量子力学 B
2021 秋季学期
作业 6 *(截止期: 11 月 10 号周三课上)*

1. 利用坐标(动量)表象的正交完备关系（只考虑一维系统）
a. 计算

$$\langle p'|f(\hat{x})|p''\rangle$$

b. 证明

$$\langle p'|\hat{x}|\phi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\phi\rangle$$

c. 利用上式关系，证明

$$\langle\psi|\hat{x}|\phi\rangle = \int dp\psi^*(p)i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\phi(p)$$

where $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$, $\phi(p) = \langle p|\phi\rangle$.

2. 假设一维体系的 Hamiltonian 为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

写出动量表象下动量波函数的 Schrödinger 方程(只考虑一维的情况)。分别写出一维谐振子在坐标和动量表象下的 Schrödinger 方程。

3. 假设体系 Hamiltonian 在基矢{|1>, |2>}定义的表象下之矩阵表示为$\begin{pmatrix} E/2 & E/2 \\ E/2 & E/2 \end{pmatrix}$。如体系在 t=0 时的初态为$|\psi(0)\rangle = |1\rangle$,试求在任意时间 t 体系所处的状态。假设|1>和|2>为力学量算符$\hat{A}$ 的本征态，其相应本征值为 A_1 和 A_2 ，请写出任意时间 t 对体系进行力学量$\hat{A}$的测量时测量值为 A_1 的几率。

4. 自由粒子哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

试在 Heisenberg 绘景下求

$$[\hat{x}(t), \hat{x}(0)]$$

1. 利用坐标(动量)表象的正交完备关系（只考虑一维系统）

a. 计算

$$\langle p'|f(\hat{x})|p''\rangle$$

b. 证明

$$\langle p'|\hat{x}|\phi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\phi\rangle$$

c. 利用上式关系，证明

$$\langle\psi|\hat{x}|\phi\rangle = \int dp\psi^*(p)i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\phi(p)$$

where $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$, $\phi(p) = \langle p|\phi\rangle$.

$$\langle r|A(\hat{r},\hat{p})|r'\rangle = A(r,-i\hbar\nabla_r)\delta(r-r')$$

$$\langle p|A(\hat{r},\hat{p})|p'\rangle = A(i\hbar\nabla_p, r)\delta(p-p')$$

解:

a. 由于 $\langle p|x|p'\rangle = i\hbar\partial_p\delta(p-p')$

所以 $\langle p'|f(\hat{x})|p''\rangle = f(i\hbar\partial_p)\delta(p-p')$

b. $\langle p'|\hat{x}|\phi\rangle$

$= \int dp''\langle p'|\hat{x}|p''\rangle\langle p''|\phi\rangle$

$= \int dp''\, i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p'')\langle p''|\phi\rangle$

$= i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\phi\rangle$

c. $\langle\psi|\hat{x}|\phi\rangle$

$= \int dp\,dp'\langle\psi|p\rangle\langle p|\hat{x}|p'\rangle\langle p'|\phi\rangle$

$= \int dp\,dp'\,\psi^*(p)\,i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\delta(p-p')\,\phi(p')$

$= \int dp\,\psi^*(p)\,i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\phi(p)$

2. 假设一维体系的 Hamiltonian 为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

写出动量表象下动量波函数的 Schrödinger 方程(只考虑一维的情况)。分别写出一维谐振子在坐标和动量表象下的 Schrödinger 方程。

解:

① $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$

$\Rightarrow \int dp\, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle p|\psi\rangle|p\rangle = \int dp'\langle p'|\hat{H}|\psi\rangle|p'\rangle$

$\Rightarrow \int dp\, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(p,t)|p\rangle = \int dp'\langle p'|\hat{H}|\psi\rangle|p'\rangle$

等式右边中 $\langle p'|\hat{H}|\psi\rangle|p'\rangle$

$= \int dp''\langle p'|\hat{H}|p''\rangle\langle p''|\psi\rangle|p'\rangle$

$= \int dp''\langle p'|\hat{p}^2/2m + V(\hat{x})|p''\rangle\psi(p'',t)|p'\rangle$

$= \int dp''\left(p''^2/2m + V(i\hbar\frac{\partial}{\partial p'})\right)\delta(p'-p'')\psi(p'',t)|p'\rangle$

