中国科学技术大学

2019-2020 学年第一学期期终考试试题卷

考试科目： 量子力学 A　　　　　　　　　　　　得分：

考生所在系：　　　　　　　姓名：　　　　　　　学号：

一．简答题（20 分，每题 4 分）：

1. 某一维量子力学体系遵从的薛定谔方程在位置表象中可写为：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+Kx\right]\psi(x,t)$$

式中K为一非零常数，$-\infty<x<+\infty$．倘若改取动量表象，请写出相应的薛定谔方程.

答：引入动量表象波函数$\varphi(p,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\psi(x,t)\exp(-ipx/\hbar)dx$，薛定谔方程表为：$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(p,t)=\frac{p^2}{2\mu}\varphi(p,t)+i\hbar K\frac{\partial}{\partial p}\varphi(p,t)$.

2. 设线性算符$\hat{a}$与其厄米共轭$\hat{a}^\dagger$满足代数关系$\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}=1$，$(\hat{a})^2=(\hat{a}^\dagger)^2=0$．请问$\hat{a}$是否有资格作为某量子力学体系的力学量算符？

答：所给代数关系杜绝了$\hat{a}=\hat{a}^\dagger$的可能性，所以$\hat{a}$不是厄米算符、无资格作为量子力学体系的力学量算符.

3. 考虑在中心力场$V(r)$中运动的、自旋为$\frac{1}{2}$的微观粒子，$V(r)\neq\alpha/r$．倘若在其 Hamilton 算符中计及自旋、轨道耦合项，请写出所有可能的守恒量算符？

答：守恒量有$\hat{H}$, $\hat{\vec{L}}^2$, $\hat{\vec{S}}^2=\frac{3}{4}\hbar^2$, $\hat{\vec{J}}^2$和$\hat{\vec{J}}=\hat{\vec{L}}+\hat{\vec{S}}$．其中$\hat{\vec{S}}^2$平庸，可以不计入.

4. 某量子力学体系的哈密顿算符的本征值方程是：

$$\hat{H}|n\rangle = -\frac{1}{n}E_0|n\rangle, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

式中E_0为一具有能量量纲的正常数. 现设$t=0$时刻体系处在叠加态：

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle - \frac{5}{2\sqrt{10}}|3\rangle$$

若在此态下测量体系的能量，请问其期望值是多少？

答：$\langle E\rangle = -\frac{11}{24}E_0$

5. 假设二电子构成的全同费米子体系处于自旋单态：

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle)$$

在此态下若测得一电子自旋角动量s_{1z}的取值为$\hbar/2$，请问另一电子自旋角动量s_{2z}可能的测量值有哪些？

答： s_{2z}的测量值只能是$s_{2z} = -\frac{\hbar}{2}$.

二. 单项选择题（20 分，每题 5 分）：

1. 设质量为μ的非相对论性微观粒子粒子处在定态波函数

$$\psi_E(\vec{r}, t) = A\sin(\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar)\exp(-iEt/\hbar)$$

描写的量子态下，请问如下说法中哪一个正确？

A. 粒子具有确定的能量E和动量$\vec{p}$.

B. $E = \frac{\vec{p}^2}{2\mu}$.

C. 粒子的能量、动量均无确定的测量值，且$E \neq \frac{\vec{p}^2}{2\mu}$.

D. 虽然粒子具有确定的能量E，但其动量有$\vec{p}$与$-\vec{p}$两个可能的测量值.

答： D

2. 质量为μ、电量为q的带电粒子处在矢势为$\vec{A}$的外磁场中，$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，其速度算符定义为：

$$\hat{\vec{v}}=\frac{1}{\mu}\left(\hat{\vec{P}}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)$$

式中$\hat{\vec{P}}$是体系的正则动量算符．请问如下候选答案中，哪一个是粒子速度的笛卡尔直角分量算符服从的对易关系？

A. $[\hat{v}_i,\ \hat{v}_j]=0$

B. $[\hat{v}_i,\ \hat{v}_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}A_k$

C. $[\hat{v}_i,\ \hat{v}_j]=\dfrac{i\hbar q}{\mu^2 c}\epsilon_{ijk}B_k$

D. $[\hat{v}_i,\ \hat{v}_j]=i\hbar\delta_{ij}$

答： C

3. 考虑自旋为$\frac{1}{2}$的费米子．假设对其自旋角动量$\vec{S}=\hbar\vec{\sigma}/2$沿单位基矢

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x+\vec{e}_z)$$

方向的分量$\vec{S}\cdot\vec{n}$完成了一次测量，得到了测量值$\hbar/2$．倘若紧接着对S_y进行一次测量，请问获得测量值为$\hbar/2$的概率是多少？

