笛卡尔坐标系下的 Landau 能级

陈阳

2024 年 2 月 14 日

在 quantum09 课件中，自由电子在均匀外磁场中运动时其对应的哈密顿量是

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2) + \frac{e^2B^2}{8Mc^2}(x^2+y^2) + \frac{eB}{2Mc}(x\hat{P}_y - y\hat{P}_x) + \frac{1}{2M}\hat{P}_z^2 \tag{1}$$

将电子的运动分解为两部分，z 轴方向和 $x-y$ 平面。在处理 $x-y$ 平面运动时我们建立了平面极坐标系，得到相应本征值的 Landau 能级

$$E_{n_\rho,m} = (2n_\rho + m + |m| + 1)\hbar\omega_L \tag{2}$$

而 z 方向电子不受磁场作用，其运动是自由运动，相应的能级为

$$E_z = \frac{p_z^2}{2M} \tag{3}$$

因此系统总能级为

$$E = (2n_\rho + m + |m| + 1)\hbar\omega_L + \frac{p_z^2}{2M}, \quad n_\rho = 0,1,2,3,\ldots, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{4}$$

其中，$\omega_L = \dfrac{eB}{2Mc}$

我们同样可以采用直角坐标系来处理这一本征值问题，先将哈密顿量分为三个部分如下

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2M}(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2) + \frac{e^2B^2}{8Mc^2}(x^2+y^2) + \frac{eB}{2Mc}(x\hat{P}_y - y\hat{P}_x) + \frac{1}{2M}\hat{P}_z^2 \\ &= \hat{H}_0 + \hat{H}' + \hat{H}_1\end{aligned} \tag{5}$$

其中，三个部分哈密顿量分别为

$$\hat{H}' = \frac{eB}{2Mc}(x\hat{P}_y - y\hat{P}_x), \;\; \hat{H}_1 = \frac{1}{2M}\hat{P}_z^2, \;\; \hat{H}_0 = \frac{1}{2M}(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2) + \frac{e^2B^2}{8Mc^2}(x^2+y^2) \tag{6}$$

z 方向电子运动的哈密顿量 $\hat{H}_1$ 的本征值与 (3) 相同，因此只需关注 $\hat{H}'$ 与 $\hat{H}_0$ 对于 $\hat{H}_0$，可以看作是 x 和 y 方向的两个无耦合的一维简谐振子的哈密顿量之和，即

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \hat{H}_{x0} + \hat{H}_{y0} \\ &= \frac{1}{2M}\hat{P}_x^2 + \frac{1}{2}M\omega_L^2x^2 + \frac{1}{2M}\hat{P}_y^2 + \frac{1}{2}M\omega_L^2y^2\end{aligned} \tag{7}$$

因此，$\hat{H}_0$ 对应的能量本征值为：

$$\begin{aligned} E_0 &= (n_x + \frac{1}{2})\hbar\omega_L + (n_y + \frac{1}{2})\hbar\omega_L \\ &= (n_x + n_y + 1)\hbar\omega_L, \quad (n_x, n_y = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{8}$$

这里我们要注意的是，在选取了笛卡尔直角坐标系后

$$\hat{L}_z \neq -i\hbar\partial_\varphi \tag{9}$$

对于 $\hat{H}'$，我们参考杨老师在 quantum08 课件中 27-30 页的内容
引入 4 个新的线性算符：

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - i\hbar\partial_y), \;\; \hat{p}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(y + i\hbar\partial_x) \\ \hat{q}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + i\hbar\partial_y), \;\; \hat{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - i\hbar\partial_x) \end{aligned} \tag{10}$$

存在对易关系：

$$[\partial_{x_a}, x_b] = \delta_{ab} \tag{11}$$

位置算符和偏导数可用这 4 个新的线性算符表达为：

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_1 + \hat{q}_2), \;\; y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \\ \partial_x = \frac{i}{\sqrt{2}\hbar}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2), \;\; \partial_y = \frac{i}{\sqrt{2}\hbar}(\hat{q}_1 - \hat{q}_2) \end{aligned} \tag{12}$$

$\hat{H}'$ 在位置表象下的等效算符为：

$$\hat{H}' = -i\hbar\omega_L(x\partial_y - y\partial_x) \tag{13}$$

用 (9) 式定义的线性算符可将 $\hat{H}'$ 重新表达为：

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \frac{1}{2}\omega_L\left[(\hat{q}_1 + \hat{q}_2)(\hat{q}_1 - \hat{q}_2) + (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)\right] \\ &= \frac{1}{2}\omega_L\left[(\hat{q}_1^2 + \hat{p}_1^2) - (\hat{q}_2^2 + \hat{p}_2^2)\right] \\ &= \hat{H}_1' - \hat{H}_2' \end{aligned} \tag{14}$$

可以诠释为两个相互独立的简谐振子的哈密顿算符，所涉及的谐振子质量均为 $\dfrac{1}{\omega_L}$，角频率均为 ω_L 而一维简谐振子 $\hat{H}_a = \dfrac{1}{2}\omega_L(\hat{q}_a^2 + \hat{p}_a^2)$ 的能量本征值为

$$E_{n_a} = (n_a + \frac{1}{2})\hbar\omega_L, \;\; a = 1, 2 \quad n_a = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

因此，$\hat{H}'$ 的能量本征值为：

$$E' = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_L - \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_L = (n_1 - n_2)\,\hbar\omega_L \tag{16}$$

分析知，量子数取值间存在关系 $n_x = n_1, n_y = n_2$
结合以上所有结果，我们可以写出系统在直角坐标系下的总能量表达式是

$$E_{n_x,n_y} = (2n_x + 1)\,\hbar\omega_L, \quad n_x = 0, 1, 2, \ldots \tag{17}$$

与 quantum09 的结果 (2) 比较

$$E_{n_\rho,m} = (2n_\rho + m + |m| + 1)\hbar\omega_L, \quad n_\rho = 0, 1, 2, \ldots \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{18}$$

所得到的分立能级是相同的。