2023春计算方法习题

张澳

习题 (1.1). 设 F 是区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的光滑函数, 迭代 $x_{n+1} = F(x_n)$ 收敛到不动点 s, 证明对于 $q \in \mathbb{Z}$, 有 $F^{(k)}(s) = 0,\ 1 \le k < q$ 但 $F^{(q)}(s) \neq 0$, 当且仅当该迭代公式具有收敛阶 q.

证明. 记 $e_n = x_n - s$, 我们有

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - s = F(x_n) - F(s) \\ &= F(s + e_n) - F(s) \\ &= [F(s) + e_n F'(s) + \frac{1}{2} e_n^2 F''(s) + \cdots + \frac{1}{q!} e_n^q F^{(q)}(\xi_n)] - F(s) \\ &= \frac{1}{q!} e_n^q F^{(q)}(\xi_n) \end{aligned} \tag{1}$$

这里 ξ_n 是介于 x_n 和 s 之间的实数. 因为迭代收敛到 s, 所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^q} = \frac{1}{q!} F^{(q)}(s)$$

反之, 若上式的极限存在且不为 0, 由于 $\frac{1}{e_n} \to \infty$, 所以只能有 $F^{(k)}(s) = 0,\ 1 \le k < q$ 但 $F^{(q)}(s) \neq 0$. □

习题 (1.2). 构造迭代公式 $x_{n+1} = F(x_n)$, 其中 $F(x) = x - a(x)f(x) + b(x)f^2(x)$, 使得若该迭代公式收敛到 $f \in C^2(I)$ 的单根 s, 则该迭代具有三阶收敛性.

解. 由于 F 具有至少三阶收敛, 所以 $F^{(k)}(s) = 0,\ k = 0, 1, 2$.

$$F'(x) = 1 - a'(x)f(x) - a(x)f'(x) + b'(x)f^2(x) + 2b(x)f(x)f'(x)$$

由 $F'(s) = 0$ 及 $f(s) = 0,\ f'(s) \neq 0$ 得

$$0 = 1 - a(s)f'(s)$$

于是可以取 $a(x) = \frac{1}{f'(x)}$. 又由于

$$F''(x) = -a''(x)f(x) - a'(x)f'(x) + b''(x)f^2(x) + 4b'(x)f(x)f'(x) + 2b(x)((f'(x))^2 + f(x)f'(x))$$

由 $F''(s)=0$ 及 $f(s)=0,\ f'(s)\neq 0$ 得

$$\frac{f''(s)}{(f'(s))^2}f'(s)+2b(s)(f'(s))^2=0$$

于是可以取

$$b(x)=-\frac{f''(x)}{2(f'(x))^3}$$

此时迭代公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\frac{f''(x_n)f^2(x_n)}{2(f'(x_n))^3}$$

□

习题 (1.3)**.** *考察迭代公式*

$$x_{k+1}=f(x_k,y_k),\ y_{k+1}=g(x_k,y_k)$$

这里 $f,g\in C^1$. 假设该公式收敛到唯一的不动点 (x_∞,y_∞), 而且在该不动点处的雅可比矩阵无穷范数小于1. 现考察新的迭代公式

$$x_{k+1}=f(x_k,y_k),\ y_{k+1}=g(x_{k+1},y_k)$$

证明在初始条件足够靠近 (x_∞,y_∞) 的情况下, 新的迭代公式也收敛到 (x_∞,y_∞).

证明. 显然新迭代公式和原迭代公式具有相同的不动点 (x_∞,y_∞), 我们计算新迭代公式的雅可比矩阵:

$$J=\begin{pmatrix}\partial_1 f(x,y) & \partial_2 f(x,y)\\ \partial_1 g(f(x,y),y)\partial_1 f(x,y) & \partial_1 g(f(x,y),y)\partial_2 f(x,y)+\partial_2 g(f(x,y),y)\end{pmatrix}\tag{2}$$