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 0

D. $\frac{1}{4}$

答： A

解释（对考生无此要求）：第二次测量前体系所处的初态为：

$$|\psi_0\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\pi/8) \\ \sin(\pi/8) \end{bmatrix}$$

而$\hat{S}_y$属于本征值$\hbar/2$的本征态矢量为$\left|S_y, \frac{\hbar}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. 所以，在$|\psi_0\rangle$态下测量

S_y得到测量值$\hbar/2$的概率为：

$$P = \left|\left\langle S_y, \frac{\hbar}{2}\middle|\psi_0\right\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}|\exp(-i\pi/8)|^2 = \frac{1}{2}$$

4. 考虑由二电子构成的全同费米子体系. 若体系的自旋态波函数在泡利表象中表为：

$$\chi(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

请问下列候选者中哪一个有资格担当体系的空间波函数？

A. $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_1)\varphi(\vec{r}_2)$

B. $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varphi(\vec{r}_1)\psi(\vec{r}_2)$

C. $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_1)\psi(\vec{r}_2)$

D. $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi(\vec{r}_1)\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)\psi(\vec{r}_2)]$

答： C

三. 计算题（四道题目中任选三题，共 60 分，每题 20 分. 若四题全做，则仅考虑前三题的分数， 第四题的分数不再重复计入）：

1. 一个质量为μ的粒子处在线性中心力场$V(r) = Kr$中，设其量子态由定态波函数

$$\psi_E(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r}\mathcal{Y}_{lm}(\theta, \phi)$$

描写． ① 引入无量纲的径向坐标$\rho = r/r_0$， $r_0 := \sqrt[3]{\dfrac{\hbar^2}{2\mu K}}$，请证明径向薛定谔方程可表为：

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \rho\right]u(\rho) = \varepsilon u(\rho)$$

并把无量纲能量本征值ε用E表出(5 分)． ② 请分析$\rho \sim 0$情形下径向波函数$u(\rho)$的渐近行为(5 分)． ③ 请以$\exp(-\alpha\rho)$作为$u(\rho)$在$\rho \to \infty$情形下的压制因子构造合理的束缚态试探波函数（约定变分参数$\alpha > 0$），使用变分法求ε的近似值(10 分)．

解:

① $\psi_E(\vec{r})$满足的定态薛定谔方程为：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + Kr\right]\psi_E = E\psi_E \tag{1}$$

在球坐标系中，倘若设$\psi_E = R(r)\mathscr{Y}_{lm}(\theta,\phi)$，则因

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}$$

式中$\hat{L}^2$为轨道角动量平方算符，$\hat{L}^2\mathscr{Y}_{lm} = \hbar^2 l(l+1)\mathscr{Y}_{lm}$，我们看到径向波函数$R(r)$满足的方程是：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + Kr\right]R = ER \tag{2}$$

再令$R(r) = u(r)/r$，(2)式可改写为：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu K}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu K r^2} + r\right]u = \frac{E}{K}u \tag{3}$$

现设$r = \sqrt[3]{\dfrac{\hbar^2}{2\mu K}}\rho$，可把(3)式写为：

$$\sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{2\mu K}}\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \rho\right]u = \frac{E}{K}u$$

亦即：

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{l(l+1)}{\rho^2}+\rho\right]u=\varepsilon u \tag{4}$$

这里，$\varepsilon=\sqrt[3]{\frac{2\mu}{K^2\hbar^2}}\,E$.

② 若$\rho\to 0$，方程(4)可近似表为：

$$-\frac{d^2u}{d\rho^2}+\frac{l(l+1)}{\rho^2}u\approx 0 \tag{5}$$

试取方程(5)的特征解$u\sim\rho^s$，可知$s(s-1)-l(l+1)=0$. 所以，$s=l+1$或者$s=-l$.

