线性代数复习

BY 刘睿智

1

本note的几乎所有内容来源[1]和[2]，仅用于快速科普，不可替代严肃的线性代数学习，请同学们根据自己的情况,选择合适的参考材料进一步学习。

2 线性空间

在线性代数中，向量的概念迎来了一次变革。向量并不是有大小又有方向的量，也不单纯是一堆数，而是线性空间的元素。因此要定义向量，就是要去定义线性空间。

定义 1. *假设V是一个集合，其中任意两个元素进行线性叠加的结果仍为这个向量空间的元素。*[1]

例 2. 考虑线性微分方程

$$y'' + y = 0$$

假设y_1, y_2是它的解，那么

$$\alpha y_1 + \beta y_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

仍然是它的解，请大家自行验证。

例 3. 只要你适当地去定义加法和数乘就能得到线性空间，而向量空间的元素本身"是什么"，这对于线性代数而言不重要。比如你可以写

$$\alpha \text{苹果} + \beta \text{梨}$$

这就是水果线性空间中的元素啦(我们姑且假定世界上只有这两种水果)，把所有这样的元素放在一起，可以写为span{苹果, 梨}。比如你还可以写

$$\frac{1}{\sqrt{1919810}}\text{蛤蟆} + \frac{114514}{\sqrt{1919810}}\text{猫}$$

这就是动物线性空间中的元素[2]。

1. 原则上可以定义复数域上的线性空间，这里先考虑实数域。(事实上复数域从代数角度更为简单，理由是代数基本定理)

2. 当然，我这里实际上没仔细定义这里的加法，你可以把它视为形式上的。在代数学中，这叫free construction，这里的苹果和梨可以称为水果线性空间的生成元.

定义 4. *设U,V是两个线性空间,定义*

$$U+V=\{\alpha u+\beta v|u\in U,v\in V\}$$

如果

$$U\cap V=\{0\}$$

则记

$$U+V=U\oplus V$$

称为直和.(我们这里考虑的也叫外直和，不过不必细究。)

例 5. 考虑

$$\alpha\text{小猪}+\beta\text{苹果}$$

小猪[3]是动物空间中的元素,而苹果是水果空间中的元素,故上式为0当且仅当$\alpha=\beta=0$。所以我们说上面这种加和定义了

$$\text{动物}\oplus\text{水果}$$

这样一个线性空间。

例 6. 考虑由

$$\{1,x,x^2,x^3\}$$

张成的线性空间,其元素形如

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

是所有次数不大于3的多项式构成的的线性空间。

例 7. 子空间。所谓线性空间U的子空间就是U的子集V,V自身在加法和数乘下封闭。举例来说,考虑水果线性空间,其元素形如

$$\alpha\text{苹果}+\beta\text{梨}$$

那么

$$\gamma(\text{梨}+\text{苹果}),\gamma\in\mathbb{R}$$

就构成了一个子空间，请自行验证。

3. 你可以换成你喜欢的任何动物。

子空间的例子非常多,比如欧氏平面上过原点的直线。

3 线性映射

线性空间是线性代数最基本的积木，但只有积木本身未免过于无趣，所以为了我们更好地去玩这些积木，我们需要把它们组织起来。 也就是说，去研究不同线性空间之间的关系。所谓线性映射,就是与线性结构的相容的映射。

定义 8. *线性映射$T: U \to V$称为线性映射,如果*

$$T(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha T(u_1) + \beta T(u_2), \forall u_1, u_2 \tag{1}$$

线性映射也叫线性同态。

例 9. 考虑

$$T = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2$$

是从x的光滑函数到x的光滑函数的映射。我们来验证这是个线性映射,任取y_1, y_2为光滑函数,有

$$T(\alpha y_1 + \beta y_2) = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\alpha y_1 + \beta y_2) + x^2(\alpha y_1 + \beta y_2)\right) = \alpha T(y_1) + \beta T(y_2)$$

定义 10. *定义线性映射$T: U \to V$的kernel为*[4]

$$\ker T = \{T(u) = 0 | u \in U\}$$

其像集（image）为

$$\operatorname{im} T = \{v | v = T(u), \text{对某个} u \in U\}$$

以上两个概念类似于零点和值域。

例 11.

