已修订
21-12-06，10:53

第 5 章 微振动

一、 微振动系统的运动方程

设稳定保守系统的拉氏量为$L=T-V$，其中

$$V=V(q),\qquad T=\frac{1}{2}T_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$$

系统在稳定平衡位置$q=q_0$处满足

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\right|_{q=q_0}=0,\qquad \alpha=1,2,\cdots,n.$$

若系统在平衡位置附近作微振动，可将$V(q)$在平衡点附近作级数展开，

$$V(\eta)=V(q_0)+\left(\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\right)_{q=q_0}\eta_\alpha+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha\partial q_\alpha}\right)_{q=q_0}\eta_\alpha\eta_\beta+\mathcal{O}(\eta^3)$$

其中微振动坐标η定义为

$$\eta_\alpha\stackrel{\text{def}}{=}q_\alpha-q_{0\alpha}$$

把平衡条件代入，并取势能零点$V(q_0)$为 0，舍去高阶项[1]，

$$V(\eta)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\right)_{q=q_0}\eta_\alpha\eta_\alpha\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{2}K_{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta=\frac{1}{2}\vec{\eta}^TK\vec{\eta}$$

$K_{\alpha\beta}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\right)_{q=q_0}$ 称为**刚度矩阵**。

在动能项$T=\frac{1}{2}T_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k$中，由于能量守恒，速度可以看成是和位移同阶的小量，$\mathcal{O}(\dot{q})=\mathcal{O}(q)$.前面的系数展开时只要保留到 0 次项，

$$T=\frac{1}{2}T_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta\approx\frac{1}{2}T_{\alpha\beta}(q_0)\dot{\eta}_\alpha\dot{\eta}_\beta\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{2}M_{\alpha\beta}\dot{\eta}_\alpha\dot{\eta}_\beta=\frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}^TM\dot{\vec{\eta}}$$

$M_{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}(q_0)$称为**惯性矩阵**。这里的惯性矩阵和刚度矩阵都是正定实对称矩阵。

④现在微振动系统的拉氏量成为

$$L=\frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}^TM\dot{\vec{\eta}}-\frac{1}{2}\vec{\eta}^TK\vec{\eta}$$

[1] 少数情况下会遇到 2 次项=0 的情形，此时由稳定平衡条件，3 次项也为 0，势能是位移的 4 次项。这里不讨论这种非线性振动。

运动方程为

$$M_{\alpha\beta}\ddot{\eta}_\beta+K_{\alpha\beta}\eta_\beta=0,\qquad M\ddot{\vec{\eta}}+K\vec{\eta}=\vec{0}$$

二、 简正模式

我们希望通过线性变换

$$\vec{\eta}(t)\stackrel{\text{def}}{=}A\vec{\xi}(t)$$

把拉氏量简化为

$$L=\frac{1}{2}\dot{\vec{\xi}}^T\dot{\vec{\xi}}-\frac{1}{2}\vec{\xi}^T\Omega\vec{\xi}$$

其中Ω是对角矩阵，且对角元是正数；$\vec{\xi}$称为**简正坐标**。

在此简正坐标下，运动方程已分离变量，能够求得解析解

$$\ddot{\xi}_j+\omega_j^2\xi_j=0,\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

$$\xi_j(t)=c_j\cos\left(\omega_jt-\varphi_j\right),\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

ω_j是系统的**自然频率**。记

$$\Omega=\mathrm{diag}\{\omega_1^2,\omega_2^2,\cdots,\omega_n^2\}$$

按 Sylvester 惯性定理，实二次型的规范形是唯一的。我们可以通过合同变换把M对角化，然后再作正交变换把K对角化，达到同时对角化的目的。

我们采用另一种思路解决对角化问题。

与原拉氏函数对比，矩阵A必须满足方程

$$A^TMA=I,\qquad A^TKA=\Omega$$

矩阵A定义了两种微振动坐标的变换，必为非奇异矩阵，

$$\det(A^TMA)=(\det A)^2\det M=1,\qquad \det A\neq 0,$$

将两个方程

$$I=A^TMA,\qquad A^TKA=\Omega$$

左右两边分别相乘，得

$$A^TKA=A^TMA\Omega$$

式子两边同时左乘$(A^T)^{-1}$，得

$$KA = MA\Omega$$

可以把矩阵A看成由n个线性无关的列矢量排列而成，

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n)$$

则有

$$K(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n) = M(\omega_1^2 \vec{a}_1, \omega_2^2 \vec{a}_2, \cdots, \omega_n^2 \vec{a}_n)$$

对每个矢量有广义特征方程

$$K\vec{a}_j = \omega_j^2 M \vec{a}_j, \qquad j = 1,2, \cdots, n.$$

利用上面的方程，可见特征值ω_j^2是特征多项式

$$\det(K - \omega^2 M) = 0$$

的n个根，

$$\omega^2 = \omega_1^2, \omega_2^2, \cdots, \omega_n^2.$$

代入广义特征方程，分别求出相应的特征矢$\vec{a}_j$，并以惯性矩阵为度规进行归一化，

$$\vec{a}_j^T M \vec{a}_j = 1, \qquad j = 1,2, \cdots, n.$$

可得矩阵A.

我们来看矩阵A的物理意义。系统以单一频率作简谐振动的运动模式，称为**简正模式**。这时

$$\vec{\eta}(t) = \vec{a}\cos(\omega t - \varphi)$$

代入运动方程得

$$(-\omega^2 M + K)\vec{a} = \vec{0}$$

所以$\omega^2 = \omega_1^2, \omega_2^2, \cdots, \omega_n^2$，只能取自然频率。对应的特征矢$\vec{a}_j$满足

$$\left(-\omega_j^2 M + K\right)\vec{a}_j = \vec{0}, \qquad j = 1,2, \cdots, n$$

$\vec{a}_j$表示在第j个简正模式下，各个微振动坐标的振幅比，故称之为**模态矢量**。矩阵A的每一列，都是一个模态矢量，因此被称为**模态矩阵**.

推论 1 模态矢量是完备的.