但$u\sim\rho^{-l}$不满足径向波函数在$\rho\sim 0$处的自然边界条件，舍去. 因此，$u(\rho)$在$\rho\approx 0$处的渐近行为是：

$$u(\rho)\sim\rho^{l+1},\qquad l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{6}$$

③ 结合(6)式与题设的压制因子，我们取变分法需要的试探波函数为：

$$u(\alpha,\rho)=A(\alpha)\rho^{l+1}\exp(-\alpha\rho),\qquad \alpha>0 \tag{7}$$

这里$A(\alpha)$是归一化常数，

$$1=\int_0^\infty u^2d\rho=A^2\int_0^\infty\rho^{2l+2}\exp(-2\alpha\rho)=A^2(2\alpha)^{-2l-3}\Gamma(2l+3)=A^2\frac{(2l+2)!}{(2\alpha)^{2l+3}}$$

所以，

$$A(\alpha)=\sqrt{\frac{(2\alpha)^{2l+3}}{(2l+2)!}}$$

归一化的试探波函数写为：

$$u(\alpha,\rho)=\sqrt{\frac{(2\alpha)^{2l+3}}{(2l+2)!}}\rho^{l+1}\exp(-\alpha\rho) \tag{8}$$

现在计算有效哈密顿算符$\hat{H}_{\text{eff}}=-\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{l(l+1)}{\rho^2}+\rho$在$u(\alpha,\rho)$下的平均值. 注意到：

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{eff}}u(\alpha,\rho)&=\sqrt{\frac{(2\alpha)^{2l+3}}{(2l+2)!}}\left[-\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{l(l+1)}{\rho^2}+\rho\right][\rho^{l+1}\exp(-\alpha\rho)]\\&=\sqrt{\frac{(2\alpha)^{2l+3}}{(2l+2)!}}[\rho^{l+2}-\alpha^2\rho^{l+1}+2\alpha(l+1)\rho^l]\exp(-\alpha\rho)\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}\langle H_{\text{eff}}\rangle_{\alpha} &= \int_0^{\infty} u^*(\alpha,\rho)\hat{H}_{\text{eff}}u(\alpha,\rho)d\rho \\ &= \frac{(2\alpha)^{2l+3}}{(2l+2)!}\int_0^{\infty}\rho^{l+1}[\rho^{l+2}-\alpha^2\rho^{l+1}+2\alpha(l+1)\rho^{l}]\exp(-2\alpha\rho)d\rho \\ &= \frac{1}{(2l+2)!}\left[\frac{1}{2\alpha}\Gamma(2l+4)-\alpha^2\Gamma(2l+3)+4\alpha^2(l+1)\Gamma(2l+2)\right] \\ &= \frac{1}{2\alpha}[2\alpha^3+2l+3]\end{aligned}$$

令 $\frac{\partial}{\partial\alpha}\langle H_{\text{eff}}\rangle_{\alpha}=0$，知变分参数$\alpha$的最佳取值为：$\alpha=\sqrt[3]{\frac{2l+3}{4}}$. 所以，无量纲能级$\varepsilon$的近似值是：

$$\varepsilon\approx\langle H_{\text{eff}}\rangle_{\alpha}\Big|_{\alpha=\sqrt[3]{\frac{2l+3}{4}}}=3\sqrt[3]{\frac{(2l+3)^2}{16}} \tag{9}$$

2. 设一维无限深势阱的势能为

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a\\ \infty, & x<0 \text{ or } x>a\end{cases}$$

处在该势阱中的粒子的能量本征值记作E_j，相应的本征态记作$|\varphi_j\rangle$，$j=1$，2，⋯. 势阱中存在匀强磁场$\boldsymbol{B}=B\vec{e}_z$，式中$\vec{e}_z$表示$z$轴方向单位矢量. 设想有一个自旋为$\frac{1}{2}$的电中性旋量粒子处在这样的环境中，其总磁矩可以表为$\boldsymbol{\mu}=\gamma\boldsymbol{S}$，这里$\gamma$是常数，$\boldsymbol{S}$为粒子的自旋角动量. 设$t=0$时刻粒子的初始量子态为：

$$|\psi(0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[|\varphi_1\rangle\otimes|x+\rangle+|\varphi_2\rangle\otimes|x-\rangle]$$

式中$|x+\rangle$与$|x-\rangle$分别是自旋角动量分量算符S_x属于本征值$\frac{\hbar}{2}$与$-\frac{\hbar}{2}$的本征态矢量. ①请写出$t(t>0)$时刻粒子的态矢量$|\psi(t)\rangle$（10 分）. ②若在t时刻测量粒子的自旋角动量S_x，得到结果$\frac{\hbar}{2}$的概率是多少？