在 (x_∞,y_∞) 处, 由于原迭代公式在不动点处雅可比矩阵无穷范数小于1, 于是

$$|\partial_1 f(x_\infty,y_\infty)|+|\partial_2 f(x_\infty,y_\infty)|<1$$

J 的第二行

$$\begin{aligned}&|\partial_1 g(f(x,y),y)\partial_1 f(x,y)|+|\partial_1 g(f(x,y),y)\partial_2 f(x,y)+\partial_2 g(f(x,y),y)|\\ \le&|\partial_1 g(f(x,y),y)|(|\partial_1 f(x,y)|+|\partial_2 f(x,y)|)+|\partial_2 g(f(x,y),y)|\end{aligned}\tag{3}$$

在不动点处, 有

$$\begin{aligned}&|\partial_1 g(f(x_\infty,y_\infty),y_\infty)\partial_1 f(x_\infty,y_\infty)|+|\partial_1 g(f(x_\infty,y_\infty),y_\infty)\partial_2 f(x_\infty,y_\infty)+\partial_2 g(f(x_\infty,y_\infty),y_\infty)|\\ \le&|\partial_1 g(f(x_\infty,y_\infty),y_\infty)|\left(|\partial_1 f(x_\infty,y_\infty)|+|\partial_2 f(x_\infty,y_\infty)|\right)+|\partial_2 g(f(x_\infty,y_\infty),y_\infty)|\\ \le&|\partial_1 f(x_\infty,y_\infty)|+|\partial_2 f(x_\infty,y_\infty)|<1\end{aligned}\tag{4}$$

于是新迭代公式在不动点处的雅可比矩阵无穷范数小于1, 所以在以它的附近为初始条件的迭代中也收敛. □

习题 (2.1)**.** (1) 设矩阵 A 是 n 阶复方阵, 称该矩阵的第 i 个 Gershgorin 圆盘为

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|\} \quad 1 \le i \le n$$

证明矩阵 A 的特征值包含在 n 个 Gershgorin 圆盘的并集中. 由此证明对角占优矩阵可逆.
(2) 设矩阵 B 是 n 阶复方阵, 其特征值为 $\lambda_i \quad 1 \le i \le n$, $f \in \mathbb{C}[x]$ 是复数上的多项式, 则 $f(B)$ 的特征值为 $f(\lambda_i) \quad 1 \le i \le n$.

证明. (1) 任取 λ 为 A 的特征值, 选取特征向量 x, $Ax = \lambda x$ 且 $\|x\|_\infty = 1$. 设 i 使得 $|x_i| = 1$, 由于 $(Ax)_i = \lambda x_i$, 我们有

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

于是

$$(\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} a_{ij} x_j$$

两边取绝对值并运用三角不等式, 得

$$|\lambda - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}||x_j| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|$$

于是 $\lambda \in D_i$. 若 A 是对角占优矩阵, 则它的 Gershgorin 圆盘不包含 0, 于是特征值不含有 0.
(2) 将 B 化为 Jordan 标准型 $S^{-1}BS = J$, 这里 J 是 Jordan 矩阵, 它是上三角矩阵, 对角元为 $\lambda_i \quad 1 \le i \le n$. 于是

$$S^{-1} f(B) S = f(S^{-1}BS) = f(J)$$

$f(J)$ 也是上三角矩阵, 对角元为 $f(\lambda_i) \quad 1 \le i \le n$. 于是 $f(B)$ 与上三角矩阵 $f(J)$ 相似, 其特征值为 $f(J)$ 的对角元. □

习题 (2.2)**.** 设 A 是 m 阶实矩阵, 其元素满足

$$a_{ii} \ge \sum_{j\ne i} |a_{ij}| + 2, \quad a_{ii} \le 7$$

(1) 证明 $2 \le \|A\|_\infty \le 12$. (2) 若 A 是对称矩阵, 证明 $\frac{1}{12} \le \|A^{-1}\|_2 \le \frac{1}{2}$.