$$T(0) = T(0+0) = 2T(0) \Rightarrow T(0) = 0$$

例 12. 单射与满射。$T: U \to V$为单射就是说

$$T(u) = T(u') \Rightarrow u = u'$$

4. ker有些地方写为null，im有的地方记作range。

满射就是说$\forall v \in V, \exists u \in U$

$$T(u) = v$$

我们可以用新瓶装旧酒,对于线性映射

$$T(u) = T(u') \Rightarrow T(u - u') = 0$$

因此T为单射等价于

$$\ker T = \{0\} \Leftrightarrow \dim \ker T = 0$$

T为满射等价于

$$\operatorname{im} T = V$$

定理 13. *$ker\ T$和$im\ T$分别构成U, V的子空间*

证明. 任取$u_1, u_2 \in \ker T$

$$T(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha T(u_1) + \beta T(u_2)$$

由$\ker T$的定义知右边两项均为0，故$(\alpha u_1 + \beta u_2) \in \ker T$. $\operatorname{im} T$的讨论留作习题[5]。 □

例 14. 考虑线性变换

$$T = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2$$

其kernel为

$$\ker T = \left\{ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y + x^2 y = 0 | y\text{是光滑函数} \right\}$$

也就是说，其kernel就是上述常微分方程的解。

定义 15. *线性同构就是指一一对应的线性变换，如果两个线性空间之间存在线性同构，我们说它们同构，记为*

$$U \cong V$$

定理 16. *同构映射把一组基映成一组基*

证明. 假设$\{u_i\}, i = 1, 2 \ldots \dim U$为$U$的一组基,那么假设

$$\{T(u_i)\}$$

5. 说是习题，也不必提交，你只需要提交到你自己心里:D

这组向量线性相关,则

$$\sum_i \alpha^i T(u_i) = 0$$

其中α^i不全为0,则

$$T\left(\sum_i \alpha^i u_i\right) = 0$$

因为T是一一映射,故

$$\sum_i \alpha^i u_i = 0$$

与线性无关矛盾，故$\{T(u_i)\}$线性无关。因为线性空间中一组线性无关的向量的个数必然不大于其维数，

$$\dim U \leqslant \dim V$$

对T的逆映射T^{-1} [6]有

$$\dim V \leqslant \dim U$$

所以二者的维数必然相等

$$\dim U = \dim V$$

于是T把U的基底映射为一组V的基底。 □

推论 17. *同构的线性空间具有相同的维数。*

例 18. 任意线性映射由它在基底上的作用确定.取$T: U \to V$

$$T(u) = T(\alpha^i u_i) = \alpha^i T(u_i)$$

其中$\{u_i\}, i = 1, 2, ..., \dim U$为$U$的基底。取$\{v_j\}, j = 1, 2..., \dim V$为$V$的基底,那么可以展开

$$T(u_i) = T^j{}_i v_j$$

所以

$$T(u) = \alpha^i T^j{}_i v_j$$

可见，只要决定了$T^j{}_i$，一个线性映射就完全决定了。我们定义$[T]$为第i行，第j列为$T^j{}_i$的矩阵，这就是线性映射的矩阵表示。本质就是找了一组基，写分量。

6. 请自行验证一一对应的线性映射其逆也是线性映射。

例 19. 线性映射的复合对应矩阵的乘法。设$T:U\to V$,$S:V\to W$,则复合映射

$$S\circ T:U\to W$$

很容易验证也是线性映射:任取u_1,u_2

$$S(T(\alpha u_1+\beta u_2))=S(\alpha T(u_1)+\beta T(u_2))=\alpha S(T(u_1))+\beta S(T(u_2))$$

我们取定$\{u_i\},\{v_j\},\{w_k\}$,按上一问,一个线性映射由其在基底上的作用决定,我们写

$$T(u_i)=T^j{}_i v_j$$

$$S(v_j)=S^k{}_j w_k$$

故

$$S(T(u_i))=S^k{}_j T^j{}_i w_k$$

如果用矩阵记号

$$([S]\cdot[T])=[S\circ T]$$

即线性映射的复合是矩阵乘法。

例 20. 希望大家记得,如果对于线性变换T: $V\to V$,换成另一组基底,那么这个表示矩阵进行相似变换。这个事情可以说成是线性映射是(1,1)型张量(请看张量变换律)。当然,我们这里还没定义什么是张量,不过这暂时不重要。

假设

$$T(v_i)=T^j{}_i v_j$$

换一组基底

$$v_i=J^j{}_i v'_j$$

$$T(J^j{}_i v'_j)=T^j{}_i J^k{}_j v'_k\Rightarrow T(v_j)=(J^{-1})^i{}_j T^l{}_i J^k{}_l v'_k$$