证明：以正定对称矩阵M为度规，矢量的内积

$$(\vec{x}, \vec{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{x}^T M \vec{y} \equiv \left(M^{\frac{1}{2}}\vec{x}\right)^T \left(M^{\frac{1}{2}}\vec{y}\right)$$

那么二次型

$$\vec{x}^T K \vec{y} \equiv \left(M^{\frac{1}{2}}\vec{x}\right)^T M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} \left(M^{\frac{1}{2}}\vec{y}\right)$$

在此度规下的刚度矩阵

$$M^{-\frac{1}{2}}KM^{-\frac{1}{2}}$$

仍是对称正定的，是规范阵。本征方程

$$M^{-\frac{1}{2}}KM^{-\frac{1}{2}}\left(M^{\frac{1}{2}}\vec{a}\right)=\lambda\left(M^{\frac{1}{2}}\vec{a}\right)\Leftrightarrow K\vec{a}=\lambda M\vec{a}$$

于是刚度矩阵的特征矢$\left\{M^{\frac{1}{2}}\vec{a}_j\middle|j=1,2,\cdots,n\right\}$完备，即$\left\{\vec{a}_j\middle|j=1,2,\cdots,n\right\}$完备。

推论 2 模态矢量互相正交。

证明：

$$\left(K-\omega_j^2M\right)\vec{a}_j=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}_k^T\left(K-\omega_j^2M\right)\vec{a}_j=0$$

$$(K-\omega_k^2M)\vec{a}_k=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}_j^T(K-\omega_k^2M)\vec{a}_k=0$$

两式相减，并利用K,M是对称矩阵，得

$$\left(\omega_j^2-\omega_k^2\right)\vec{a}_j^TM\vec{a}_k=0$$

当$\omega_j^2\neq\omega_k^2$时，$\vec{a}_j^TM\vec{a}_k=0$。

如果有重根，$\omega_j^2=\omega_k^2$，我们可以按内积$(\vec{x},\vec{y})=\vec{x}^TM\vec{y}$作施密特正交化，得到正交归一的本征矢.

总之，

$$\left(\vec{a}_j,\vec{a}_k\right)=\delta_{jk},\qquad\vec{a}_j^TM\vec{a}_k=\delta_{jk},\qquad A^TMA=I$$

推论 3 广义特征方程的特征值$\omega_j^2>0$.

证明：把广义特征方程的两边同乘以$\vec{a}_j^T$,

$$\vec{a}_j^TK\vec{a}_j=\omega_j^2\vec{a}_j^TM\vec{a}_j$$

$$\omega_j^2=\frac{\vec{a}_j^TK\vec{a}_j}{\vec{a}_j^TM\vec{a}_j}>0.$$

若采用另一种归一化方式，

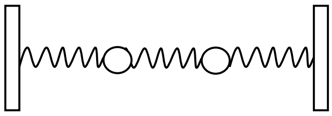
$$\left(\vec{a}_j^TM\vec{a}_k\right)=\mathrm{diag}\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}$$

则模式矩阵A可将M,K同时对角化为

$$A^TMA=\mathrm{diag}\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}$$

$$A^TKA=\mathrm{diag}\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$$

例 1 三根弹性系数为k的弹簧以及两个质量m的质点依次相连，两端固定在墙壁上。求系统作直线运动时的自然频率。



解 动能和势能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2+\dot{\eta}_2^2),$$
$$V=\frac{1}{2}k[\eta_1^2+(\eta_1-\eta_2)^2+\eta_2^2]=\frac{1}{2}k(2\eta_1^2+2\eta_2^2-2\eta_1\eta_2)$$

得惯性矩阵和刚度矩阵

$$M=m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad K=k\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

广义特征值满足

$$\det\left\{-\omega^2 m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\right\}=(2k-\omega^2 m)^2-k^2=0$$

$$\Longrightarrow \omega^2=3\omega_0^2,\omega_0^2,\qquad \omega_0^2\overset{\text{def}}{=}\frac{k}{m}$$

本征矢

$$\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\qquad \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

模态矩阵

$$A=\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=A^TM=\sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

简正坐标

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}=\sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix}\eta_1-\eta_2\\ \eta_1+\eta_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\cos\left(\sqrt{3}\omega_0 t+\varphi_1\right)\\ a_2\cos(\omega_0 t+\varphi_2)\end{pmatrix}$$

解为

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$$

重定义系数后，

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\cos\left(\sqrt{3}\omega_0 t+\varphi_1\right)-a_2\cos(\omega_0 t+\varphi_2)\\ a_1\cos\left(\sqrt{3}\omega_0 t+\varphi_1\right)+a_2\cos(\omega_0 t+\varphi_2)\end{pmatrix}$$

例 2 CO_2分子的振动

金尚年 p197； Goldstein p253 有误

三个质量分别为m,M,m的质点在一条直线上，通过两根弹性系数为k的弹簧（化学键）相连，弹簧的平衡长度为b。求纵向振动的简正模式。

解 势能$V=\frac{k}{2}(x_2-x_1-b)^2+\frac{k}{2}(x_3-x_2-b)^2$。引进微振动坐标$\eta_j\overset{\text{def}}{=}x_j-x_{j0}$，其中$x_{j0}$是平衡位置，且有$x_{02}-x_{01}=b,x_{03}-x_{02}=b$. 现在有

$$V=\frac{k}{2}(\eta_1^2+2\eta_2^2+\eta_3^2-2\eta_1\eta_2-2\eta_2\eta_3),\qquad T=\frac{m}{2}(\dot\eta_1^2+\dot\eta_3^2)+\frac{M}{2}\dot\eta_2^2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}k & -k & 0\\ -k & 2k & -k\\ 0 & -k & k\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & M & 0\\ 0 & 0 & m\end{pmatrix}$$

本征频率满足$\det(-\omega^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K})=0\Rightarrow\omega^2=0,\frac{k}{m},\frac{k}{mM}(2m+M)$，对应的本征矢为

$$\frac{1}{\sqrt{M+2m}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad \frac{1}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}}\begin{pmatrix}M\\-2m\\M\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{M+2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{M}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}}\\ \frac{1}{\sqrt{M+2m}} & 0 & \frac{-2m}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}}\\ \frac{1}{\sqrt{M+2m}} & -\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{M}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}}\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=A^T\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\frac{m}{\sqrt{M+2m}} & \frac{M}{\sqrt{M+2m}} & \frac{m}{\sqrt{M+2m}}\\ \frac{m}{\sqrt{2m}} & 0 & -\frac{m}{\sqrt{2m}}\\ \frac{Mm}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}} & \frac{-2mM}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}} & \frac{Mm}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}}\end{pmatrix}$$

简正坐标为

$$\vec\xi=A^{-1}\vec\eta\Rightarrow\begin{cases}\xi_1=\frac{1}{\sqrt{M+2m}}(m\eta_1+M\eta_2+m\eta_3)=\sqrt{M+2m}(x_{C0}+v_Ct)\\ \xi_2=\sqrt{\frac{m}{2}}(\eta_1-\eta_3)=C_2\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_2\right)\\ \xi_3=\sqrt{\frac{Mm}{2M+4m}}(\eta_1-2\eta_2+\eta_3)=C_3\cos\left(\sqrt{\frac{k(2m+M)}{mM}}t+\varphi_3\right)\end{cases}$$

