Page 6: 定理 0.1

定理 1. 若 $R_1(X)$, $R_2(X)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上两种不同的范数定义，则必存在 $0 < m < M < \infty$, 使 $\forall X \in \mathbb{R}^n$, 有

$$mR_2(X) \leq R_1(X) \leq MR_2(X).$$

证明. 我们只需证 $R_2(X) = ||X||_2$ 的情形，即只需证任意 $\mathbb{R}^n$ 上的范数均与 $\mathbb{R}^n$ 上的欧式范数等价。

引理 1. 若 $R(X)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数，则 $R(X)$ 关于 X 与 $|| \bullet ||_2$ 是一致连续的。

引理 1 的证明：设 $||X-Y||_2 < \epsilon$, 注意到 X 与 Y 在 $|| \bullet ||_2$ 下可被标准正交基线性表示，则由范数定义（三角不等式）

$$\begin{aligned}
|R(X) - R(Y)| \leq R(X-Y) &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| R(e_i) \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} R(e_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq ||X-Y||_2 (n * (max_{1 \leq i \leq n} |R(e_i)|)^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= ||X-Y||_2 max_{1 \leq i \leq n} |R(e_i)| \sqrt{n}.
\end{aligned}$$

因此引理得证。回到原定理的证明。令 $S = \{X | ||X||_2 = 1\}$，S 为关于欧式范数的有界闭集，因此 R_1 在 S 上有最大、最小值。存在常数 m, M，使得 $\forall X \in \mathbb{R}^n$,

$$m \leq R_1(\frac{X}{||X||_2}) \leq M, \ m||X||_2 \leq R_1(X) \leq M||X||_2.$$

因此任一 $\mathbb{R}^n$ 上的范数均与欧式范数等价。 □

Page 7: 定义 0.7

定理 2. 向量序列 $X^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$ 收敛的充分必要条件是 $\forall i$, $\lim_{k \to \infty} x_i^{(k)}$ 存在。

证明. 若 $X^{(m)}=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\dots,x_n^{(m)})$ 收敛,设 $\lim_{m\to\infty}X^{(m)}=X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, 由范数等价性，不妨设 $X^{(m)}$ 在欧式范数下收敛，则 $\forall i$，

$$|x_i^{(m)}-x_i|\le(\sum_{j=1}^n|x_j^{(m)}-x_j|^2)^{\frac{1}{2}}=||X^{(m)}-X||_2\to 0,$$

因此 $\forall i$, $\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}$ 存在。

若 $\forall i$, $\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}$ 存在，设 $\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i$，$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$，则

$$||X^{(m)}-X||_2=(\sum_{i=1}^n|x_i^{(m)}-x_i|^2)^{\frac{1}{2}}\to 0,$$

因此 $X^{(m)}=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\dots,x_n^{(m)})$ 收敛。 □

Page 12-13:(0.9) 式，(0.10) 式，我们只需证 (0.10) 式，也即定理 0.3

注：(0.10) 式有误，应改为如下：

定理 3. 设 $A\in\mathbb{R}^{n*n}$, $b\in\mathbb{R}^n$, $Ax=b$, A 非奇异，δA 和 δb 是 A 和 b 的扰动，

$$||A^{-1}||||\delta A||<1,$$

则

$$\frac{||\delta x||}{||x||}\le\frac{Cond(A)}{1-Cond(A)\frac{||\delta A||}{||A||}}\left(\frac{||\delta A||}{||A||}+\frac{||\delta b||}{||b||}\right).$$

证明.

引理 2. 设 $A\in\mathbb{R}^{n*n}$, 且 $||A||<1$, 则 $I-A$ 非奇异，

$$(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k,\quad ||(I-A)^{-1}||\le\frac{1}{1-||A||}.$$

引理 2 的证明：若 $I-A$ 奇异，则它有特征值 0，设对应特征值 0 的一个特征向量为 x，则

$$(I-A)x=0,\quad Ax=x,$$

即 A 有特征值 1, 与 $||A|| < 1$ 矛盾。

注意到，

$$\begin{aligned}(\sum_{k=0}^{\infty} A^k)(I-A) = \sum_{k=0}^{\infty}(A^k - A^{k+1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} \\ &= (A^0 + \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1}) - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} \\ &= I + \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} = I,\end{aligned}$$

同样

$$(I-A)(\sum_{k=0}^{\infty} A^k) = I,$$

因此 $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$。由于 $||A|| < 1$，有

$$||(I-A)^{-1}|| \le \sum_{k=0}^{\infty} ||A^k|| \le \sum_{k=0}^{\infty} ||A||^k = \frac{1}{1-||A||}.$$