因为不同基底下,矩阵元的定义形式是不变的

$$T(v'_j)=T'^i{}_j v'_i$$

对比得

$$[T]'=J^{-1}[T]J$$

例 21. 我们定义线性映射之间的加法和数乘。设$T, S: U \to V$,定义

$$(T+S)(u) := T(u) + S(u), \forall u \in U$$

$$(\alpha T)(u) = \alpha T(u), \forall u \in U$$

在这个定义下, $U \to V$的线性映射全体, 常记作$\mathcal{L}(U, V)$或$\mathrm{Hom}(U, V)$, 也构成一个线性空间。

练习 1. 请大家计算这个线性空间的维数，并试着为之找到一组基底。

4 商空间与线性映射基本定理(同态基本定理)

在以前，我们就知道，非齐次方程的解等于齐次方程的通解加上非齐次方程的特解。 这里的方程当然既指线性方程组，也指线性微分方程（组）。 这似乎看上去是很一般的原理，我们来用线性代数把它说清楚。

例 22. 考虑

$$y'' + y = x$$

其对应齐次方程的通解为

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

这族解当然构成一个线性空间。

原方程特解

$$y_1 = x$$

$$y = y_0 + y_1$$

对于非齐次方程，其解的线性叠加一般不再是解。因此它的解本身不构成线性空间。

这启发我们做如下定义

定义 23. *假设U为线性空间,V为其子空间,那么*

$$u + V := \{u + v | v \in V\}$$

称为u的仿射子集。

注意仿射子集一般不是子空间，正如我们之前说的，非齐次方程的解一般不能直接叠加来获得新解。

例 24. 考虑欧氏空间$\mathbb{R}^3$中一组平行于xOy平面(记为V)的平面族。[7]其中任意一个平面都构成一个欧氏空间的一个仿射子集。设

$$u = (0,0,1)$$

则$u+V$表示过$(0,0,1)$的平面。但我们注意到，

$$u' = (1,1,1), u'' = (1,2,1)$$

对应$u'+V, u''+V$都表示同一平面。

于是我们写

$$u + V = u' + V \tag{2}$$

如果

$$u - u' \in V$$

我们实际上可以定义仿射子集之间的加减了,定义是非常直接的

$$(u+V)+(u'+V)=(u+u')+V$$

$$\alpha(u+V)=\alpha u+V, \alpha\in\mathbb{R}$$

我们来验证这个定义是个良定义,任取$v_1, v_2 \in V$

$$(u+v_1)+(u'+v_2)=(u+u')+(v_1+v_2)$$

$$v_1+v_2\in V$$

故第一个式子是自洽的。,类似地可以证明第二个式子是自洽的。根据这个定义,U关于其子空间V的所有仿射子集构成一个线性空间,称为其商空间,记作U/V.

通过如下构造可以求出U/V的维数:先取V上的一组基$\{v_i\}, i=1,2...,\dim V$,再向其中加入$\{u_j\}, j=\dim V+1, \dim V+2, ..., \dim U$。那么容易看出

$$\{u_j + V\}$$

7. 请自行验证，xOy平面是一个$\mathbb{R}^3$的子空间。

构成商空间U/V的基,所以$\dim(U/V)=\dim U-\dim V$.

注意 25. 我们之前强调了，仿射子集本身不是U的线性子空间。 那这里我们是在说什么呢？我们这里定义的是不同仿射子集之间的加法,而不是一个仿射子集中不同元素的加法。值得提醒的是，商空间并不是原来空间的子空间，虽然它们之间有些关系(见后文)。

我承认商空间的概念有些抽象，不过我们可以理解提出这个概念的动机。 回到我们的平面族的例子，这族平面完全是由一个沿着z轴的向量标记的，也就是说，任何平行于这族平面的分量都不包含我们关心的信息，构造商空间就是丢弃掉那些我们不关心的细节的过程。再比如微分方程的例子里，齐次方程的解显然比非齐次的情况简单太多，所以某种意义上也不是我们求解的重点,因此构造商空间可以把它们的信息抹去。