通解为

$$\begin{cases}\eta_1(t)=(x_{C0}+v_Ct)+\dfrac{1}{\sqrt{2m}}C_2\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\varphi_2\right)+\dfrac{M}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}}C_3\cos\left(\sqrt{\dfrac{k(2m+M)}{mM}}t+\varphi_3\right)\\ \eta_2(t)=(x_{C0}+v_Ct)+\dfrac{-2m}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}}C_3\cos\left(\sqrt{\dfrac{k(2m+M)}{mM}}t+\varphi_3\right)\\ \eta_3(t)=(x_{C0}+v_Ct)-\dfrac{1}{\sqrt{2m}}C_2\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\varphi_2\right)+\dfrac{M}{\sqrt{2M^2m+4m^2M}}C_3\cos\left(\sqrt{\dfrac{k(2m+M)}{mM}}t+\varphi_3\right)\end{cases}$$

重定义积分常数，可简化成

$$\begin{cases}\eta_1(t)=(x_{C0}+v_Ct)+C_2\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\varphi_2\right)+C_3\cos\left(\sqrt{\dfrac{k(2m+M)}{mM}}t+\varphi_3\right)\\ \eta_2(t)=(x_{C0}+v_Ct)-\dfrac{2m}{M}C_3\cos\left(\sqrt{\dfrac{k(2m+M)}{mM}}t+\varphi_3\right)\\ \eta_3(t)=(x_{C0}+v_Ct)-C_2\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\varphi_2\right)+C_3\cos\left(\sqrt{\dfrac{k(2m+M)}{mM}}t+\varphi_3\right)\end{cases}$$

三、 矩阵解法

1. 矩阵解

由运动方程

$$\ddot{\vec{\eta}}=-M^{-1}K\vec{\eta}$$

得

$$\begin{pmatrix}\vec{\eta}(t+dt)\\ \dot{\vec{\eta}}(t+dt)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\eta}(t)\\ \dot{\vec{\eta}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dot{\vec{\eta}}(t)dt\\ \ddot{\vec{\eta}}(t)dt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\eta}(t)\\ \dot{\vec{\eta}}(t)\end{pmatrix}+dt\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ -M^{-1}K & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\eta}(t)\\ \dot{\vec{\eta}}(t)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{\eta}(t)\\ \dot{\vec{\eta}}(t)\end{pmatrix}=\exp\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ -M^{-1}K & \mathbf{0}\end{pmatrix}t\right\}\begin{pmatrix}\vec{\eta}(0)\\ \dot{\vec{\eta}}(0)\end{pmatrix}$$

这里我们使用了矩阵函数。

时间演化矩阵为

$$\begin{aligned}&\exp\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ -M^{-1}K & \mathbf{0}\end{pmatrix}t\right\}\\ &=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ -M^{-1}K & \mathbf{0}\end{pmatrix}t-\begin{pmatrix}M^{-1}K & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & M^{-1}K\end{pmatrix}\frac{t^2}{2!}-\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ -M^{-1}K & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M^{-1}K & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & M^{-1}K\end{pmatrix}\frac{t^3}{3!}+\cdots\\ &=\begin{pmatrix}\cos\left(t\sqrt{M^{-1}K}\right) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \cos\left(t\sqrt{M^{-1}K}\right)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ -M^{-1}K & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\sin\left(t\sqrt{M^{-1}K}\right)}{\sqrt{M^{-1}K}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dfrac{\sin\left(t\sqrt{M^{-1}K}\right)}{\sqrt{M^{-1}K}}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\left(t\sqrt{M^{-1}K}\right) & \dfrac{\sin\left(t\sqrt{M^{-1}K}\right)}{\sqrt{M^{-1}K}} \\ -\sqrt{M^{-1}K}\sin\left(t\sqrt{M^{-1}K}\right) & \cos\left(t\sqrt{M^{-1}K}\right) \end{pmatrix}$$

所以解为

$$\vec{\eta}(t)=\cos\sqrt{M^{-1}K}t\,\vec{\eta}(0)+\frac{1}{\sqrt{M^{-1}K}}\sin\sqrt{M^{-1}K}t\,\dot{\vec{\eta}}(0)$$

2. 矩阵函数简介

定义

$$f(A)\overset{\text{def}}{=}f(0)\mathbf{1}+f^{(1)}(0)A+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}A^2+\cdots$$

BCH 公式

$$e^Ae^B=e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A-B,[A,B]]+\cdots}$$

Hausdorff 公式

$$e^ABe^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}\big[A,[A,B]\big]+\cdots=e^{\mathrm{ad}A}\circ B$$

$$\mathrm{ad}A\circ B\overset{\text{def}}{=}[A,B]$$

行列式

$$\det e^A=e^{\operatorname{tr}A}$$

Cayley-Hamilton 定理

$$(M-\lambda_1\mathbf{1})(M-\lambda_2\mathbf{1})\cdots(M-\lambda_n\mathbf{1})=\mathbf{0}$$

例 求 2 阶矩阵A的指数。

解 设矩阵A的特征多项式为

$$f(\lambda)=\det(A-\lambda\mathbf{1})=\lambda^2-\lambda\operatorname{tr}A+\det A$$

则

$$e^A=c_1\mathbf{1}+c_2A\bmod f(A)$$

来自 Cayley-Hamilton 定理，

$$c_1+c_2x=e^x\bmod f(x)$$

矩阵A的特征值

$$f(\lambda)=0,\qquad \lambda=\frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}A\pm\sqrt{(\operatorname{tr}A)^2-4\det A}\right)$$

于是

$$e^{\lambda} = c_1 + c_2\lambda$$

$$e^{\frac{\operatorname{tr}A}{2}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{(\operatorname{tr}A)^2 - 4\det A}} = c_1 + c_2 \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}A + \sqrt{(\operatorname{tr}A)^2 - 4\det A}\right)$$

$$e^{\frac{\operatorname{tr}A}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{(\operatorname{tr}A)^2 - 4\det A}} = c_1 + c_2 \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}A - \sqrt{(\operatorname{tr}A)^2 - 4\det A}\right)$$

解出

$$c_1 = e^{\frac{\operatorname{tr}A}{2}} \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{\operatorname{tr}A}{2}\right)^2 - \det A}\right) - e^{\frac{\operatorname{tr}A}{2}} \frac{\operatorname{tr}A}{2} \cdot \frac{\sinh\left(\sqrt{\left(\frac{\operatorname{tr}A}{2}\right)^2 - \det A}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\operatorname{tr}A}{2}\right)^2 - \det A}}$$

$$c_2 = e^{\frac{\operatorname{tr}A}{2}} \frac{\sinh\left(\sqrt{\left(\frac{\operatorname{tr}A}{2}\right)^2 - \det A}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\operatorname{tr}A}{2}\right)^2 - \det A}}$$