证明. (1) 我们有

$$2 \le \sum_{j} |a_{ij}| = a_{ii} + \sum_{j\ne i} |a_{ij}| \le a_{ii} + a_{ii} - 2 \le 12$$

(2) 由 Gershgorin 圆盘定理, 对于任意 A 的特征值 λ, 我们有

$$a_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \leq \lambda \leq a_{ii} + \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

于是有 $2 \leq \lambda \leq 12$. 对于一个对称矩阵, 它的奇异值就是它的特征值的绝对值. A^{-1} 是对称矩阵, 而 $\|A^{-1}\|_2$ 是 A^{-1} 的最大奇异值, 于是 $\frac{1}{12} \leq \|A^{-1}\|_2 \leq \frac{1}{2}$. □

习题 (2.3)**.** *给定线性方程组 $Ax = b$, 这里 A 为 n 阶可逆方阵. 设 $0 < \omega \leq 1$. 考察迭代格式*

$$x_{k+1} = x_k - \omega D^{-1}(Ax_k - b)$$

证明: 若Jacobi迭代收敛, 则上述迭代格式收敛.

证明. 设 λ 为 $D^{-1}A$ 的特征值, 则 $1-\lambda$ 为 $I - D^{-1}A$ 的特征值. 由于Jacobi迭代收敛, 所以$|1-\lambda| < 1$. $I - \omega D^{-1}A$ 的特征值为 $1 - \omega\lambda$.

$$|1-\omega\lambda| = |1-\omega+\omega-\omega\lambda| \leq |1-\omega| + \omega|1-\lambda| < 1-\omega+\omega = 1$$

于是该迭代收敛. □

习题 (2.4)**.** (1) *证明: 若矩阵 A 是行对角占优矩阵, 则* Gauss 消元过程中该矩阵仍保持对角占优性.
(2) 证明: 对角占优矩阵的 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代均收敛.

证明. (1) 我们只需证明高斯消元的第一步之后, A 仍然是行对角占优的, 因为后续操作在子矩阵上进行, 与第一步类似. 我们需要证明对于 $i = 1, 2, \cdots, n$ 有

$$|a_{ii}^{(2)}| > \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}^{(2)}|$$

由高斯消元的定义, 这等价于

$$|a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i}| > \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} \left(|a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}| \right)$$

事实上我们可以证明更强的不等式

$$|a_{ii}| - |\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i}| > \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} \left(|a_{ij}| + |\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}| \right)$$

上式等价于

$$|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| > \sum_{j=2}^{n} |\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}|$$

由对角占优性, 我们只需证明

$$|a_{i1}| > \sum_{j=2}^{n} |\frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}|$$

由第一行的对角占优性, 得

$$|a_{11}| > \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$$

于是原等式成立.

(2) 书上定理 5.2 与定理 5.3. □

习题 (3.1). 设 $f \in C^2[a,b]$ 且 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. 若 S 是 f 在节点 t_i 上的自然三次样条插值, 则

$$\int_a^b [S''(x)]^2 \mathrm{d}x \leq \int_a^b [f''(x)]^2 \mathrm{d}x$$

证明. 记 $g \equiv f - S$. 对于 $0 \leq i \leq n$, $g(t_i) = 0$, 且

$$\int_a^b [f''(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_a^b [S''(x)]^2 \mathrm{d}x + \int_a^b [g''(x)]^2 \mathrm{d}x + 2\int_a^b S''(x) g''(x) \mathrm{d}x$$

事实上, 我们可以证明 $\int_a^b S''(x)g''(x)\mathrm{d}x \geq 0$. 由于 $S''(t_0) = S''(t_n) = 0$, 且 S''' 在每个区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上是常数 c_i, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_a^b S''(x)g''(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S''(x)g''(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left((S''g')(t_i) - (S''g')(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} S'''(x)g'(x)\mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S'''(x)g'(x)\mathrm{d}x \qquad (5) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} c_i g'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=1}^{n} c_i [g(t_i) - g(t_{i-1})] = 0
\end{aligned}$$

□

习题 (3.2). 证明如下公式

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)^{-1}$$

证明. 考察在节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上插值的 n 次多项式, 用 Lagrange 插值和 Newton 插值得到的结果相同, 于是

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

比较两端最高次项系数可得公式. □

习题 (3.3). 证明Hermite插值误差估计定理: 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是区间 $[a, b]$ 中不同的节点, 并且 $f \in C^{2n+2}[a, b]$, 若次数至多为 $2n+1$ 次的多项式 p 使得

$$p(x_i) = f(x_i) \quad p'(x_i) = f'(x_i) \quad (0 \leq i \leq n)$$

则对 $[a, b]$ 中的每一点 x, 都有 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$$

证明. 若 x 是节点, 显然成立. 现假设 x 不是节点, 定义

$$w(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)^2 \quad \phi = f - p - \lambda w$$

