 分，求出等效电偶极矩(43)得 4 分；

电磁势的变换法则(31)写错扣 5 分；把 $\boldsymbol{m}'$ 用 $\boldsymbol{m}$ 表达的公式(36)若写错扣 4 分；

若等效电偶极矩(43)出现符号错误则扣 1 分。