当有重根时，

$$\left(\frac{\operatorname{tr}A}{2}\right)^2 - \det A = 0$$

取极限得

$$c_1 = e^{\frac{\operatorname{tr}A}{2}}\left(1 - \frac{\operatorname{tr}A}{2}\right), \qquad c_2 = e^{\frac{\operatorname{tr}A}{2}}$$

求解方程组

$$\begin{cases} e^{\lambda} = c_1 + c_2\lambda \\ e^{\lambda} = c_2 \end{cases}$$

可得同样的结论。

3. 例子

对例 1，不借助简正坐标，直接用矩阵法求解。

解 解为

$$\begin{aligned} \vec{\eta}(t) &= \cos\sqrt{M^{-1}K}t\,\vec{\eta}(0) + \frac{1}{\sqrt{M^{-1}K}}\sin\sqrt{M^{-1}K}t\,\dot{\vec{\eta}}(0) \\ &= \cos\sqrt{M^{-1}Kt^2}\,\vec{\eta}(0) + \frac{t}{\sqrt{M^{-1}Kt^2}}\sin\sqrt{M^{-1}Kt^2}\,\dot{\vec{\eta}}(0) \end{aligned}$$

其中

$$M = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K = k\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1}K = \omega_0^2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵$M^{-1}Kt^2$的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 4\omega_0^2 t^2 \lambda + 3\omega_0^4 t^4$$

特征值

$$\lambda_1 = 3\omega_0^2 t^2, \qquad \lambda_2 = \omega_0^2 t^2$$

设

$$\cos\sqrt{x} \bmod f(x) = c_1 + c_2 x$$

由

$$\cos\sqrt{\lambda_1} = c_1 + c_2\lambda_1, \qquad \cos\sqrt{\lambda_2} = c_1 + c_2\lambda_2$$

解得系数

$$c_1 = \frac{\lambda_1\cos\sqrt{\lambda_2} - \lambda_2\cos\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2}(3\cos\omega_0 t - \cos 3\omega_0 t)$$

$$c_2 = \frac{\cos\sqrt{\lambda_1} - \cos\sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2\omega_0^2 t^2}(\cos\omega_0 t - \cos 3\omega_0 t)$$

所以

$$\cos\sqrt{M^{-1}K}t = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\cos\omega_0 t - \frac{3}{2}\cos 3\omega_0 t & -\frac{1}{2}\cos\omega_0 t + \frac{1}{2}\cos 3\omega_0 t \\ -\frac{1}{2}\cos\omega_0 t + \frac{1}{2}\cos 3\omega_0 t & \frac{5}{2}\cos\omega_0 t - \frac{3}{2}\cos 3\omega_0 t \end{pmatrix}$$

再令

$$\frac{t}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x} \bmod f(x) = d_1 + d_2 x$$

解得

$$d_1 = \frac{t}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_2}}\sin\sqrt{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1}}\sin\sqrt{\lambda_1}\right) = \frac{1}{2\omega_0}\left(3\sin\omega_0 t - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\omega_0 t\right)$$

$$d_2 = \frac{t}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\sin\sqrt{\lambda_1} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\sin\sqrt{\lambda_2}\right) = \frac{1}{2\omega_0^3 t^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\omega_0 t - \sin\omega_0 t\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{M^{-1}K}}\sin\sqrt{M^{-1}K}t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{1}{2\sqrt{3}\omega_0}\sin\sqrt{3}\omega_0 t & \frac{1}{2\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{1}{2\sqrt{3}\omega_0}\sin\sqrt{3}\omega_0 t \\ \frac{1}{2\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{1}{2\sqrt{3}\omega_0}\sin\sqrt{3}\omega_0 t & \frac{1}{2\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{1}{2\sqrt{3}\omega_0}\sin\sqrt{3}\omega_0 t \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} \eta_1(t) = {} & \eta_1(0)\left(\frac{5}{2}\cos\omega_0 t - \frac{3}{2}\cos 3\omega_0 t\right) + \eta_2(0)\left(-\frac{1}{2}\cos\omega_0 t + \frac{1}{2}\cos 3\omega_0 t\right) \\ & + \frac{\dot{\eta}_1(0)}{\omega_0}\left(\frac{1}{2}\sin\omega_0 t + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\omega_0 t\right) + \frac{\dot{\eta}_2(0)}{\omega_0}\left(\frac{1}{2}\sin\omega_0 t - \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\omega_0 t\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2(t) = {} & \eta_1(0)\left(-\frac{1}{2}\cos\omega_0 t + \frac{1}{2}\cos 3\omega_0 t\right) + \eta_2(0)\left(\frac{5}{2}\cos\omega_0 t - \frac{3}{2}\cos 3\omega_0 t\right) \\ & + \frac{\dot{\eta}_1(0)}{\omega_0}\left(\frac{1}{2}\sin\omega_0 t - \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\omega_0 t\right) + \frac{\dot{\eta}_2(0)}{\omega_0}\left(\frac{1}{2}\sin\omega_0 t + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\omega_0 t\right) \end{aligned}$$

四、　受迫振动和格林函数

1.　运动方程

$$M_{jk}\ddot{\eta}_k + K_{jk}\eta_k = F_j(t)$$

$$A^T M\ddot{\vec{\eta}} + A^T K\vec{\eta} = A^T\vec{F} \overset{\text{def}}{=} \vec{Q}(t)$$

$$A^T MAA^{-1}\ddot{\vec{\eta}} + A^T KAA^{-1}\vec{\eta} = \vec{Q}(t)$$

$$\ddot{\vec{\xi}} + \Omega\vec{\xi} = \vec{Q}(t)$$

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2\xi_j = Q_j(t)\ (j\text{不求和})$$

上式的一般解是特解与$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2\xi_j = 0$的通解之和。通解前面已给出。

2.　叠加原理

定理一 已知线性微分方程$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0$的两个解$f_1(t), f_2(t)$，则线性组合

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

也是微分方程的解。

定理二 如果$f_\alpha(t)$是$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = Q_\alpha(t)$的解，$Q(t) = \sum_\alpha Q_\alpha(t)$，那么$\sum_\alpha f_\alpha(t)$是方程

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = Q(t)$$

的解。

3.　Green 函数

从初始时刻t＝0起持续作用于系统的策动力$Q(t)$，可以看成是冲击力$\delta(t-t')$的线性叠加，

$$Q(t) = \int_0^{+\infty} Q(t')\delta(t-t')dt'$$

因此我们先求出微分方程

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = \delta(t-t')$$

满足初条件$f(0) = 0, \dot{f}(0) = 0$的解，这个解称为 Green 函数。

为了求解方程，考虑 Laplace 变换，

$$L(s) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}[f(t)] \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

和逆变换

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[L(s)] \equiv \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} L(s)e^{st}ds\ \ (t \geq 0, \sigma \geq 0)$$

有

$$\mathcal{L}[f(t)] = L(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right] = sL(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\ddot{f}(t)\right] = sL(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t-t')] = \theta(t')e^{-t's}$$