引理 2 得证。

回到原定理的证明，我们有

$$A\delta x + \delta A x + \delta A \delta x = \delta b,$$

$$\delta x = (A+\delta A)^{-1}(-\delta A x + \delta b) = A^{-1}(I + A^{-1}\delta A)^{-1}(-\delta A x + \delta b),$$

$$\begin{aligned}||\delta x|| &\le ||-\delta A x + \delta b||\ ||A^{-1}||\ ||(I + A^{-1}\delta A)^{-1}|| \\ (\text{引理 } 2) &\le ||-\delta A x + \delta b||\ ||A^{-1}||\ \frac{1}{1-||A^{-1}\delta A||} \\ &\le (||\delta A x|| + ||\delta b||)\ ||A^{-1}||\ \frac{1}{1-||A^{-1}\delta A||} \\ &= ||\delta A x||\ ||A^{-1}||\ \frac{1}{1-||A^{-1}\delta A||} + \\ &\quad ||\delta b||\ ||A^{-1}||\ \frac{1}{1-||A^{-1}\delta A||},\end{aligned}$$

$$||\delta Ax||\ ||A^{-1}|| \le ||x||\ ||\delta A||\ ||A^{-1}|| = ||x||\frac{||\delta A||}{||A||}||A||\ ||A^{-1}||$$
$$= ||x||\frac{||\delta A||}{||A||}Cond(A),$$

$$\frac{1}{1-||A^{-1}\delta A||} \le \frac{1}{1-||A^{-1}||\ ||\delta A||} = \frac{1}{1-||A||\ ||A^{-1}||\frac{||\delta A||}{||A||}}$$
$$= \frac{1}{1-Cond(A)\frac{||\delta A||}{||A||}},$$

因此

$$||\delta Ax||\ ||A^{-1}||\ \frac{1}{1-||A^{-1}\delta A||} \le ||x||\frac{||\delta A||}{||A||}\frac{Cond(A)}{1-Cond(A)\frac{||\delta A||}{||A||}},$$

由于 $||Ax|| = ||b||$，

$$||\delta b||\ ||A^{-1}|| = \frac{||\delta b||}{||b||}||Ax||\ ||A^{-1}|| \le \frac{||\delta b||}{||b||}||A||\ ||x||\ ||A^{-1}||$$
$$= \frac{||\delta b||}{||b||}||x||Cond(A),$$

因此

$$||\delta b||\ ||A^{-1}||\ \frac{1}{1-||A^{-1}\delta A||} \le \frac{||\delta b||}{||b||}||x||\frac{Cond(A)}{1-Cond(A)\frac{||\delta A||}{||A||}},$$

整理即证。 □

Page 11: 定理 0.2 为证明此定理，需要一些引理：

引理 3. 若 A 是 n 阶方阵，特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n*n}$ 使得

$$P^{-1}AP = T,$$

其中 T 为上三角矩阵，

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

证明. 这是线性代数当中的结论，证明略。 □

引理 4. 对任意 $\epsilon > 0$，存在一个矩阵相容范数 $||\bullet||$，使得 $\forall A \in \mathbb{R}^{n*n}$ 有 $||A|| < \rho(A) + \epsilon$，且 $||I|| = 1$。

[注]：此为 ppt ch5 中第 32 页的定理。

证明. 由引理 3，$A = P^{-1}\Lambda P$，Λ 为上三角阵，对角线为 A 的特征值。令 $D_t = diag(t, t^2, t^3, \dots, t^n)$，则

$$D_t \Lambda D_t^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t^{-1}t_{12} & t^{-2}t_{13} & \dots & t^{-n+1}t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t^{-1}t_{23} & \dots & t^{-n+2}t_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & t^{-n+3}t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

令 $t > 0$ 充分大，若我们取列和范数 $||\bullet||_1$，有 $||D_t \Lambda D_t^{-1}||_1 < \rho(D_t \Lambda D_t^{-1}) + \epsilon$，取 $||\bullet||$ 为

$$||A|| = ||D_t P A P^{-1} D_t^{-1}||_1$$

即可，并且 $||I|| = 1$。 □

引理 5. $\mathbb{R}^{n*n}$ 上的矩阵范数等价。

证明. 与定理 1 类似，视为 $n * n$ 维向量范数。 □

现在证明定理 0.2：

定理 4. $\lim_{k\to\infty} A^k = O$ 的充分必要条件是 $\rho(A) < 1$.

证明. 若 $\lim_{k\to\infty} A^k = O$，设 λ 为 A 的一个特征值，对应的一个特征向量为 $x \neq 0$，则 $A^k x = \lambda^k x \to 0$，因此 $\lambda^k \to 0$，$\lambda < 1$，从而 $\rho(A) < 1$.
若 $\rho(A) < 1$，则取 $\epsilon < 1 - \rho(A)$，由引理 4 存在矩阵范数 $||\bullet||$ 使得 $||A|| < \rho(A) + \epsilon < 1$. 因此 $||A^k|| \leq ||A||^k \to 0$，因此 A^k 在 $||\bullet||$ 下收敛于 O. 由引理 5，A^k 在 $||\bullet||_1$ 下收敛于 O，因此 $A^k \to O$. □

[注]：Page 12 定义 0.13 下，"当 A 为正交阵时，$Cond(A) = 1$" 有误，反例可取 $||\bullet||_F$。
ppt ch5 page33 推论：

定理 5. 若存在相容的矩阵范数使得 $||A|| < 1$，则 $\lim_{k\to\infty} A^k = O$.

证明.（与定理 4 $\rho(A) < 1$ 时的证明相同。）
$||A^k|| \leq ||A||^k \to 0$，因此 A^k 在 $||\bullet||$ 下收敛于 O. 由引理 5，A^k 在 $||\bullet||_1$ 下收敛于 O，因此 $A^k \to O$. □