$= \left(p'^2/2m + V(i\hbar\partial_{p'})\right)\psi(p',t)|p'\rangle$

即 $\int dp\, i\hbar\partial_t\psi(p,t)|p\rangle = \int dp'\left(p'^2/2m + V(i\hbar\partial_{p'})\right)\psi(p',t)|p'\rangle$

两边同时用 $\langle p''|$ 作用

$\Rightarrow \quad i\hbar\partial_t\psi(p'',t) = \left(p''^2/2m + V(i\hbar\partial_{p''})\right)\psi(p'',t)$

即动量表象下 Schrödinger 方程化为

$i\hbar\partial_t\psi(p,t) = \left[p^2/2m + V(i\hbar\partial_p)\right]\psi(p,t)$

② 一维谐振子 $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$

1) 坐标表象:

$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = \left(\frac{1}{2}m\omega^2x^2 - \frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,t)$

其中 $\psi(x,t) = \langle x|\psi\rangle$

2) 动量表象:

$i\hbar\partial_t\varphi(p,t) = \left(p^2/2m - \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\varphi(p,t)$

其中 $\varphi(p,t) = \langle p|\psi\rangle$

3. 假设体系 Hamiltonian 在基矢$\{|1\rangle, |2\rangle\}$定义的表象下之矩阵表示为$\begin{pmatrix} E/2 & E/2 \\ E/2 & E/2 \end{pmatrix}$。如体系在 t=0 时的初态为$|\psi(0)\rangle = |1\rangle$,试求在任意时间 t 体系所处的状态。假设$|1\rangle$和$|2\rangle$为力学量算符$\hat{A}$ 的本征态，其相应本征值为 A_1 和 A_2 ，请写出任意时间 t 对体系进行力学量$\hat{A}$的测量时测量值为 A_1 的几率。

解：令 $\det\begin{pmatrix} \frac{E}{2}-\lambda & \frac{E}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{E}{2}-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = E \quad \lambda_2 = 0.$

$\lambda = E, 0$ 时对应的归一化本征向量分别为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$

记为 $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$, 则 $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$ $|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$

则 $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + |\beta\rangle)$ $\quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle - |\beta\rangle)$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} |\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\beta\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \\ -1 + e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + e^{-\frac{iEt}{\hbar}})|1\rangle + \frac{1}{2}(-1 + e^{-\frac{iEt}{\hbar}})|2\rangle$$

测到 A_1 的概率为

$$\frac{1}{4}(1 + e^{-\frac{iEt}{\hbar}})(1 + e^{\frac{iEt}{\hbar}}) = \frac{1}{4}\left[2 + 2\cos\left(\frac{Et}{\hbar}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{Et}{\hbar}\right)\right]$$

4. 自由粒子哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

试在 Heisenberg 绘景下求

$$[\hat{x}(t), \hat{x}(0)]$$

解：$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{x} = [\hat{x}, \hat{H}] = \frac{i\hbar}{m}\hat{p} \Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{x} = \frac{\hat{p}}{m}$

$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{p} = [\hat{p}, \hat{H}] = 0$

则 $\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \frac{\hat{p}}{m}t$

考察 $[\hat{x}(t), \hat{x}(0)]$

$$= [\hat{x}(0)+\frac{\hat{p}}{m}t, \hat{x}(0)]$$

$$= [\frac{\hat{p}}{m}t, \hat{x}(0)]$$

$$= \frac{t}{m}[\hat{p}(0), \hat{x}(0)] = -\frac{i\hbar}{m}t$$

hw6 解答

Ziguang Lin

2021 年 11 月 10 日

1 第一题

1.1 题目

用坐标 (动量) 表象的正交完备关系 (只考虑一维系统)

a. 计算

$$\langle p'|f(\hat{x})|p''\rangle$$

b. 证明

$$\langle p'|\hat{x}|\phi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\phi\rangle$$

c. 利用上式关系，证明

$$\langle\psi|\hat{x}|\phi\rangle = \int dp\psi^*(p)i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\phi(p)$$

其中 $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle, \phi(p) = \langle p|\phi\rangle$

1.2 解答

a. 第一问，我们知道

$$\langle p'|\hat{x}|p''\rangle = i\hbar\partial_{p'}\delta(p'-p'')$$

所以

$$\langle p'|\hat{x^n}|p''\rangle = (i\hbar\partial_{p'})^n\delta(p'-p'')$$

对 f(X) 进行泰勒展开，可以得到

$$\langle p'|f(x)|p''\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(i\hbar\partial_{p'})^n\delta(p'-p'')$$