对运动方程作 Laplace 变换，

$$s^2L(s) - sf(0) - \dot{f}(0) + \omega^2 L(s) = e^{-t's}$$

$$L(s) = \frac{e^{-t's} + sf(0) + \dot{f}(0)}{s^2+\omega^2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[L(s)] \equiv \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} L(s)e^{st}ds \quad (t \geq 0, \sigma \geq 0)$$
$$= f(0)\cos(\omega t) + \dot{f}(0)\frac{\sin(\omega t)}{\omega} + \theta(t-t')\frac{\sin(\omega(t-t'))}{\omega}$$

从而 Green 函数为

$$G(t,t') = \theta(t-t')\frac{\sin\left(\omega(t-t')\right)}{\omega}$$

又称生成函数、响应函数（电路理论、信号处理）或传播子（粒子物理、量子场论）。格林函数满足因果性。

可以用另一种方式得出格林函数：

在 $t = t'$ 时刻对谐振子施加冲量 1 之后，$\dot{f}(t')$ 增加了了 1，所以在 $t > t'$ 时有响应 $\sin\left(\omega(t-t')\right)/\omega$。

4. 一般解

由叠加原理，

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = Q(t)$$

满足$f(0) = 0, \dot{f}(0) = 0$的特解为

$$\int_0^\infty Q(t')\theta(t-t')\frac{\sin\left(\omega(t-t')\right)}{\omega}dt' = \frac{1}{\omega}\int_0^t Q(t')\sin\left(\omega(t-t')\right)dt'$$

所以

$$\ddot{\xi}_j + \omega_j^2 \xi_j = Q_j(t)$$

的一般解为

$$\xi_j(t) = \xi_j(0)\cos(\omega_j t) + \dot{\xi}_j(0)\frac{\sin(\omega_j t)}{\omega_j} + \frac{1}{\omega_j}\int_0^t Q_j(t')\sin\left(\omega_j(t-t')\right)dt'$$

如果策动力是从t_0时刻起施加的，则$t \geq t_0$时，

$$\xi_j(t) = \xi_j(t_0)\cos\left(\omega_j(t-t_0)\right) + \dot{\xi}_j(t_0)\frac{\sin\left(\omega_j(t-t_0)\right)}{\omega_j} + \frac{1}{\omega_j}\int_{t_0}^{t} Q_j(t')\sin\left(\omega_j(t-t')\right)dt'$$

5. 矩阵形式的一般解和格林函数

通过乘以模态矩阵，变换为微振动坐标，得通解为

$$\begin{aligned}\vec{\eta}(t) = \cos\left(\sqrt{M^{-1}K}(t-t_0)\right)\vec{\eta}(t_0) + \frac{1}{\sqrt{M^{-1}K}}\sin\left(\sqrt{M^{-1}K}(t-t_0)\right)\dot{\vec{\eta}}(t_0) \\ + \frac{1}{\sqrt{M^{-1}K}}\int_{t_0}^{t}\sin\left(\sqrt{M^{-1}K}(t-t')\right)M^{-1}\vec{F}(t')dt'\end{aligned}$$

可见矩阵形式的格林函数为

$$G(t,t') = \theta(t-t')\frac{1}{\sqrt{M^{-1}K}}\sin\left(\sqrt{M^{-1}K}(t-t')\right)M^{-1}$$

$G_{jk}(t,t')$表示t'时刻k分量上施加的冲击力，在t时刻j分量造成的位移；也可以看成是t'时的速度增量$M^{-1}\vec{F}(t')dt'$，在t时刻导致的响应。

6. 共振

如果外力是周期力，且频率$\omega = \omega_j$与某个自然频率重合，

$$Q_j(t) = Q_{0j}\cos\left(\omega_j t + \theta\right), \qquad t \geq 0$$

则

$$\begin{aligned}\xi_j(t) &= \xi_j(0)\cos\left(\omega_j t\right) + \dot{\xi}_j(0)\frac{\sin\left(\omega_j t\right)}{\omega_j} + \frac{Q_{0j}}{\omega_j}\int_0^t \cos\left(\omega_j t' + \theta\right)\sin\left(\omega_j(t-t')\right)dt' \\ &= \xi_j(0)\cos\left(\omega_j t\right) + \dot{\xi}_j(0)\frac{\sin\left(\omega_j t\right)}{\omega_j} + \frac{Q_{0j}}{2\omega_j}\left\{t\sin\left(\omega_j t + \theta\right) - \sin\theta\frac{\sin\omega_j t}{\omega_j}\right\}\end{aligned}$$

$t \to +\infty$时，$\xi_j(t) \approx \frac{Q_{0j}}{2\omega_j}t\sin\left(\omega_j t + \theta\right)$，振幅趋于无穷大，必须考虑非线性项。

思考：两倍于自然频率的周期外力，是否会引起共振？

7. 参数共振*

设微振动系统的参数（朗道，《力学》），随时间周期性微小变化（例如荡秋千），比如

$$\omega_0^2 \to \omega_0^2(1 + \varepsilon\cos(\omega t + \varphi))$$

$$0 < \varepsilon < 2\pi$$

运动方程（Mathieu equation）为

$$\ddot{\eta}+(\omega_0^2+\varepsilon\omega_0^2\cos(\omega t+\varphi))\eta=0$$

$$\ddot{\eta}+\omega_0^2\eta=-\varepsilon\omega_0^2\cos(\omega t+\varphi)\,\eta$$

把式子右边视为微扰项，迭代可知

$$\eta(t)=c_0\cos(\omega_0 t+\theta_0)+c_1\cos\Big((\omega\pm\omega_0)t+\theta_{\pm1}\Big)+c_2\cos\Big((2\omega\pm\omega_0)t+\theta_{\pm2}\Big)+\cdots$$

现在把方程右边看作外力，可见

$$n\omega-\omega_0=\omega_0$$

时会产生共振，

$$\omega=\frac{2}{n}\omega_0,\qquad n=1,2,3,\cdots$$

运动方程写成

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\eta\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -(\omega_0^2+\varepsilon\cos\omega t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}$$

时间$t=0\to t=T=\frac{2\pi}{\omega}$的演化矩阵$A$满足

$$\begin{pmatrix}\eta(T)\\ \dot{\eta}(T)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\eta(0)\\ \dot{\eta}(0)\end{pmatrix}$$

$$\det A=1$$

原因是

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -(\omega_0^2+\varepsilon\cos\omega t) & 0\end{pmatrix}=0$$

在整个演化过程中，雅克比行列式均为 1。

定义：相空间V中的线性映射

$$\vec{x}\to A\vec{x}$$

其不动点$\vec{x}_0=A\vec{x}_0$若满足

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,|\vec{x}-\vec{x}_0|<\delta\hookrightarrow\forall n\in\boldsymbol{N},|A^n\vec{x}-A^n\vec{x}_0|<\epsilon$$