写了这么多，同学们可能还是认为我只是在玩弄术语罢了。 某种意义上，是的。 但下面的定理告诉了我们这一切都是值得的。

定理 26. *同态基本定理:设$T:U\to V$为任一线性映射,有*

$$U/\mathrm{Ker}\,T\cong\mathrm{im}\,T$$

证明. 我们来具体构造它们之间的同构映射。 注意T是定义在U上的，而$U\ /\ \ker\ \ T$并不是U的子空间,因此T不能直接应用在该空间。但我们可以定义如下映射,任取$u\in U$

$$\tilde{T}(u+\ker T)=T(u)$$

这个定义是自洽的，因为按定义$T(\ker\ \ T)\ \to\ 0$, $\ker\ \ T$不包含像空间的信息。 我们来证明$\tilde{T}$就是$U/\ker\ T\to\mathrm{im}\ T$的线性同构。容易验证$\tilde{T}$确实是个线性映射,留作练习。先证明一个它是单射

$$\tilde{T}(u+\ker T)=\tilde{T}(u'+\ker T)\Rightarrow T(u)=T(u')$$

按定义

$$T(u-u')=0\Rightarrow u-u'\in\ker T$$

于是(见(2)式附近)

$$u+\ker T=u'+\ker T$$

所以这是个单射。为证明这是个满射,任取$v\in\mathrm{im}\,T$,存在$u\in U,T(u)=v$,则

$$\tilde{T}(u+\ker T)=T(u)=v$$

故这是个满射。

□

上面这个定理的意义非常简单，那就是kernel本身并不包含线性映射的像的信息，因为它们都被映射成了0.

例 27. 由高维空间到低维空间的映射不可能是单的，由低维空间到高维空间的映射不可能是满的。

对于前者，$T: U \to V, \dim U > \dim V$，则

$$U / \ker T \cong \operatorname{im} T$$

由于同构的空间维数相同。

$$\dim(U / \ker T) = \dim U - \dim \ker T = \operatorname{im} T$$

注意

$$\operatorname{im} T \leqslant \dim V$$

故

$$\dim \ker T = \dim U - \operatorname{im} T \geqslant \dim U - \dim V > 0$$

故T不是单射。后一论断留作练习。

推论 28. *$T: U \to V$为线性映射，则*[8]

$$\dim U = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T$$

例 29. 考虑$T: V \to V$，这样的线性映射称为线性变换或者线性算子，线性算符。对有限维情况

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T$$

考虑单射

$$\dim V = \dim \operatorname{im} T \Rightarrow \operatorname{im} T = V$$

故它实际上是个满射。反之，假设这是满射，你也能证明它是单射。

总之，对于有限维算子而言，单性等价于满性。

例 30. 假设$q(x)$为任一多项式，证明存在一个多项式$p(x)$，使得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}((x^2 + 5x + 7)p(x)) = q$$

8. 注意，这里的结论仅仅对有限维线性空间适用，对于无穷维来说一般不对，因为其维数涉及无穷，无法直接定义。

注意，本例不能直接套用上面的结论，因为函数空间是无穷维的。 为了应用上述结论，我们注意限制

$$T(p) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}((x^2+5x+7)p(x))$$

在次数不大于$q(x)$的次数的多项式构成的线性空间V上,这个空间是有限维的,且乘以

$$(x^2+5x+7)$$

次数增加2，求两次导，次数降低2，因此我们考虑的映射在这个空间上是封闭的，这个限制合法。

我们注意到,求导两次为0的多项式只能是一次多项式或者常数,所以只有$p(x) = 0$才能让它为0.于是

$$\ker T = \{0\}$$

根据上一个例子，T是满射，结论证毕。

例 31. 证明下列两个命题等价

(a)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n A_{1,k} x_k = 0 \\ \sum_{k=1}^n A_{2,k} x_k = 0 \\ \ldots \\ \sum_{k=1}^n A_{n,k} x_k = 0 \end{cases}$$

有唯一解。

(b)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n A_{1,k} x_k = c_1 \\ \sum_{k=1}^n A_{2,k} x_k = c_2 \\ \ldots \\ \sum_{k=1}^n A_{n,k} x_k = c_n \end{cases}$$

对于任何一组$c_1, \ldots, c_n$都有解。

证明很简单,把两个方程看成线性变换$A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$Ax = 0$$

和

$$Ax = c$$

(a)是说A是单射,而(b)是说A是满射,我们之前已经证明这两个等价了。

例 32. 在所谓线性代数中，大家已经学过，矩阵有个很重要的概念是它的秩，即rank，简写rk.如果把一个矩阵看成一个线性映射,那么有

$$\mathrm{rk}(A) = \dim \operatorname{im} A$$

请同学们结合上例理解这个说法。

5 对偶空间

5.1 对偶基及其变换

对偶空间是线性代数中十分重要的概念，我们之后也会反复用到，所以我在这里做一些补充。

考虑一个线性空间V，我们定义线性函数(有些地方叫线性泛函，我这里不区分)φ: $V \rightarrow \mathbb{R}$,当然可以把$\mathbb{R}$换成$\mathbb{C}$,不过我们不需要。它满足