解:

粒子自旋部分的Hamilton算符为：

$$H_{\text{spin}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} = -\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z$$

其中$\omega = \gamma B$，σ_z为Pauli矩阵．H_{spin}的本征值为$\mp\frac{1}{2}\hbar\omega$，相应的本征态为$|z\pm\rangle$：

$$|z+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |z-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

① 因为，

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}[|z+\rangle + |z-\rangle],$$

$$|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}[|z+\rangle - |z-\rangle]$$

我们可以把初始时刻电子的量子态等价地表示为：

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}[|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle] \otimes |z+\rangle + \frac{1}{2}[|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle] \otimes |z-\rangle$$

倘若体系自然演化到t时刻，其量子态态矢量应为：

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2}\left[|\varphi_1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} + |\varphi_2\rangle e^{-iE_2 t/\hbar}\right] \otimes |z+\rangle e^{i\omega t/2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[|\varphi_1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} - |\varphi_2\rangle e^{-iE_2 t/\hbar}\right] \otimes |z-\rangle e^{-i\omega t/2} \\ &= \frac{1}{2}|\varphi_1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} \otimes [|z+\rangle e^{i\omega t/2} + |z-\rangle e^{-i\omega t/2}] \\ &\quad + \frac{1}{2}|\varphi_2\rangle e^{-iE_2 t/\hbar} \otimes [|z+\rangle e^{i\omega t/2} - |z-\rangle e^{-i\omega t/2}]\end{aligned}$$

② 注意到：

$$|z+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|x+\rangle + |x-\rangle], \qquad |z-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|x+\rangle - |x-\rangle]$$

我们还可以把$|\psi(t)\rangle$写为：

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} \otimes [|x+\rangle\cos(\omega t/2) + i|x-\rangle\sin(\omega t/2)] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_2\rangle e^{-iE_2 t/\hbar} \otimes [i|x+\rangle\sin(\omega t/2) + |x-\rangle\cos(\omega t/2)]\end{aligned}$$

因此，

$$\langle x+|\psi(t)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle e^{-iE_1t/\hbar}\cos(\omega t/2)+\frac{i}{\sqrt{2}}|\varphi_2\rangle e^{-iE_2t/\hbar}\sin(\omega t/2)$$

其模方就是所要求计算的概率：

$$P=|\langle x+|\psi(t)\rangle|^2=\frac{1}{2}[\sin^2(\omega t/2)+\cos^2(\omega t/2)]=\frac{1}{2}$$

3. 假设自由空间中有两个质量为m、自旋为$\frac{1}{2}$的全同粒子，它们之间的相互作用可由按如下自旋相关势描述

$$V(r,\vec{\sigma}_1,\vec{\sigma}_2)=-kr^2\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2$$

其中r为两粒子之间的距离，$k>0$为常量， 而$\vec{\sigma}_1$和$\vec{\sigma}_2$分别是描写两个粒子自旋角动量的泡利算符. ① 请写出该两粒子体系的一组力学量算符完备集（5 分）. ② 请给出该体系各束缚定态的能级和相应的简并度（10 分）. ③ 请写出该体系基态，并请注明相应的量子数（5 分）.

解:

① CSCO 可以选为$(H,\vec{L}^2,L_z,\vec{S}^2,S_z)$，依次分别为两体质心系中的 Hamilton 量、轨道角动量平方和其第三分量、总自旋平方和其第三分量，其中 Hamilton 量,

$$H=T+V=\frac{\vec{p}^2}{2\mu}-kr^2\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2$$

而折合质量为$\mu=m/2$.

② 在$(H,\vec{L}^2,L_z,\vec{S}^2,S_z)$的共同本征态下，$\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2$具有确定的值. 势能函数中的因子$r^2$在$r\to\infty$时趋于无穷大，欲存在束缚定态，势场必定等效于三维各向同性简谐振子的无限深球对称势阱，这要求$k\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2<0$. 由于

$$\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2=\frac{1}{2}[(\vec{\sigma}_1+\vec{\sigma}_2)^2-\vec{\sigma}_1^2-\vec{\sigma}_2^2]=\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1+\vec{\sigma}_2)^2-3$$