或等价地

$$\exists\delta>0,|\vec{x}-\vec{x}_0|<\delta\hookrightarrow\ |A^n\vec{x}-A^n\vec{x}_0|\xrightarrow{n\to+\infty}0$$

则称$\vec{x}_0$是渐近稳定（李雅普诺夫稳定）。

记A的两个特征值为λ_1, λ_2，

$$\det A = 1 \Longrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = 1$$

A是实矩阵，特征多项式的复根成对。有两种可能：（1）$\lambda_1 = \lambda_2^* \Longrightarrow |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$，系统稳定；（2）特征值都是实数，$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \geq 4\lambda_1\lambda_2 = 4, |\mathrm{tr}\, A| \geq 2$，当$\mathrm{tr}\, A = \pm 2$时系统稳定。

总之，当$|\mathrm{tr}\, A| > 2$时系统不稳定。

考虑$n = 1$的参数共振，设

$$\omega = 2\omega_0 + \Delta\omega$$

其中$\Delta\omega$是对共振频率的微小偏离。设运动方程的解为

$$\eta(t) = a(t)\cos\omega t + b(t)\sin\omega t$$

这里$a(t)$和$b(t)$是随时间缓慢变换的函数，其导数为 1 阶无穷小量。代入运动方程，保留到 1 阶无穷小，舍弃非共振项（频率不靠近ω_0的三角振荡），得

$$-\left(2\dot{a} + b\Delta\omega + \frac{1}{2}\epsilon\omega_0 b\right)\omega_0 \sin\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t + \left(2\dot{b} - a\Delta\omega + \frac{1}{2}\epsilon\omega_0 a\right)\omega_0 \cos\left(\omega_0 + \frac{1}{2}\Delta\omega\right)t = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2\dot{a} + b\Delta\omega + \frac{1}{2}\epsilon\omega_0 b = 0 \\ 2\dot{b} - a\Delta\omega + \frac{1}{2}\epsilon\omega_0 a = 0 \end{cases}$$

设振幅指数增长，

$$a(t) = a_0 e^{\mu t}, \qquad b(t) = b_0 e^{\mu t}$$

代入上式，

$$\begin{pmatrix} \mu & \frac{1}{2}\Delta\omega + \frac{1}{4}\epsilon\omega_0 \\ -\frac{1}{2}\Delta\omega + \frac{1}{4}\epsilon\omega_0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = 0$$

有解的条件是系数矩阵的行列式为零，从而

$$\left(\frac{1}{2}\Delta\omega + \frac{1}{4}\epsilon\omega_0\right)\left(-\frac{1}{2}\Delta\omega + \frac{1}{4}\epsilon\omega_0\right) > 0$$

$$\Longrightarrow |\Delta\omega| < \frac{1}{2}\epsilon\omega_0$$

当参数共振的频率变高时，频率的共振范围减小。只有$\mathrm{n} = 1,2$比较容易实现。

参数共振在船运、电路、控制理论以及量子力学中有应用。

五、 阻尼振动

1. 阻尼振动的运动方程

设阻尼正比于速度，可用 Rayleigh 耗散函数$G=\frac{1}{2}\mu_{jk}\dot{\eta}_j\dot{\eta}_k$描述，运动方程为

$$M_{jk}\ddot{\eta}_k+\mu_{jk}\dot{\eta}_k+K_{jk}\eta_k=0$$

$$M\ddot{\vec{\eta}}+\mu\dot{\vec{\eta}}+K\vec{\eta}=\vec{0}$$

其中M,μ,K是正定实对称矩阵。

2. 求解

（1）矩阵解法

方程可写成

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec{\eta}\\ \dot{\vec{\eta}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ -M^{-1}K & -M^{-1}\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\eta}\\ \dot{\vec{\eta}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{\eta}(t)\\ \dot{\vec{\eta}}(t)\end{pmatrix}=\exp\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ -M^{-1}K & -M^{-1}\mu\end{pmatrix}t\right\}\begin{pmatrix}\vec{\eta}(0)\\ \dot{\vec{\eta}}(0)\end{pmatrix}$$

然后化简。

特例：设解为

$$\vec{\eta}(t)=\exp\{Bt\}\vec{c}$$

其中矩阵B满足二次矩阵方程（quadratic matrix equation）

$$MB^2+\mu B+K=\mathbf{0}$$

当

$$\mu M^{-1}K=KM^{-1}\mu$$

时，矩阵方程的解为

$$B_1=-\frac{1}{2}M^{-1}\mu+\frac{1}{2}\sqrt{(M^{-1}\mu)^2-4M^{-1}K}$$

$$B_2=-\frac{1}{2}M^{-1}\mu-\frac{1}{2}\sqrt{(M^{-1}\mu)^2-4M^{-1}K}$$

若

$$\det(\mu^2-4MK)\neq 0$$

则运动方程的通解为

$$\vec{\eta}(t)=\exp\{B_1t\}\,\vec{c}_1+\exp\{B_2t\}\,\vec{c}_2$$

初值条件要求

$$\vec{c}_1+\vec{c}_2=\vec{\eta}(0)$$

$$B_1\vec{c}_1+B_2\vec{c}_2=\dot{\vec{\eta}}(0)$$

解出

$$\vec{c}_1=-\frac{1}{B_1-B_2}\left(B_2\vec{\eta}(0)-\dot{\vec{\eta}}(0)\right)=\frac{1}{\sqrt{(M^{-1}\mu)^2-4M^{-1}K}}\left(B_2\vec{\eta}(0)-\dot{\vec{\eta}}(0)\right)$$

$$\vec{c}_2=\frac{1}{B_1-B_2}\left(B_1\vec{\eta}(0)-\dot{\vec{\eta}}(0)\right)=\frac{-1}{\sqrt{(M^{-1}\mu)^2-4M^{-1}K}}\left(B_1\vec{\eta}(0)-\dot{\vec{\eta}}(0)\right)$$

特例：结构阻尼$\mu_{jk}=\alpha M_{jk}+\beta K_{jk}$

（2）Laplace 变换*

$$L_j(s)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{L}\left[\eta_j(t)\right]\equiv\int_0^\infty\eta_j(t)e^{-st}dt$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\left[M_{jk}\ddot{\eta}_k+\mu_{jk}\dot{\eta}_k+K_{jk}\eta_k\right]\\&=M_{jk}\{s^2L_k(s)-s\eta_k(0)-\dot{\eta}_k(0)\}+\mu_{jk}\{sL_k(s)-\eta_k(0)\}+K_{jk}L_k(s)\\&=\left\{s^2M_{jk}+s\mu_{jk}+K_{jk}\right\}L_k(s)-M_{jk}\dot{\eta}_k(0)-\left\{sM_{jk}+\mu_{jk}\right\}\eta_k(0)=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\vec{L}(s)=\frac{s}{s^2M+s\mu+K}M\vec{\eta}(0)+\frac{1}{s^2M+s\mu+K}\left\{M\dot{\vec{\eta}}(0)+\mu\vec{\eta}(0)\right\}$$

