第二章复习提纲及例题

概念不清，任何技巧都失去了根基

一、定义：

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, $x_0\in I$, 记 $y_0=f(x_0)$.

$f(x)$ 在一点 x_0 连续可从三个方面理解：

(1) $y=f(x)$ 在 x_0 有有限极限, 且极限值等于函数在这点的函数值：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

(2) 当自变量 $x\to x_0$ 时,因变量 $y-y_0=f(x)-f(x_0)$是无穷小.

以上刻画都是依靠自变量和因变量的距离.

(3) 对 $y_0=f(x_0)$ 的任意一个邻域 $(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon)$, 存在 x_0 的一个邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 使得

$$f:\ (x_0-\delta,\ x_0+\delta)\longrightarrow(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon)$$

$$\text{或}\quad f((x_0-\delta,\ x_0+\delta))\subset(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon).$$

这里的观点是今后从拓扑的角度对连续性的理解.

二、性质：

1、**左右连续的概念以及左右连续等价于连续**.

2、**三类间断点（可去、跳跃以及第二类间断点）**.

3、**连续函数的四则运算以及复合函数的连续性**. 特别是复合函数的连续性

$$\lim_{y\to y_0} f(y)=f(y_0),\lim_{x\to x_0}\phi(x)=\phi(x_0)\Longrightarrow\lim_{x\to x_0} f(\phi(x))=f(\phi(x_0))$$

只要 $y_0=\phi(x_0)$. 因此有时候也表示为

$$\lim_{x\to x_0} f(\phi(x))=f\left(\lim_{x\to x_0}\phi(x)\right)=f(\phi(x_0))$$

例如: 因为 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 连续, 若 $x_n\to x_0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{x_n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=\mathrm{e}^{x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0}\sin(\mathrm{e}^x)=\sin\left(\lim_{x\to x_0}\mathrm{e}^x\right)$$

4、**连续函数反函数的存在性以及连续性**. 一般函数只要自变量和因变量一一对应,就有反函数.但连续函数存在反函数充分必要条件是严格单调.

5、**所有初等函数在其定义域中连续**.

例 1 设 $f(x)$ 连续, 若 $f(x_0)>0$, 则在x_0 的邻域内恒大于零. 即存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时, 有 $f(x)>0$（一点大于零, 周边大于零）.

证明 上述结果是函数极限保序性在连续函数上的推广. 因

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)>0,$$

取 $\varepsilon=\dfrac{f(x_0)}{2}>0$, 存在$\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$0<\frac{f(x_0)}{2}=f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon,$$

例 2 对$[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$, 设 $E=\{x\mid x\in[a,b],\ f(x)=0\}$（$f(x)$ 零点的集合）, 记 $\alpha=\inf E$, 则 $f(\alpha)=0$, 上确界也是如此.

证明 因为 $E\subset[a,b]$, 所以 $\alpha\in[a,b]$.

若 $f(\alpha)\neq0$, 不妨设 $f(\alpha)>0$, 根据例 1, 存在 $\delta>0$ 使得 $f(x)>0$ $x\in(\alpha-\delta,\alpha+\delta)\subset[a,b]$, 因此 $\inf E\geq\alpha+\delta$, 矛盾.

三、闭区间上连续函数（这部分内容环环相扣）.

1、**闭区间上连续函数的介值性（含零点定理）**.

2、**闭区间上连续函数的有界性**.

3、**闭区间上连续函数在区间内一定能够达到最大、最小值**.

4、**闭区间上连续函数的值域是一个闭区间**.

关键：灵活运用.特别是上述性质对闭区间中任意两点 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ 也成立.

四、一致连续：

1、**把握连续与一致连续的区别**.

函数$f(x)$**在定义域**I**中连续**是逐点定义的. 即

针对$x_0\in I$：对任意的 $\varepsilon>0$, 一定存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 这里的 δ 因 x_0 的不同而不同.

函数$f(x)$**在定义域**I**中一致连续**是指对任意的 $\varepsilon>0$, 不管 x_0 是I 中的哪一点, 一定存在统一的 $\delta>0$, 只要 $|x-x_0|<\delta$, 就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

通俗地讲, 就是对 $\varepsilon>0$, 存在统一的尺子$\delta>0$, 只要 I 中两点x,x_0 满足 $|x-x_0|<\delta$, 就能保证 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 因此书上给出一个等价的定义, 用$x',x''$ 代替 x,x_0, 只要x',x'' 的差小于δ,就有函数值 $f(x'),f(x'')$ 的差小于ε.

2、**闭区间**$[a,b]$**上连续函数一定一致连续**, 因此, 连续与一致连续的区别都集中在非闭的有限区间或无限区间上的函数.

五、例题：

例 1 证明不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数使得

$$f(f(x)) = \mathrm{e}^{-x}$$

证明 若存在连续函数使得上式成立. 对任意的 $x_1 \neq x_2$, 若 $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Longrightarrow \mathrm{e}^{-x_1} = \mathrm{e}^{-x_2}$ 矛盾.

所以$f(x)$ 是单射,$\Longrightarrow$ 存在反函数 $\Longrightarrow f(x)$ 严格单调.

$$\begin{cases} f(x) \nearrow \text{(严格)} : \forall x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Longrightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \\ f(x) \searrow \text{(严格)} : \forall x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Longrightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)). \end{cases}$$

$\Longrightarrow \mathrm{e}^{-x_1} < \mathrm{e}^{-x_2}$, 矛盾, 所以这样的函数不存在.

例 2 证明：函数

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} - a,\ x \in (0, +\infty)$$

在 $(0, +\infty)$ 上有零点.

