

中国科学技术大学
2022—2023学年第一学期期中考试试卷

考试科目：数学分析A1

得分：

学生所在系：

姓名：

学号：

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将姓名、学号等填写清楚。
2. 本考试为闭卷考试，共九道大题，总分100分，考试时间120分钟。
3. 解答请写在试题后的空白处，若写不下，可写在试题的背面，写在草稿纸上无效。

2022年11月13日

一、(10分)

得分	
----	--

设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a \sin x + b \cos x) = c$ ，求常数 a, b, c 的值。



二、(10分)

得分	
----	--

设数列 $\{a_n\}$ 对一切正整数 m, n , 满足 $0 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n$.

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf \left\{ \frac{a_n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.



三、(10分)

得分	
----	--

证明函数 $\sqrt{x} \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 一致连续.



四、(10分)

得分	
----	--

设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 并且 $\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且有限,

证明: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界.



五、(10分)

得分	
----	--

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义, 并且在有理点上取无理数值, 在无理点上取有理数值. 证明: $f(x)$ 不是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数.



六、(10分)

得分	
----	--

设函数 f 在 $(-\infty, x_0]$ 上有二阶导数, 令

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_0, \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & x > x_0. \end{cases}$$

问常数 a, b, c 为何值时, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶导函数?



七、(10分)

得分

设函数 $y = \cos(\beta \arcsin x)$, 其中 β 为非零常数, 求高阶导数 $y^{(n)}(0)$ (其中 n 是任意正整数).



八、(15分)

得分	
----	--

设 $0 \leq a < \frac{b}{2}$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $f(a) = a, f(b) = b$.

(1) 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = b - \xi$.

(2) 证明: 存在 $\alpha, \beta \in (a, b)$, 且 $\alpha \neq \beta$ 使得 $f'(\alpha)f'(\beta) = 1$.



九、(15分)

得分	
----	--

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 上可导, 在 $x = 0$ 处有任意阶导数,
 $f(0) = f^{(n)}(0) = 0$ (其中 n 是任意正整数), 且存在常数 $C > 0$, 使得

$$|xf'(x)| \leq C|f(x)|, \forall x \in [0, 1].$$

(1) 证明: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ (对任意给定的自然数 n).

(2) 证明: 在 $[0, 1]$ 上, $f(x) \equiv 0$.