一般来说三个实对称正定矩阵M,μ,K不能同时对角化，需要利用 Cayley-Hamilton 定理化简$\{s^2M+s\mu+K\}^{-1}$，然后逆变换$\vec{L}(s)$得$\vec{\eta}(t)$。

（3）特征方程法*

以试探解$\eta_j(t)=Ca_je^{\gamma t}$代入方程得

$$(\gamma^2M+\gamma\mu+K)\vec{a}=\vec{0}$$

有解条件为

$$\det(\gamma^2M+\gamma\mu+K)=0$$

得特征值γ（是成对的复数，且可证实部是负数[2]），代入特征方程可解出对应的特征矢。通解是特征解的线性组合。

[2] 一对复根满足$\gamma^2\left(\vec{a}^\dagger M\vec{a}\right)+\gamma\left(\vec{a}^\dagger\mu\vec{a}\right)+\left(\vec{a}^\dagger K\vec{a}\right)=0$，所以这个二次方程的两根之和为

$$\gamma+\gamma^*=-\frac{\left(\vec{a}^\dagger\mu\vec{a}\right)}{\left(\vec{a}^\dagger M\vec{a}\right)}<0$$

3. 受迫阻尼振动*

对于受迫振动，

$$M_{jk}\ddot{\eta}_k + \mu_{jk}\dot{\eta}_k + K_{jk}\eta_k = F_j(t)$$

对于一般的$F_j(t)$，可利用 Green 函数求解。

4. 受迫阻尼振动的稳态解*

傅立叶变换

六、 微扰和重整化*

1. 单摆问题的精确解

单摆问题的拉氏量

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

运动方程为

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0, \qquad \omega_0^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{g}{l}$$

变形为

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = -2\omega_0^2\sin\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2\cos\theta + c_1$$

$$dt = \pm\frac{d\theta}{\sqrt{2\omega_0^2\cos\theta + c_1}}$$

有解析解（椭圆积分）

$$t = \pm\int\frac{d\theta}{\sqrt{2\omega_0^2\cos\theta + c_1}} + c_2$$

若振幅为α，且初条件为

$$\theta(0) = \alpha, \qquad \dot{\theta}(0) = 0$$

则

即$\mathrm{Re}\,\gamma < 0$.

$$c_1 = -2\omega_0^2 \cos\alpha$$

$$
\begin{aligned}
t &= \pm\int_\alpha^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta' - \cos\alpha)}} = \pm\frac{1}{2\omega_0}\int_\alpha^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta'}{2}}} \\
&\xrightarrow{\sin\frac{\theta'}{2}/\sin\frac{\alpha}{2} \overset{\text{def}}{=} \sin x} \pm\frac{1}{\omega_0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arcsin\left(\sin\frac{\theta}{2}/\sin\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 x}} \\
&= -\frac{1}{\omega_0} F\left(\arcsin\left(\sin\frac{\theta}{2}/\sin\frac{\alpha}{2}\right) \middle| \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{\omega_0} F\left(\frac{\pi}{2} \middle| \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}
$$

其中第一类椭圆积分定义为

$$F(\phi|m) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\phi \frac{du}{\sqrt{1 - m\sin^2 u}}, \qquad \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

周期为

$$T = 4 \cdot \frac{1}{\omega_0} F\left(\frac{\pi}{2} \middle| \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$T/T_0 \approx 1 + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{11\alpha^4}{3072} + \frac{173\alpha^6}{737280} + \frac{22931\alpha^8}{1321205760} + \cdots$$

圆频率

$$
\begin{aligned}
\omega^2/\omega_0^2 &= \frac{\pi^2}{4\left\{F\left(\frac{\pi}{2} \middle| \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\right\}^2} \\
&= 1 - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{7\alpha^4}{1536} - \frac{19\alpha^6}{184320} + \frac{127\alpha^8}{660602880} + \mathcal{O}(\alpha^{10})
\end{aligned}
$$

2. 微扰法

考虑方程

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \lambda\omega_0^2(\theta - \sin\theta)$$

其中参数λ用来标记微扰项的量级。这时方程的解为

$$\theta = \theta(t, \lambda)$$

对λ展开，

$$\theta(t, \lambda) \equiv \theta_0(t) + \lambda\theta_1(t) + \lambda^2\theta_2(t) + \cdots$$

考虑到微扰项可能会改变周期，为了更快收敛到精确解，令

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \lambda\omega_1^2 + \lambda^2\omega_2^2 + \cdots$$

即将ω_0^2分拆为各阶微扰贡献之和。

代入运动方程，然后按λ幂次展开，方程两边各阶的系数应相等。下面我们准备计算到λ二阶项，并保留微扰项到$\mathcal{O}(\lambda^3)$，

$$\left(\ddot{\theta}_0+\lambda\ddot{\theta}_1+\lambda^2\ddot{\theta}_2\right)+(\omega^2+\lambda\omega_1^2+\lambda^2\omega_2^2)(\theta_0+\lambda\theta_1+\lambda^2\theta_2)=\lambda(\omega^2+\lambda\omega_1^2)\frac{1}{6}(\theta_0+\lambda\theta_1)^3+\mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\begin{aligned}&\left(\ddot{\theta}_0+\omega^2\theta_0\right)+\left(\ddot{\theta}_1+\omega^2\theta_1+\omega_1^2\theta_0\right)\lambda+\left(\ddot{\theta}_2+\omega^2\theta_2+\omega_1^2\theta_1+\omega_2^2\theta_0\right)\lambda^2\\&=\omega^2\frac{1}{6}\theta_0^3\lambda+\left\{\omega^2\frac{1}{2}\theta_0^2\theta_1+\omega_1^2\frac{1}{6}\theta_0^3\right\}\lambda^2+\mathcal{O}(\lambda^3)\end{aligned}$$

有

$$\ddot{\theta}_0+\omega^2\theta_0=0$$

$$\ddot{\theta}_1+\omega^2\theta_1+\omega_1^2\theta_0=\frac{1}{6}\omega^2\theta_0^3$$

$$\ddot{\theta}_2+\omega^2\theta_2+\omega_1^2\theta_1+\omega_2^2\theta_0=\frac{1}{2}\omega^2\theta_0^2\theta_1+\frac{1}{6}\omega_1^2\theta_0^3$$