证明 因为(以下极限可以用L'Hopital法则)

$$g(0+0) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 - a > 0, \lim_{x \to +\infty} g(x) = -a < 0$$

根据极限的性质,一定存在靠近 0 的一点$x_1 > 0$ 以及充分大的一点 x_2 分别满足 $g(x_1) > 0,\ g(x_2) < 0$ 因此在 $[x_1, x_2]$ 有零点也就是在 $(0, +\infty)$ 内有零点.

例 3 证明： $f\Big|_{[a,+\infty)}$ 连续且 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l \Longrightarrow f\Big|_{[a,+\infty)}$ 一致连续.

证明：(1): $\forall \varepsilon > 0$ 由条件 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$, 并利用Cauchy 收敛准则得 $\exists M > 0$ 对于满足 $x, x' > M$ 的点, 有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

在区间 $[a, M+1]$ 上,函数连续因此一致连续,所以存在 $\delta' > 0$ 使得对于 $x, x' \in [a, M+1]$ 中的两点 x, x', 只要 $|x - x'| < \delta'$, 就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$

取 $\delta = \min\{\delta', 1\}$ 则对于任意的 $x, x' \in [a, +\infty)$ 只要 $|x - x'| < \delta$, 要么 $x, x' \in [a, M+1]$ 要么 $x, x' > M$, 因此都有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

这里为了防止出现 $x < M < x'$ 时无法判断的问题,做了上述技术处理.一般来说如果考虑有接点的情况,上述处理是常用的,避免出现在跨界处无法说清楚的现象出现.

例 4 证明： $f\Big|_{[a,b)}$ 连续但 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty \Longrightarrow f\Big|_{[a,b)}$ 不一致连续.

证明：（反证法）假设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致连续, 则

对任意的 $\varepsilon>0$, 一定存在 $\delta'>0$, 只要 $|x'-x''|<\delta'\ x',x''\in[a,b)$, 就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\dfrac{\delta'}{2}$, 对任意的 $x',x''\in[a,b)$, 只要 $|x'-b|<\delta,\ |x''-b|<\delta$, 就有

$$|x'-x''|\le|x'-b|+|x''-b|<2\delta=\delta'$$

推得

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

根据Cauchy 收敛准则, $f(x)$ 当 $x\to b^-$ 时收敛, 这与条件矛盾, 因此 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上不一致连续.

例 5 证明：若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 则 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界. 本题含义是若$f(x)$ 一致连续, 则 $|f(x)|=O(x)(x\to+\infty)$, 而 $f(x)=x^2$ 不满足 $|f(x)|=O(x)(x\to+\infty)$,所以不一致连续.

证明：对 $\varepsilon=1$, 一定存在 $\delta'>0$, 使得对任意的 $x>0,y>0$,有

$$|x-y|<\delta' \implies |f(x)-f(y)|<1$$

取

$$\delta<\delta' \quad M=\max_{x\in[0,\delta]}|f(x)|,$$

对任意的 $x>1$, 一定存在正整数 n, 使得

$$n\delta<x<(n+1)\delta, \quad \text{或} \quad 0<x-n\delta<\delta,$$

这样 $f(x)$ 就可以表示为

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}[f(x-(k-1)\delta)-f(x-k\delta)]+f(x-n\delta)$$

其中 $0<x-n\delta<1$. 所以当 $x>1$ 时

$$|f(x)|\le\sum_{k=1}^{n}|f(x-(k-1)\delta)-f(x-k\delta)|+|f(x-n\delta)|\le n+M$$

$$\implies\frac{|f(x)|}{|x|}\le\frac{n}{x}+\frac{M}{x}\le\frac{1}{\delta}+M$$

例 6 设 $f(x),\ g(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上一致连续, $xg(x)\to0\ (x\to+\infty)$, 试证 $f(x)g(x)$ 一致连续.

证明 因为

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{x}\cdot xg(x)\to 0\ (x\to+\infty)$$

所以 $f(x)g(x)$ 一致连续.

例7 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(0)=f(1)$. 求证: 对任意自然数 n, 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 中存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$.

证明 考察函数 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$. 显然在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上连续. 只需证明 $g(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上有零点.

若 $g(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上无零点, 则由介值定理知, $g(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上不变号. 不妨设 $g(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上恒为正, 则有

$$g\left(\frac{j}{n}\right)=f\left(\frac{j}{n}\right)-f\left(\frac{j+1}{n}\right)>0,\quad j=0,1,\cdots,n-1.$$

将上式对 $j=0,1,\cdots,n-1$ 求和, 得到

$$f(0)>f(1).$$

这与条件矛盾!

例8 求证对任意自然数 n, 方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$存在唯一的正根 x_n; 进一步证明, 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证明 设 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$, 则函数在 $[0,+\infty)$ 严格单调增, 连续, 因此如果有正根, 一定唯一. 另一方面当 $n\geq 2$ 时

$$f(0)=-1,\quad f(1)=n-1>0,$$

因严格单调, 故在区间 $(0,1)$内存在唯一正根, 记为 x_n, 满足$0<x_n<1$ 和方程

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1,\ n=2,3,\cdots,$$

假如 $x_n\leqslant x_{n+1}$, 则

$$1=x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+\cdots+x_{n+1}\geqslant x_{n+1}^{n+1}+(x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n)=x_{n+1}^{n+1}+1$$

推得 $x_{n+1}\leq 0$, 矛盾. 因此必有 $x_n>x_{n+1}$. 即, 数列 $\{x_n\}$ 严格单调减的正数列. 于是它是收敛的. 设 $\lim x_n=d$.

因为x_n 满足方程可化为 $x_n(1-x_n^n)=1-x_n$. 而 $x_n<x_2<1\quad(n>2)$ 所以 $0<x_n^n<x_2^n\to 0$. 令 $n\to+\infty$ 得

$$d=1-d,\implies d=\frac{1}{2}.$$