对自旋三重态，$\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2=1>0$. 对自旋单态，$\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2=-3<0$. 只有当两粒子体系处于自旋单态才可能形成束缚定态， 此时 Hamilton 算符可等效地表为：

$$H=\frac{\vec{p}^2}{2\mu}+3kr^2=\frac{\vec{p}^2}{2\mu}+\frac{1}{2}\mu\omega^2r^2$$

式中$\omega=\sqrt{\frac{6k}{\mu}}$. 与三维各向同性谐振子结果比较，得体系能级为:

$$E_N=\left(N+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega, \qquad (N=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

其中$N=2n_r+l$，这里l为角量子数，n_r为径向波函数节点数.　主量子数为N的能级，其简并度取决于轨道角动量平方和其第三分量的可能取值. 考虑到束缚态自旋只能是单态且全同 Fermi 子体系的完整波函数必须具有交换反对称性，体系的轨道波函数应具有交换对称性，即角量子数l只能取偶数. 从而N也只能取偶数. 这样该能级简并度为：

$$f_N=\sum_{l=0,2,4,\cdots\cdots}^{N}(2l+1)=\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$$

③　体系基态相应于$n_r=l=0$，其完整波函数具有形式：

$$\psi_G(\vec{r},\ \sigma_{1z},\ \sigma_{2z})\sim\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2r^2\right)\chi_{00}$$

式中$\alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}=\sqrt{\frac{\sqrt{6k\mu}}{\hbar}}$，而$\chi_{00}$为自旋单态波函数.

4.　设质量为μ、能量为E的粒子在球方势阱的势场

$$V(r)=\begin{cases}-V_0, & 0\le r\le a\\ 0, & a<r<\infty\end{cases}$$

中发生了弹性碰撞. 请使用一级玻恩近似，①计算微分散射截面并将其用球贝塞尔函数表出（10 分）. ②计算总截面（10 分）.

Hint：球贝塞尔函数的显示表达式为，

$$j_n(\xi)=(-1)^n\xi^n\left(\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right)^n\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right), \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

其中$j_0(\xi)$，$j_1(\xi)$满足的几个定积分公式是：

$$\int_0^\alpha \xi^2[j_0(\xi)]^2 d\xi = \frac{1}{2}\left[\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right],$$

$$\int_0^\alpha \frac{1}{\xi}[j_1(\xi)]^2 d\xi = \frac{1}{8\alpha^4}[2\alpha^4 - 2\alpha^2 + 2\alpha\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha) - 1],$$

$$\int_0^\alpha \xi^2[j_1(\xi)]^2 d\xi = \frac{1}{4\alpha}[\alpha\sin(2\alpha) + 2\cos(2\alpha) + 2\alpha^2 - 2].$$

解:

精确到玻恩一级近似，散射振幅为：

$$f_B(\theta) = -\frac{2\mu}{\hbar^2 q}\int_0^\infty rV(r)\sin(qr)dr = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2 q}\int_0^a r\sin(qr)dr$$

式中θ是散射角，$q = 2k\sin\frac{\theta}{2}$，$k = \sqrt{2\mu E}/\hbar$. 上述积分可简化为：

$$f_B(\theta) = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2 q^3}\int_0^{qa} x\sin(x)dx = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2 q^3}[\sin(qa) - (qa)\cos(qa)] = \frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2 q} j_1(qa)$$

微分散射截面求得为：

$$\sigma(\theta) = |f_B(\theta)|^2 = \left(\frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2 q}\right)^2 [j_1(qa)]^2$$

总散射截面是：

$$\begin{aligned}\sigma_T &= 2\pi\int_0^\pi \sigma(\theta)\sin\theta d\theta = 8\pi\int_0^\pi \sigma(\theta)\sin\frac{\theta}{2} d\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\pi}{k^2}\int_0^{2k}\sigma(\theta)qdq \\ &= \frac{2\pi}{k^2}\left(\frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar^2}\right)^2\int_0^{2k}\frac{1}{q}[j_1(qa)]^2 dq = \frac{\pi}{\mu E}\left(\frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar}\right)^2\int_0^{2ka}\frac{1}{\xi}[j_1(\xi)]^2 d\xi \\ &= \frac{\pi}{8\mu E}\left(\frac{2\mu V_0 a^2}{\hbar}\right)^2\frac{1}{(2ka)^4}[2(2ka)^4 - 2(2ka)^2 + 4ka\sin(4ka) + \cos(4ka) - 1]\end{aligned}$$