$$\varphi\left(\sum_i \alpha_i v_i\right) = \sum_i \alpha_i \varphi(v_i)$$

其中$\alpha_i \in \mathbb{R}$, 而$v_i \in V$为任意向量。 乍一想，这样的线性函数构成的空间似乎是很大的，不容易认识。 但实际上并不是，正如我们下面要证明的，它的结构其实并不复杂。 注意线性空间的任何元素可用基底叠加出来，所以一个线性函数完全由它在基底$\{e_i\}$上的作用决定。并且假设φ, ϕ为两个线性函数[9],我们定义

$$(\alpha\varphi + \beta\phi)(v) = \alpha\varphi(v) + \beta\phi(v)$$

利用这个定义可以验证，所有的线性函数实际上构成一个线性空间。 既然如此，我们的问题自然是,这个线性空间是否是有限维的?维数是多少?能不能给出一组基?

我们令$e_i, i = 1, 2..., \dim V$为V的一组基,我们令$\varphi^i, i = 1, 2, ...\dim V$的一组线性函数,满足

$$\varphi^i(e_j) = \delta^i{}_j$$

这个定义显然是自洽的。

我们称其为一个对偶基。假设φ是任意一个线性函数

$$\varphi(v) = \sum_i v^i \varphi(e_i) = \sum_{ij} v^j \delta^i{}_j \varphi(e_i) = \sum_i \varphi(e_i) \varphi^i(e_j) v^j = \sum_i \varphi(e_i) \varphi^i(v)$$

由于v的任意性,可知

$$\varphi = \sum_i \varphi(e_i) \varphi^i$$

9. 线性函数当然是线性映射的特殊情况。

因此对偶基确实是一组基,所有线性函数都可以用它叠加出来。

对于向量空间V，它上的所有线性函数构成的向量空间叫做它的对偶空间，记为V^*。 由于它们基底的个数相同,所以二者维数相等,实际上是同构的线性空间。

那么有同学可能会开始问，为什么不研究V^{**}?我们来看看这个空间如何。 假设$v\in V$,$\varphi\in V^*$,定义$F\colon V\rightarrow V^{**}$

$$F(v)(\varphi):=\varphi(v)$$

这个映射显然是线性的，并且显然是单射(自证)，又$\dim\ V=\dim\ V^*=\dim\ V^{**}$，得到它实际上是双射。 并且这个双射不依赖于任何基底选取。 我们称这样的构造是一个自然同构。

注意 33. 鉴于国内很多学校把线性代数教成了矩阵代数,所以大家一想到线性空间就自动给它配了一组标准正交基，然后把向量脑补成一列数。 这个的直接推论就是，维数是描述线性空间的唯一一个量(因为维数相同的线性空间都是同构的),所以研究线性代数不如研究自然数。 这个想法实在是遗毒不浅，首先是线性空间不同于线性空间with一组基底，做个类比，我是科大的一个学生和我是学生描述的并不完全是一件事，以后等我毕业或者退学了，我就不是科大的学生了，但我可能还是学生，哪怕身份证号相同，上面两个命题也不是一码事。和这里是类似的。

既然V和V^*同构，我们为什么要研究对偶空间呢？这个问题是很有意义的问题。 因为虽然是同构，但它却是基底依赖的，我们没法用一种canonical的办法认定这两个空间是相同的（而要依赖于人为选择的基底），所以它们本质上讲不是同种东西。

实际上,当我们考虑V上的基底变换:

$$e'_j=T(e_j)=T^i{}_j e_i$$

那么对偶基

$$\varphi^i(e_j)=\delta^i{}_j$$

$$\varphi'^i(e'_j)=\delta^i{}_j$$

即

$$\sum_k \varphi'^i(e_k)T^k{}_j=\delta^i{}_j=\varphi^i(e_j)$$

为了让上式成立,我们必须令

$$\varphi^{i\prime}=(T^{-1})^i{}_l\varphi^l$$

容易验证

$$\sum_k \varphi'^i(e_k)T^k{}_j=\sum_{k,l}(T^{-1})^i{}_l\varphi^l(e_k)T^k{}_j=\sum_{k,l}(T^{-1})^i{}_l\delta^l{}_kT^k{}_j=\delta^i{}_j$$

