

2022 秋-计算方法-第七次上机作业说明文档

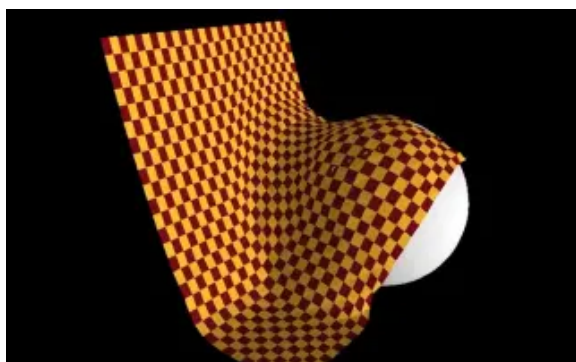
1 应用问题

1.1 背景

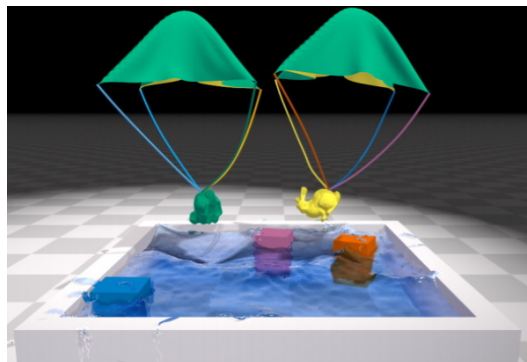
在计算机图形学中，物理模拟是一项重要的任务，其中最基本的就是三维空间中对物体运动速度、轨迹的物理模拟。在物理模拟中，数值积分在扮演着重要的角色。

比如布料模拟中，将布料剖分为三角形网格（或四边形网格），并用弹簧-质点模型构造动力学系统：质点即三角形的顶点，弹簧即三角形的边。质点在外力（如，重力）和内力（弹簧力）的作用下根据牛顿第二定律运动，以此构造出微分方程，并用数值积分求解出质点在不同时刻的位置等物理量。

又比如，在模拟单个对象运动时，如射出的弓箭、子弹，使用降落伞下降的飞行员，使用滑翔伞的冒险家等，需要考虑对象所受到的外力，并以此计算加速度，然后使用数值积分方法计算出速度和位移。



(a) 布料模拟



(b) 运动模拟

图 1: 数值积分在物理模拟中的应用

1.2 问题

我们考虑模拟一个位于二维平面上的质点运动的问题。质点初始时 ($t = 0$) 位于原点，速度为 0。质点受到来自水平方向 (x 方向) 和垂直方向 (y 方向) 的两个独立的力，力会随时间变化，记为 $F_x(t)$, $F_y(t)$ 。

因此，在质点质量固定的情况下，它在 x 和 y 方向上也分别有独立的两个加速度 $a_x(t)$, $a_y(t)$ 。我们的目的是，计算质点在一段时间 $(0, t_e]$ 中的不同时刻 $t \in (0, t_e]$ 时所处的位置 $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ 。

我们可以很容易地得到速度和位移的表达式（由于加速度是独立的，以下我们仅考虑一个分量）：

$$\begin{aligned}
 v_x(t) &= \int_0^t a_x(s) ds \\
 x(t) &= \int_0^t v_x(s) ds \\
 &= \int_0^t \int_0^s a_x(r) dr ds
 \end{aligned}$$

对其中的每个积分式使用数值积分方法，即可求出相应的数值解，最终得到我们想要的结果。

2 实验要求

给定两个方向的加速度如下：

$$\begin{aligned}
 a_x(t) &= \frac{\sin(t)}{\sqrt{t} + 1} \\
 a_y(t) &= \frac{\ln(t + 1)}{t + 1}
 \end{aligned}$$

要求使用 Romberg 积分作为数值积分方法，计算出质点在时刻 $t \in \{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 10\}$ 的位移 $(x(t), y(t))$ 。其中，Romberg 的初始区间数取 $n = 1$ ，精度控制值取 $e = 10^{-6}$ ，最大迭代次数取 $M = 8$ 。程序实现完毕后，应撰写实验报告。实验报告中应包含如下内容：

1. 标题、学号、姓名。
2. 算法描述。Romberg 积分的流程，如何使用 Romberg 积分求解速度、位移。
3. 实验结果。输出质点的轨迹 $(x(t), y(t)), t \in \{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 10\}$ ，并在二维平面中画出该轨迹，附在报告中。
4. 算法比较。请比较取不同 M 时，Romberg 积分达到要求精度的比例（达到误差要求的次数/调用总次数），分析该比例随 M 的变化。取 $M = 4, 8, 12, 16, 20$ 。
5. 请简要地以文字方式说明实验结果和分析，并思考不同的 M 会影响哪些方面，如何选取一个合适的 M 。

3 提交要求

3.1 提交方式

请提交源代码和实验报告。新建目录，并以“HW7-学号-姓名”方式命名，该目录下应包含如下内容：

- src\ （文件夹，存放你的源代码）
- report.pdf （你的实验报告）

将该文件夹压缩（压缩包名为“A/B/C组-HW7-学号-姓名.zip”），发送到课程邮箱 computation_22_1@163.com，邮件标题以同样方式命名。

请严格按照命名方式要求提交，不要交错邮箱，否则可能漏记成绩。

3.2 截止时间

在12月17日23:59分前提交，截止日期一周以后不再接受。若有特殊情况请向助教说明。