第7章综合习题题解

1. 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ 的和.

证明 考虑部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}\left(1+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}\right]\\&=1-\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2}\\&=-\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2},\end{aligned}$$

上式中右边第一项是数列 $a_n=\frac{1}{n}$ 前 $n+1$ 项的算术平均, 因此极限与 a_n 的极限相同（见第一章例1.2.19）,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)=0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}\frac{1}{n^2}.$$

为了求出上式右边数项级数的和, 借用函数 $f(x)=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上的Taylor展开. 因

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},$$

所以积分得

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1},\ -1\leqslant x\leqslant 1.$$

在其中令 $x=\sin u$, 得到

$$u=\sin u+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\sin^{2n+1}u,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

对 u 从0 到 $\frac{\pi}{2}$ 逐项积分得

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}u\,\mathrm{d}u\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\\ &= 1+\sum_{n=1}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}\frac{1}{(2n-1)^2}.\end{aligned}$$

这里用到了积分（第5章例5.1.10）

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}u\,\mathrm{d}u=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

再由

$$\sum_{n=1}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}\frac{1}{n^2}$$

得

$$\sum_{n=1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

最终得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

注: 关于

$$\sum_{n=1}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\quad \sum_{n=1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

也可以通过对函数的 Fourier展开方法得到, 详细情形将在第12章讨论.

2. 证明 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}=1.$

证明 考虑部分和

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2k+3}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n+2}(-1)^k\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\frac{1}{k}\\ &= \frac{(-1)^n}{n+2}+1,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

3. 设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

证明
因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\geqslant 0$, 所以级数是正项级数. 一方面:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}&=\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{a_n}\,\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{a_1}^{a_{m+1}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln a_{m+1}-\ln a_1.\end{aligned}$$

另一方面:

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}=\frac{a_{m+1}}{a_1}-1$$

由此推出对任意的 m 有

$$\frac{a_{m+1}}{a_1}-1\geqslant\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\geqslant\ln a_{m+1}-\ln a_1,$$

所以 $\{a_n\}$ 有界当且仅当级数部分和有界, 当且仅当级数收敛.

4. 设 $\alpha>0$, $\{a_n\}$ 是递增正数列. 求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$ 收敛.

证明 显然, 级数是正项级数.且

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}=\frac{1}{a_n^{\alpha-1}}\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n}\right)=\frac{1}{a_n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

若 $\alpha\geqslant 1$, 则 $\frac{1}{a_n^{\alpha-1}}$ 单调减有界: $\frac{1}{a_n^{\alpha-1}}\leqslant\frac{1}{a_1^{\alpha-1}}$. 级数的部分和满足

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}a_k^{\alpha}}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)\\&\leqslant\frac{1}{a_1^{\alpha-1}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{1}{a_1^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\leqslant\frac{1}{a_1^{\alpha}}\end{aligned}$$

因此有界, 所以级数收敛.

若 $0<\alpha<1$, 当 $\dfrac{1}{a_{k+1}}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{a_k}$ 时, 有 $\dfrac{1}{x}\geqslant a_k$, 推得 $\dfrac{1}{x^{1-\alpha}}\geqslant a_k^{1-\alpha}=\dfrac{1}{a_k^{\alpha-1}}$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}a_k^{\alpha}}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{1}{a_{k+1}}}^{\frac{1}{a_k}}\frac{1}{a_k^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{1}{a_{k+1}}}^{\frac{1}{a_k}}\frac{1}{x^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{a_1^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha}\frac{1}{a_1^{\alpha}}\end{aligned}$$

因此部分和也有界, 所以收敛.

5. 设 $\Phi(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上正的严格增函数（这里与书上相比, 条件改为$[0,\infty)$）, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 是三个非负数列满足

$$a_{n+1}\leqslant a_n-b_n\Phi(a_n)+c_na_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty.$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明 若有某项 $a_{n_0}=0$, 则推出 $a_{n_0+1}\leqslant -b_{n_0}\Phi(0)\leqslant 0,\Longrightarrow a_{n_0+1}=0$, 以此类推得到$a_{n_0}$ 后面各项均为零, 结论显然成立. 因此不妨设 $a_n>0$, 并记$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=c$.

