中 国 科 学 技 术 大 学

2019—2020学年第二学期考试试卷

考试科目 概率论 得分 ________

所在院系 ________ 学号 ________ 姓名 ________

考试时间: 2020 年 9 月 6 日上午 8:30–11:30

装……订……线

一、 (30分, 每小题3分) **填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.**

(1) 某人打靶的命中率为 0.5, 当他连续射击三次后检查目标, 发现靶已命中, 则他第一次射击时就已经命中的概率为_____.

(2) 甲乙二人抛掷一枚均匀的硬币, 甲抛了 101 次, 乙抛了 100 次, 则甲抛出的正面次数比乙多的概率是_______.

(3) 设随机变量 X, Y 和 Z 独立同分布于几何分布$\mathrm{Geo}(p)$, $0 < p < 1$. 若记 $q = 1 - p$, 则 $\mathbf{P}(X < Y < Z) =$___________ (请将结果写成 q 的表达式).

(4) 设随机变量 X 的概率密度 $p(x) = A\mathrm{e}^{-x^2+x}$, $-\infty < x < \infty$, 则常数 $A =$ _______.

(5) 若随机变量 X 和 Y 满足 $\mathbf{P}(X^2 + Y^2 = 1) = 1$, 则下列说法中一定不成立的是( )

(A) (X, Y) 为二维连续性随机向量 (B) $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0$

(C) X 和 Y 不相关 (D) X 和 Y 相互独立

(6) 设随机变向量 (X, Y) 的分布函数为 $\Phi(2x)\Phi(y-1)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 (X, Y) 服从二维正态分布( )

(A) $\mathcal{N}(0, 1; \frac{1}{4}, 1; 0)$ (B) $\mathcal{N}(0, -1; \frac{1}{4}, 1; 0)$ (C) $\mathcal{N}(0, 1; 4, 1; 0)$ (D) $\mathcal{N}(0, -1; 4, 1; 0)$

(7) 设随机变量 X_1 和 X_2 相互独立, 方差均存在, 且密度函数分别为 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$. 若 Y_1 的密度函数为 $[p_1(y) + p_2(y)]/2$, 而 $Y_2 = (X_1 + X_2)/2$, 则( ).

(A) $\mathbf{Var}[Y_1] > \mathbf{Var}[Y_2]$ (B) $\mathbf{Var}[Y_1] = \mathbf{Var}[Y_2]$

(C) $\mathbf{Var}[Y_1] < \mathbf{Var}[Y_2]$ (D) 以上皆有可能

(8) 设随机变量 X 与 Y 满足 $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 1, \mathbf{Var}X = \mathbf{Var}Y = 2$, 且它们的相关系数 $r_{X,Y} = 0.25$. 若令 $U = X + 2Y, V = X - 2Y$, 则 $r_{U,V}$=_______.

(9) 设随机变量 X 服从参数为 2 的 Poisson 分布, Y 服从均匀分布 $U[-3, 3]$, 且它们相互独立, 则 $\mathbf{Var}(XY) =$_______.

(10) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一列独立的 $U(0, 1)$ 随机变量, 则当 $n \to \infty$ 时, $\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{-1/n}$ 依概率收敛到_______.

二、 (10分) 设随机变量 X 服从标准 Cauchy 分布, 即其密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) 试求 X 的分布函数 $F(x)$;

(2) 证明: 随机变量 $Y = \frac{1}{X}$ 与 X 同分布.

三、 (15分) 设随机变量 X 和 Y 的联合密度函数为

$$p(x,y) = cx(y-x)\mathrm{e}^{-y}, \quad 0 \le x \le y < \infty.$$

(1) 试求常数 c;

(2) 试求条件密度函数 $p_{X|Y}(x|y)$ 和 $p_{Y|X}(y|x)$;

(3) 试求条件期望 $\mathbf{E}(X|Y)$ 和 $\mathbf{E}(Y|X)$.

四、 (12分) 设随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布 $\mathcal{N}(0,0;1,1;r)$, 即其密度函数为

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)\right\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

其中相关系数 $r \neq 0$. 现记 $Z = (Y-rX)/\sqrt{1-r^2}$.

(1) 试求随机向量 (X,Z) 的密度函数;

(2) X 与 Z 是否相互独立? Y 与 Z 是否相互独立? 请说明理由.

(3) 利用上述结论证明:

$$\mathbf{P}(X>0, Y>0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin r.$$

五、 (18分) 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是一列独立同分布于标准指数分布 Exp(1) 的随机变量, 记其部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. 已知在 $S_n = x$ 条件下, 随机变量 Z 服从参数为 x 的 Poisson 分布.

(1) 试求 S_n 的密度函数 $p_n(x)$;

(2) 试求 Z 的分布律和特征函数 $f_Z(t)$;

(3) 试求 Z 的期望 $\mathbf{E}Z$ 和方差 $\mathbf{Var}Z$;

(4) 利用特征函数证明: 当 $n \to \infty$ 时,

$$\frac{Z - \mathbf{E}Z}{\sqrt{\mathbf{Var}Z}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

六、 (15分) 在一款电子游戏中，某件宝物由 n 种不同的零件拼成. 假设玩家每打开一个宝箱都等可能地得到其中一种零件. 若玩家想拼成一件完整的宝物, 以 X_n 表示他所需打开的宝箱个数.

(1) 试求 X_n 的期望与方差；

(2) 证明: 当 $n \to \infty$ 时, $X_n/(n \ln n) \xrightarrow{p} 1$;

(3) 证明: 当 $n \to \infty$ 时,

$$\frac{X_n - n \ln n}{n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\Big(\gamma, \frac{\pi^2}{6}\Big),$$

其中 $\gamma = 0.57721\ldots$ 为 Euler 常数.

七、 (10分) 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 且四阶矩存在. 记

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

试找出合适的常数 a, b 和常数列 $\{c_n\}$, 使得随机向量 $c_n(Y_n - a, Z_n - b)'$ 依分布收敛, 并确定该极限分布.