所以

$$\langle p'|f(x)|p''\rangle = f(i\hbar\partial_{p'})\delta(p'-p'')$$

b. 第二问

$$\begin{aligned}\langle p'|x|\phi\rangle &= \int\int dpdp''\langle p'|p\rangle\langle p|x|p''\rangle\langle p''|\phi\rangle \\ &= \int\int dpdp''\delta(p'-p)i\hbar\partial_{p'}\delta(p'-p'')\langle p''|\phi\rangle \\ &= i\hbar\partial_{p'}\langle p'|\phi\rangle\end{aligned}$$

c. 第三问

$$\begin{aligned}\langle \psi|x|\phi\rangle &= \int\int dpdp''\langle \psi|p\rangle\langle p|x|p''\rangle\langle p''|\phi\rangle \\ &= \int\int dpdp''\langle \psi|p\rangle i\hbar\partial_{p}\delta(p-p'')\langle p''|\phi\rangle \\ &= \int\int dp\langle \psi|p\rangle i\hbar\partial_{p}\langle p|\phi\rangle\end{aligned}$$

2 第二题

2.1 题目

假设一维体系的 Hamiltonian 为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

写出动量表象下动量波函数的 Schrödinger 方程 (只考虑一维的情况)。分别写出一维谐振子在坐标和动量表象下的 Schrödinger 方程。

2.2 解答

薛定谔方程：

$$H|\phi\rangle = E|\phi\rangle \longrightarrow \langle p|H|\phi\rangle = E\langle p|\phi\rangle$$

在 H 和 $|\phi\rangle$ 之间插入动量的完备性关系，所以有

$$\begin{aligned}(\frac{p^2}{2m} + V(i\hbar\partial_p))\phi(p) = E\phi(p) \\ where \quad \phi(p) = \langle p|\phi\rangle\end{aligned}$$

一维谐振子：

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \\
&= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (i\hbar\partial_p)^2
\end{aligned}
$$

在动量表象下，带入上面式子就是对应的薛定谔方程

3 第三题

3.1 题目

设体系 Hamiltonian 在基矢$|1\rangle$,$|2\rangle$ 定义的表象下之矩阵表示为$\begin{pmatrix} E/2 & E/2 \\ E/2 & E/2 \end{pmatrix}$。如果体系在 t=0 的初态为 $|\Psi(0)\rangle = |1\rangle$，试求在任意时间 t 体系所处的状态。假设 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 为力学量算符 $\hat{A}$ 的本征态，其相应本征值为 A_1, A_2，请写出任意时间 t 对体系进行力学量 $\hat{A}$ 的测量时测量值为 A_1 的几率。

3.2 解答

这题的思路是，把待求态在哈密顿量的本征基下分解，然后算各分量的演化。

本征值 $\lambda_1 = E, \lambda_2 = 0$
本征态 $|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle), |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$
设 $\phi(t) = c_1(t)|\phi_1\rangle + c_2(t)|\phi_2\rangle$
初态在 $c_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, c_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= \sum_n c_n(0)e^{-iE_n t/\hbar}|\phi_n\rangle \\
&= \frac{1}{2}[(e^{-iEt/h} + 1)|1\rangle + (e^{-iEt/h} - 1)|2\rangle]
\end{aligned}
$$

在 t 时刻测到 A_1 的几率为：

$$
P_1 = \frac{1}{4}|1 + e^{-iEt/h}|^2 = \frac{1}{2}(1 + cos(\frac{E}{\hbar}t))
$$

4 第四题

4.1 题目

自由粒子哈密顿量：

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

试求 Heisenberg 绘景下求

$$[x(t), x(0)]$$

4.2 解答

由 Heisenberg 方程：

$$i\hbar\frac{dp(t)}{dt} = [p, H] = 0 \rightarrow p(t) = p(0)$$

$$i\hbar\frac{dx(t)}{dt} = [x, H] = i\hbar\frac{p(t)}{m} = i\hbar\frac{p(0)}{m}$$

即

$$x(t) = \frac{p(0)}{m}t + x(0)$$

$$[x(t), x(0)] = -\frac{i\hbar t}{m}$$