因为 $a_{n+1}\leqslant a_n+c_na_n$, 所以

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1+c_n,$$

$$\Longrightarrow \ln a_{n+1}-\ln a_n\leqslant\ln(1+c_n)\leqslant c_n.$$

从 1 到 $n-1$ 求和

$$\ln a_n-\ln a_1\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}c_k\leqslant c,$$

所以 $\ln a_n$ 有上界, 即 a_n 有界: $0<a_n\leqslant a$. 推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nc_n$ 收敛. 设该级数的部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_kc_k\to S$$

则$S_n\leqslant S$, 由 $a_{n+1}\leqslant a_n+c_na_n$ 得

$$0-S\leqslant a_{n+1}-S_{n+1}\leqslant a_n-S_n,$$

所以 $a_n - S_n$ 单调减有下界, 因此收敛, 由此推出 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

若 $a > 0$, 则存在 $\delta > 0$ 使得 $a_n > \delta > 0$, 因此 $\Phi(a_n) \geqslant \Phi(\delta)$, 由

$$a_{n+1} - a_n + \Phi(\delta) b_n \leqslant c_n a_n,$$

求和得

$$a_{n+1} - a_1 + \Phi(\delta) \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant S_n \leqslant S$$

$$\Longrightarrow \Phi(\delta) \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant S_n \leqslant S + a_1,$$

推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 这与题意相矛盾. 所以 $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

点评: 本题证明中, 实际上用到了习题7.1 中第6题的结果, 即: 对两个非负数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1} < a_n + b_n$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 证明方法与上述证明类似.

6. 设 $\{a_n\}$ 是正数列使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛. 求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}, \tag{1}$$

而且上式右端的系数 2 是最佳的.

证明 由 Cauchy-Schwartz 不等式, 有

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \cdot \frac{k}{\sqrt{a_k}} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k} \right).$$

因此, 有

$$\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant \frac{4}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

两边求和, 得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} &\leqslant 4\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\\ &=4\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\ &=2\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=k}^{m}\frac{2n}{n^2(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\ &<2\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=k}^{m}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\ &=2\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k}^{m}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\ &=2\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(m+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\ &<2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}.\end{aligned}$$

于是题目结论成立. 下面证明有段系数 2 是最佳的. 取 $a_n=\dfrac{1}{n^p}, p>1$, 则 a_n 符合题意.因此

$$\begin{aligned}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\frac{n}{1+2^p+\cdots+n^p}&=\frac{1}{n^p}\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}}\\ &\geqslant\frac{1}{n^p}\frac{1}{\int_0^{(n+1)/n}x^p\,\mathrm{d}x}=(p+1)\frac{n}{(n+1)^{p+1}}\\ &\geqslant(p+1)\left(\frac{1}{(n+1)^p}-\frac{1}{(n+1)^{p+1}}\right)\\ &\geqslant(p+1)\left(\frac{1}{(n+1)^p}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k}&\geqslant(p+1)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)^p}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\ &\geqslant(p+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}-\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

当 $p=1$ 时, 右边发散到 $+\infty$ 因此矛盾, 所以只有当 $p>1$ 右边收敛, 且系数 $p+1>2$, 所以系数是最佳的.

7. 设 $\{a_n\}$ 是一个严格单调递增实数列,且对任意正整数 n 有 $a_n \leqslant n^2 \ln n$. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

证明 若 $\{a_n\}$ 有界, 则收敛, 所以 $a_{n+1}-a_n \to 0$, 显然有$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

若 $\{a_n\}$ 无界, 则 $a_n \to +\infty$, 不妨设从某项开始 $a_n > 0$, 记 $b_n = a_{n+1}-a_n > 0$, 类似上题推导, 有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{b_1+\cdots+b_k} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k},$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_{k+1}-a_1} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{n+1}-a_n},$$

因为 $a_n \leqslant n^2 \ln n$, 推出 $a_1 = 0$, 所以

$$a_{k+1}-a_1 \leqslant (k+1)^2 \ln(k+1).$$

推出

$$\frac{k}{a_{k+1}-a_1} \geqslant \frac{k}{(k+1)^2 \ln(k+1)} \geqslant \frac{2}{(k+1)\ln(k+1)},$$

因为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\ln(n+1)}$$

发散. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

8. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}-a_n|$ 收敛, 就称数列 $\{a_n\}$ 是有有界变差的.
(1) 证明具有有界变差的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛.
(2) 构造一个发散的无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 使得其通项 $\{a_n\}$ 是一个具有有界变差的数列.

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 因级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}-a_n|$ 收敛, 所以存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_{n+p}-a_n| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n+p-1} (a_{k+1}-a_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1}-a_k| < \varepsilon$$

对任何正整数 p 成立, 所以 $\{a_n\}$ 收敛.

取 $a_n = \dfrac{1}{n}$, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散, 但是

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}-a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

收敛.