零阶方程给出

$$\theta_0(t)=A_0\cos(\omega t+\varphi_0)$$

代入一阶微扰方程，

$$\ddot{\theta}_1+\omega^2\theta_1=-\omega_1^2\theta_0+\frac{1}{6}\omega^2\theta_0^3$$

等式右边均为已知函数，相当于受迫振动问题中的策动力。

利用三角公式

$$\cos^3\phi=\frac{3}{4}\cos\phi+\frac{1}{4}\cos 3\phi$$

右边化简为

$$-\omega_1^2\theta_0+\frac{1}{6}\omega^2\theta_0^3=\left(-\omega_1^2A_0+\frac{1}{8}\omega^2A_0^3\right)\cos(\omega t+\varphi_0)+\frac{1}{24}\omega^2A_0^3\cos(3\omega t+3\varphi_0)$$

其中第一项会导致$\theta_1(t)$含有$t\sin\omega t$形式的共振项，t较大时，$\theta_1(t)$会比$\theta_0(t)$更重要，收敛性不好。因此我们选择参数ω_1^2，使

$$-\omega_1^2A_0+\frac{1}{8}\omega^2A_0^3=0$$

$$\omega_1^2=\frac{1}{8}A_0^2\omega^2$$

这时一阶微扰方程成为

$$\ddot{\theta}_1+\omega^2\theta_1=\frac{1}{24}A_0^3\omega^2\cos(3\omega t+3\varphi_0)$$

解为

$$\theta_1(t)=c_1\cos(\omega t+\varphi_1)-\frac{A_0^3}{192}\cos(3\omega t+3\varphi_0)$$

为了好的收敛性，令$c_1=0$，

$$\theta_1(t) = -\frac{A_0^3}{192}\cos(3\omega t + 3\varphi_0)$$

把θ_0和θ_1代入二阶微扰方程，

$$\ddot{\theta}_2 + \omega^2\theta_2 = -\omega_2^2\theta_0 + \frac{1}{6}\omega_1^2\theta_0^3 - \omega_1^2\theta_1 + \frac{1}{2}\omega^2\theta_0^2\theta_1$$

右式为

$$\begin{aligned}
&-\omega_2^2\theta_0 + \frac{1}{6}\omega_1^2\theta_0^3 - \omega_1^2\theta_1 + \frac{1}{2}\omega^2\theta_0^2\theta_1 \\
&= \left(-\omega_2^2 A_0 + \frac{1}{6}\omega_1^2 A_0^3 \cdot \frac{3}{4}\right)\cos(\omega t + \varphi_1) + \left(\frac{1}{6}\omega_1^2 A_0^3 \cdot \frac{1}{4} + \omega_1^2\frac{A_0^3}{192}\right)\cos(3\omega t + 3\varphi_0) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\omega^2 A_0^2\left(-\frac{A_0^3}{192}\right)\cos^2(\omega t + \varphi_1)\cos(3\omega t + 3\varphi_0) \\
&= \left(-\omega_2^2 A_0 + \frac{1}{8}\omega_1^2 A_0^3\right)\cos(\omega t + \varphi_1) + \frac{3}{64}\omega_1^2 A_0^3\cos(3\omega t + 3\varphi_0) \\
&\qquad - \frac{1}{384}\omega^2 A_0^5\frac{1}{4}\{\cos(\omega t + \varphi_1) + 2\cos(3\omega t + 3\varphi_0) + \cos(5\omega t + 5\varphi_0)\} \\
&= \left(-\omega_2^2 A_0 + \frac{1}{64}\omega^2 A_0^5 - \frac{1}{1536}\omega^2 A_0^5\right)\cos(\omega t + \varphi_1) + \left(\frac{3}{512}\omega^2 A_0^5 - \frac{1}{768}\omega^2 A_0^5\right)\cos(3\omega t + 3\varphi_0) \\
&\qquad - \frac{1}{1536}\omega^2 A_0^5\cos(5\omega t + 5\varphi_0) \\
&= \left(-\omega_2^2 A_0 + \frac{23}{1536}\omega^2 A_0^5\right)\cos(\omega t + \varphi_1) + \frac{7}{1536}\omega^2 A_0^5\cos(3\omega t + 3\varphi_0) \\
&\qquad - \frac{1}{1536}\omega^2 A_0^5\cos(5\omega t + 5\varphi_0)
\end{aligned}$$

为了好的收敛性，需令

$$-\omega_2^2 A_0 + \frac{23}{1536}\omega^2 A_0^5 = 0$$

$$\omega_2^2 = \frac{23}{1536}A_0^4\omega^2$$

二阶方程成为

$$\ddot{\theta}_2 + \omega^2\theta_2 = \frac{7}{1536}\omega^2 A_0^5\cos(3\omega t + 3\varphi_0) - \frac{1}{1536}\omega^2 A_0^5\cos(5\omega t + 5\varphi_0)$$

解得

$$\theta_2(t) = -\frac{7}{12288}A_0^5\cos(3\omega t + 3\varphi_0) + \frac{1}{36864}A_0^5\cos(5\omega t + 5\varphi_0)$$

上式中已取$\cos(\omega t + \varphi_0)$项的系数为零。

现在取$\lambda = 1$，准确到二阶，

$$\begin{aligned}
&\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t) + \theta_2(t) \\
&= A_0\cos(\omega t + \varphi_0) - \left(\frac{A_0^3}{192} + \frac{7}{12288}A_0^5\right)\cos(3\omega t + 3\varphi_0) + \frac{1}{36864}A_0^5\cos(5\omega t + 5\varphi_0)
\end{aligned}$$

其中真实频率ω满足

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega^2 + \frac{1}{8}A_0^2\omega^2 + \frac{23}{1536}A_0^4\omega^2$$

解得

$$\omega^2/\omega_0^2=\frac{1}{1+\frac{1}{8}A_0^2+\frac{23}{1536}A_0^4}$$

周期为

$$T_2=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{1+\frac{1}{8}A_0^2+\frac{23}{1536}A_0^4}$$

$$T_2/T_0=\sqrt{1+\frac{1}{8}A_0^2+\frac{23}{1536}A_0^4}\approx 1+\frac{A_0^2}{16}+\frac{17A_0^4}{3072}$$

取$\omega t+\varphi_0=0$得振幅为

$$\alpha\approx A_0-\frac{A_0^3}{192}-\frac{5A_0^5}{9216}$$
$$A_0\approx\alpha+\frac{\alpha^3}{192}+\frac{23\alpha^5}{36864}$$

现在

$$T_2/T_0=1+\frac{\alpha^2}{16}+\frac{19\alpha^4}{3072}+\mathcal{O}(\alpha^6)$$

$$\omega^2/\omega_0^2=1-\frac{\alpha^2}{8}-\frac{\alpha^4}{1536}+\mathcal{O}(\alpha^6)$$

Dept. Mod. Phys.
2021.12.06
朱界杰