可见，对偶基的变换和基底的变换是互逆的，并不一致。 这正是我们认为它们是不同的东西的一个原因。

记法 34. *在物理学中，我们常常使用指标的记法。这是因为如果我们确认一个等式是不依赖于基底选取的，我们就可以在任何一组基底下写出分量等式，其他坐标下的等式可以通过张量变换律直接得到。并且指标的好处在于，谁和谁缩并是显然的。例如*

$$\varphi = \alpha_i \varphi^i$$

$$v = \beta^j e_j$$

其中φ^i*为*e_j*的对偶基*

$$\varphi(v) = \alpha_i \beta^j \varphi^i(e_j) = \alpha_i \beta^j \delta^i{}_j = \alpha_i \beta^i$$

所以在很多计算中，我们直接简单记

$$\varphi \sim \alpha_i$$

$$v \sim v^i$$

他们的缩并就是

$$\varphi(v) = \alpha_i v^i$$

你也可以直接验证这个和基底选取无关。

5.2 对偶映射

假设$T: U \to V$为线性映射，我们定义其对偶映射$T': V^* \to U^*$如下：

任取$\varphi \in V^*$，定义

$$T'(\varphi) := \varphi \circ T$$

写得更仔细一些，任意$u \in U$，我们有

$$T'(\varphi)(u) = \varphi(T(u)) \in \mathbb{R} \Rightarrow T'(\varphi) \in U^*$$

我们可以验证这个映射是线性的：

任取$\varphi^1, \varphi^2 \in V^*$

$$T'(\alpha\varphi^1 + \beta\varphi^2) = (\alpha\varphi^1 + \beta\varphi^2) \circ T = \alpha\varphi^1 \circ T + \beta\varphi^2 \circ T = \alpha T'(\varphi^1) + \beta T'(\varphi^2)$$

所以线性映射的对偶映射也是线性的。

限于篇幅，我不打算仔细讲对偶映射了，大家可以自己看Axler的书。不过有两个重要结论我觉得应该提一下

定理 35. *(a)一个映射在某组基底下的矩阵表示与该映射在对应对偶基下的表示互为转置。*

(b)一个映射及其对偶映射的像是同构的。

$$\dim \operatorname{im} T = \dim \operatorname{im} T'$$

回忆

$$\dim \operatorname{im} A = \operatorname{rk}(A)$$

所以上式就从线性空间的角度解释了为什么行秩等于列秩.

6 张量积与双线性函数

我们之前研究了线性函数,是$\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$的元素。有时我们需要研究所谓的双线性函数,即[10]

$$f: V \times V \to \mathbb{R}$$

双线性就是说,如下性质

$$f(v_1 + v_1', v_2) = f(v_1, v_2) + f(v_1', v_2)$$

$$f(v_1, v_2 + v_2') = f(v_1, v_2) + f(v_1, v_2')$$

$$f(\alpha v_1, v_2) = \alpha f(v_1, v_2)$$

$$f(v_1, \beta v_2) = \beta f(v_1, v_2)$$

看上去很复杂,但其实实线性空间上的度规(或内积)就是这样的一个双线性函数。

例 36. 双线性函数的矩阵表示。设$f: V \times V \to \mathbb{R}$为双线性函数，取定一组基底$\{e_j\}$, $j = 1, \ldots, n = \dim V$

任取[11]

$$v_1 = \alpha^i e_i \in V$$

$$v_2 = \beta^j e_j \in V$$

$$f(v_1, v_2) = \alpha^i \beta^j f(e_i, e_j)$$

10. 我们常常研究的就是两个线性空间相同的情况，但是定义$U \times V \to \mathbb{R}$并没什么困难的地方。

如果定义

$$f(e_i, e_j) = f_{ij}$$

$$f(v_1, v_2) = \alpha^i \beta^j f_{ij}$$

我们定义矩阵$[f]$为第i行第j列为f_{ij}的矩阵,把v_1, v_2同样在这组基底下表示出来

$$v := \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \ldots \\ \alpha^n \end{pmatrix}$$

$$v' := \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \ldots \\ \beta^n \end{pmatrix}$$

则

$$f(v_1, v_2) = v_1^T [f] v_2$$

请大家自行验证.

例 37. 基底变换。考虑换一组基底

$$e_i = (J)^j{}_i e'_j$$

$$\alpha^i e_i = v_1 = \alpha'^j e'_j = \alpha^i (J)^j{}_i e'_j$$

$$\alpha'^j = \alpha^i J^j{}_i$$

我们知道基底变换不应该改变线性函数的值,因为基底我们人为选定的

$$\alpha^i \beta^j f_{ij} = \alpha'^k \beta'^l f'_{kl} = J^k{}_i J^l{}_j f'_{kl} \alpha^i \beta^j$$