9. 设函数列 $\{f_n(x)\}$, $n=1,2,\cdots$ 在区间 $[0,1]$ 上由等式

$$f_0(x)=1,\quad f_n(x)=\sqrt{xf_{n-1}(x)}$$

定义, 证明当 $n\to\infty$ 时, 函数列在 $[0,1]$ 上一致收敛到一个连续函数.

证明 用归纳法, 可递推出:

$$f_n(x)=x^{1-1/2^n},\ x\in[0,1]$$

因此

$$f_n(x)-x=x^{1-1/2^n}-x\geqslant 0,\ x\in[0,1]$$

那么 $f_n(0)-0=f_n(1)-1=0$, 求导

$$f_n'(x)-1=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x^{-1/2^n}-1$$

解得最大值点为

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}\in(0,1).$$

所以

$$0\leqslant f_n(x)-x\leqslant f_n(a_n)-a_n\leqslant a_n^{-1/2^n}-1=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{-1}-1\leqslant 2\frac{1}{2^n}$$

对任意 $x\in[0,1]$ 成立, 所以 $f_n(x)$ 在$[0,1]$ 上一致收敛于 x.

10. 递归定义连续可微函数序列 $f_1,f_2,\cdots:[0,1)\to\mathbb{R}$, 如下: $f_1=1$, 在 $(0,1)$ 上有

$$f_{n+1}'=f_nf_{n+1},$$

且 $f_{n+1}(0)=1$. 求证: 对每一个 $x\in(0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在, 并求出其极限函数.

证明 **第一步**: 先证明$\{f_n(x)\}$ 收敛. 由条件得

$$f_{n+1}(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t},\ x\in[0,1),$$

其中 $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\mathrm{e}^x\geqslant 1=f_1(x)$. 假设 $f_{n+1}(x)\geqslant f_n(x)$, 那么

$$f_{n+2}(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t}\geqslant \mathrm{e}^{\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t}=f_{n+1}(x),$$

所以函数列 $\{f_n(x)\}$ 关于 n 单调递增.

又因为在$x\in[0,1)$ 上, $f_1(x)\leqslant\dfrac{1}{1-x}$, 假如 $f_n(x)\leqslant\dfrac{1}{1-x}$, $x\in[0,1)$, 那么

$$f_{n+1}=\mathrm{e}^{\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t}\leqslant\mathrm{e}^{\int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t}=\frac{1}{1-x}.$$

所以$\{f_n(x)\}$ 有上界. 于是对每一个 $x\in[0,1)$, $f_n(x)$ 收敛.设

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ x\in[0,1).$$

第二步: 证明$\{f_n(t)\}$ 在$[0,x]$ $(0<x<1)$ 上一致收敛. 设

$$u_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x),\ u_0(x)=f_1(x),n=0,1,2,\cdots,$$

则$\{u_n(x)\}$ 是连续可微正项函数列, 且级数收敛:

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k(x)=\lim_{n\to\infty}f_{n+1}(x)=f(x).$$

注意到

$$u_n'(x)=f_{n+1}'(x)-f_n'(x)=f_n(x)(f_{n+1}(x)-f_{n-1}(x))\geqslant 0,$$

所以对每个 n, $u_n(x)$ 关于 x 单调增.

因此在区间 $[0,x]$ $(0<x<1)$ 上, 有

$$0\leqslant u_n(t)\leqslant u_n(x),\ t\in[0,x].$$

因此级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(t)$ 在 $t\in[0,x]$ 上一致收敛, 也就是函数列 $\{f_n(t)\}$ 在$[0,x]$ 上一致收敛. 由此推出 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上可积且

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^x\sum_{k=0}^{n}u_k(t)\,\mathrm{d}t$$

即

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\lim_{n\to\infty}f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

在等式

$$f_{n+1}(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t},\ x\in[0,1),$$

两边取极限得

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t},$$

因此 $f(x)$ 可微, 且

$$f'(x)=f^2(x),$$

解方程并注意到 $f(0)=1$, 有

$$f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

11. 设 $f_0(x)$ 是区间 $[0,a]$ 上连续函数, 证明按照下列公式

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(u)\,\mathrm{d}u$$

定义的函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,a]$ 上一致收敛于 0.

证明 因 $f_0(x)$ 在$[0,a]$ 上连续, 所以存在 M 使得 $|f_0(x)|\leqslant M,\ x\in$. 因此, 用归纳法可推出

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{M}{n!}x^n\leqslant\frac{M}{n!}a^n\ (0\leqslant x\leqslant a),$$

所以$\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,a]$ 上一致收敛于 0.