其中选取 λ 满足 $\phi(x) = 0$. 注意到 ϕ 在 $[a, b]$ 上至少有 $n+2$ 个零点 $x, x_0, \cdots, x_n$.根据 Rolle 定理, ϕ' 在 $[a, b]$ 上至少有 $n+1$ 个零点, 它们不同于前面已列出的点. 注意到 ϕ' 在每个节点上都是 0, 于是 ϕ'' 在 $[a, b]$ 上至少有 $2n+2$ 个零点, 重复使用 Rolle 定理, 可得 $\phi^{(2n+2)}$ 在 (a, b) 内有一个零点 ξ, 从而

$$0 = \phi^{(2n+2)}(\xi) = f^{(2n+2)}(\xi) - p^{(2n+2)}(\xi) - \lambda w^{(2n+2)}(\xi)$$

由于 p 是至多 $2n+1$ 阶多项式, $p^{(2n+2)}(\xi) = 0$. 又有 $w^{(2n+2)}(\xi) = \frac{1}{(2n+2)!}$ 所以 $\lambda = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$ 由 $0 = \phi(x) = f(x) - p(x) - \lambda w(x)$ 整理得到原式. □

习题 (4.1). 给定数值积分公式

$$\int_c^d f(t) \mathrm{d}t \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(t_i)$$

它具有 m 阶代数精度. 求出区间 $[a, b]$ 上的数值积分公式, 使得该公式仍具有 m 阶代数精度.

解. 区间 $[c, d]$ 到区间 $[a, b]$ 的仿射变换为

$$\lambda(t) = \frac{b-a}{d-c} t + \frac{ad-bc}{d-c}$$

对积分 $\int_c^d f(t)\mathrm{d}t$ 作变量替换 $x=\lambda(t)$, 有

$$\mathrm{d}x=\lambda'(t)\mathrm{d}t=\frac{b-a}{d-c}\mathrm{d}t$$

于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{d-c}\int_c^d f(\lambda(t))\mathrm{d}t\approx\frac{b-a}{d-c}\sum_{i=0}^{n}A_i f(\lambda(t_i))$$

由于 λ 是线性的, 所以 $f(t)$ 和 $f(\lambda(t))$ 的次数相同. 所以对于次数小于等于 m 的多项式, 该公式也是精确成立的. □

习题 (4.2)**.** 考察 Gauss 型积分公式

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=0}^{n-1}A_i f(x_i)$$

这里 w 是正的权函数, $f\in C^{2n}[a,b]$, x_i 是 n 次 $w-$正交多项式的零点. 记

$$E=\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=0}^{n-1}A_i f(x_i)$$

证明如下的误差估计:

$$E=\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b q^2(x)w(x)\mathrm{d}x$$

这里 $a<\xi<b,\quad q(x)=\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$

证明. 由 Hermite 插值, 存在一个次数最多为 $2n-1$ 的多项式 p, 使得

$$p(x_i)=f(x_i)\quad p'(x_i)=f'(x_i),\quad 0\le i\le n-1$$

由习题 (3.3), 该插值误差为

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(2n)}(\zeta(x))q^2(x)}{(2n)!}$$

并且由此看出 $f^{(2n)}(\zeta(x))$ 是连续函数. 由此可得

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x-\int_a^b p(x)w(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(2n)!}\int_a^b f^{(2n)}(\zeta(x))q^2(x)w(x)\mathrm{d}x$$

由于 p 的次数最多是 $2n-1$, 于是

$$\int_a^b p(x)w(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}A_i p(x_i)=\sum_{i=0}^{n-1}A_i f(x_i)$$

由又积分中值定理得

$$\int_a^b f^{(2n)}(\zeta(x))q^2(x)w(x)\mathrm{d}x=f^{(2n)}(\xi)\int_a^b q^2(x)w(x)\mathrm{d}x$$

整理即得. □