根据α^i, β^j的任意性,可知

$$f_{ij} = J^k{}_i J^l{}_j f'_{kl}$$

$$f'_{kl} = (J^{-1})^i{}_k (J^{-1})^j{}_k f_{ij}$$

写成矩阵就是

$$[f]' = (J^{-1})^T [f] J^{-1}$$

11. 这里的下标1, 2只是用来标记不同向量罢了。

上面的例子解释了在所谓线性代数中，为什么要研究相似变换以及合同变换，为什么同样是换基底，表现出来却不一样，因为相似变换是针对线性变换而言的，而合同变换是对双线性函数来说的。

表面上看上去，双线性函数和线性函数没什么关系。但我们下面的构造却可以表明，$V \times V$上的双线性函数实际上是另一个空间上的线性函数。

假设U, V是两个线性空间,可以相同,也可以不同。我们定义其张量积$U \otimes V$如下

$$U \otimes V = \mathrm{span}\{u \otimes v | u \in U, v \in V\}$$

我们这里也许该仔细解释下这个$\otimes$运算,不过它性质实际上很少,主要是双线性

$$(u_1 + u_2) \otimes v = u_1 \otimes v + u_2 \otimes v$$

$$(\alpha u) \otimes v = \alpha (u \otimes v), \alpha \in \mathbb{R}$$

对v类似,我不再写了。在这个定义下,我们定义$V \otimes V$上的线性函数$\tilde{f}$

$$\tilde{f}(v_1 \otimes v_2) := f(v_1, v_2)$$

请验证这个定义是自洽的,即$\tilde{f}$确实是线性函数。因此我们后面说到(v_1, v_2)的时候常常可以换成$v_1 \otimes v_2$.

例 38. 考虑$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$,记$e_1, e_2$为$\mathbb{R}^2$上的基底(这里不去区分两个$\mathbb{R}^2$了),$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$的基底可以写为

$$e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$$

因此其维数是4.一般的$U \otimes V$的维数为$\dim U \times \dim V$。

例 39. 考虑$\mathbb{R} \otimes V$，请读者证明$\mathbb{R} \otimes V \cong V$.

例 40.

$$u = u^i e_i \in U$$

$$v = v^j e'_j \in V$$

其中e_i为U的基,e'_j为V的基。

$$u \otimes v = u^i v^j e_i \otimes e'_j$$

按我之前所说的,物理学上经常略去基底不写,上式记为

$$u \otimes v \sim u^i v^j$$

例 41. 注意张量积是不可交换的,反映为

$$u \otimes v \sim u^i v^j \neq u^j v^i$$

但仍有

$$u^i v^j = v^j u^i$$

7 内积

内积,或者叫度规,是一个V上的对称,正定的双线性函数。对称的意思是

$$g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$$

正定的意思是

$$g(v, v) \geqslant 0$$

其中等号当且仅当$v = 0$.如果一个线性空间上面定义了内积,那么它就叫内积空间。就像任何双线性函数一样

$$g_{ij} := g(e_i, e_j)$$

设

$$v_1 = \alpha^i e_i \in V$$

$$v_2 = \beta^j e_j \in V$$

$$g(v_1, v_2) = \alpha^i \beta^j g_{ij}$$

朱老师已经提到过,可以用度规来进行指标升降

$$\beta_i := \beta^j g_{ij}$$

则

$$g(v_1, v_2) = \alpha^i \beta_i$$

这样看上去就像一个线性函数作用于一个向量一样。我们直观地看看$g(\cdot, \cdot)$有两个"槽"可以用来放向量,最后吐出一个数。如果我们放一个进去会如何呢?

$$g(\cdot, v)$$

这个是什么呢?如果我们给第一个位置再塞一个向量进去,那么输出就是一个数,所以这变成一个线性函数了!也就是说,度规可以诱导一个由$V \rightarrow V^*$的映射!我们接下来研究这个映射的性质。

定理 42. *里斯表示定理:g诱导的这个映射是个线性同构。换言之,对于任意$\varphi \in V^*$,恰存在一个$v \in V$,使得*

$$\varphi = g(\cdot, v)$$

证明. 如果一个向量v_0满足

$$g(v, v_0) = 0, \forall v \in V$$

则必有$v_0 = 0$,取$v = v_0$结合g的正定性即可证明。因此记

$$\varphi = g^\flat(v) = g(\cdot, v)$$

我们来证明这是个单射。取v_1, v_2

$$\varphi_1 = g^\flat(v_1)$$

$$\varphi_2 = g^\flat(v_2)$$

若

$$0 = g^\flat(v_1 - v_2) \Rightarrow g(v, v_1 - v_2) = 0, \forall v \in V$$

这暗示$v_1 = v_2$,即$g^\flat$是单射,由于$\dim V = \dim V^*$,则$g^\flat$也是满射,即为同构。

□

定义 43. *我们称$V \otimes V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$,其中包括$k$个V,$l$个$V^*$,中的元素为$(k, l)$型张量。*

例 44. 我们定义:

$$g = g_{i\,j} \varphi^i \otimes \varphi^j$$

它可以看成$V \otimes V$上的线性函数,按下式形式作用

$$g(u, v) = g_{i\,j} \varphi^i \otimes \varphi^j(u, v) = (g_{i\,j} \varphi^i \otimes \varphi^j)(u \otimes v) = g_{ij}(\varphi^i(u)) \otimes (\varphi^j(v)) = g_{ij}\, u^i\, v^j$$

注意$\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, 所以我最后略去了张量积符号。 我们由此可以确认, 度规确实是个(0,2)型张量。

例 45. 线性变换可以看成(1,1)型张量,例如取定一组基底$\{e_i\}, \{\varphi^i\}, i = 1, 2, ..., \dim V$

$$I = \varphi^i \otimes e_i = \delta^i{}_j\, \varphi^j \otimes e_i \tag{3}$$

如果你喜欢略去基底,那么记为

$$I \sim \delta^i{}_j$$

我们可以证明这个式子,任取$v \in V$,我们定义它的作用如下

$$(\varphi^i \otimes e_i)(v) = \varphi^i(v) \otimes e_i = v^i e_i = v = Iv$$

一般形式的线性变换可以写为

$$T = T^i{}_j \varphi^j \otimes e_i$$

(3)称为完备性关系。

例 46. 我们已经提到了度规给出了一个$V \to V^*$的同构,我们姑且记为T。那么T^{-1}: $V^* \to V$。在基底下看

$$T(v) = g_{ij} v^i \varphi^j$$

其中φ^j为V^*的基底,逆映射为

$$T^{-1}(\phi) = g^{ij} \phi_i e_j$$

e_j, φ^i互为对偶基

为了让$T \circ T^{-1} = I$,那么

$$\phi = \phi_k \varphi^k = T \circ T^{-1}(\phi) = g^{ij} g_{jk} \phi_i \varphi^k \Rightarrow g^{ij} g_{jk} = \delta^i{}_k$$

即对应的矩阵互为逆矩阵,这其实是显然的.

8 一些解答

在欧氏空间,因为全局的标准,正交的坐标基矢是存在的,所以很多线性代数的基本问题被掩盖起来了。比如在这组基底下,

$$v^i = v_i$$

注意这不是张量等式,仅仅在正交归一基底才成立。所以问题并不显著。但是任何超越正交归一基底的试探都会导致对偶空间的出现。

我们来看一个问题,朱老师写过一个曲线坐标的完备性关系

$$g^{\alpha\beta} e_\alpha^T e_\beta = I$$

当然,他这里忽略了一个张量积符号,我建议大家一般不要忽略,不然很容易导致错误

$$g^{\alpha\beta} e_\alpha^T \otimes e_\beta = I$$

根据我们之前的讨论,实际上

$$g^{\alpha\beta}e_{\alpha}^{T}\sim\varphi^{\beta}$$

转置的原因见之前所说的,对偶向量或者对偶映射在一组(对偶)基下的表示和原来的向量及映射互为转置。

故上式无非就是

$$\varphi^{\beta}\otimes e_{\beta}=I$$

这就是我为什么不建议大家忽略这个张量积符号,实际上很多同学进行如下计算

$$\varphi^{\beta}\otimes e_{\beta}\overset{?}{=\!=}\varphi^{\beta}e_{\beta}=\varphi^{\beta}(e_{\beta})=\dim V$$

这当然和原来不一样，原来的是个线性映射，现在这个却是个普通数。 一个好的预防的措施就是把张量积符号写上。

再做一点翻译的活吧。在old fashioned张量记号中,有如下计算

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{T}$$

其中$\mathbf{v}$为矢量,我们姑且看作$(1,0)$型张量,$\boldsymbol{T}$这里是个(0,2)型张量,上述表达式就是在说

$$v^{i}T_{ij}$$

自由指标有一个，是j，是下标，所以结果是一个$(0,\ 1)$型张量。 在欧氏空间上，不需要区分向量和对偶向量,所以你也可以把它看成一个向量。

参考文献

[1] Sheldon Jay Axler. *Linear Algebra Done Right*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1997.

[2] Greg.W Moore. *Linear Algebra User's Manual*.