中国科学技术大学 2019~2020 学年第一学期

数学分析(B1)　期末考试

2020 年 1 月 10 日

一、(本题 30 分，每小题 6 分) 计算题 (给出必要的计算步骤)

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int \left|\ln x\right|\mathrm{d}x$

5. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^p}$，p 是常数，$p>0$，求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}[f(1)f(2)\cdots f(n)]^{\frac{1}{n^{p+1}}}$.

二、(本题 10 分) 已知曲线 $y=y(x)$ 经过原点，且在原点的切线平行直线 $2x-y-5=0$，而 $y(x)$ 满足微分方程 $y''-6y'+9y=\mathrm{e}^{3x}$，求曲线 $y=y(x)$.

三、(本题 10 分) 求由方程 $\left|\ln x\right|+\left|\ln y\right|=1$ 所表示的平面曲线所围成的平面图形的面积.

四、(本题 10 分) 设 α,β 为实数. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\dfrac{1}{x^\beta}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

问当且仅当 α,β 取何值时，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可积 (需说明理由)?

(注：此处的可积是指有通常意义的积分，不包含反常积分.)

五、(本题 12 分，每小题 6 分)

(1) 设实数 $\alpha>0$，讨论正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\right)$ 的敛散性.

(2) 设实数 $A>0$，讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)$ 在闭区间 $[-A,A]$ 上的一致收敛性.

六、(本题 8 分) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数且有反函数，已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\displaystyle\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x$.

七、(本题 12 分) 设函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

证明：$F(x)$ 是以 T 为周期的连续函数的充分必要条件是 $\displaystyle\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$.

八、(本题 8 分) 设数列 $\{a_n\}$ 为有界数列，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 证明：幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1.

中国科学技术大学 2019~2020 学年第一学期

数学分析(B1)　期末考试　参考答案

2020 年 1 月 10 日

一、(本题 30 分, 每小题 6 分) 计算题 (给出必要的计算步骤)

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x$

解 $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)+(1-x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int \frac{(1+x)+(1-x)}{(1+x)(1-x)}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(-\ln\left|1-x\right| + \ln\left|1+x\right|\right) + \arctan x\right) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{2}\arctan x + C. \square$$

说明　不加绝对值扣 1 分, 遗漏积分常数 C 扣 1 分.

2. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

解　记 $\sqrt{x} \to t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$.

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^2\left(2-\frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 4 - 2\ln\left|1+t\right|\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3. \qquad \square$$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$

解　先证明上述广义积分的收敛性.

$$0 \le \int_0^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-x}\cos x\right|\mathrm{d}x \le \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

故积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 从而收敛. 下面计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$.

$$I_1 = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(\sin x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(\cos x) = -\left(\mathrm{e}^{-x}\cos x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\cos x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right)$$

$$= 1 - \int_0^{+\infty}\cos x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 \\ I_2 = 1 - I_1 \end{cases} \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

4. $\displaystyle\int\left|\ln x\right|\mathrm{d}x$

解　1° 当 $0 < x \le 1$ 时, $\ln x \le 0, \left|\ln x\right| = -\ln x$,

$$\int\left|\ln x\right|\mathrm{d}x = -\int\ln x\mathrm{d}x = -\left(x\ln x - \int\mathrm{d}x\right) = -x\ln x + x + C_1.$$

2° 当 $x \ge 1$ 时, $\ln x \ge 0, \left|\ln x\right| = \ln x$,

$$\int |\ln x| \mathrm{d}x = \int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C_2.$$

又 $x=1$ 时，$-x\ln x + x + C_1 = x\ln x - x + C_2 \Rightarrow 2 + C_1 = C_2$. 从而

$$\int |\ln x| \mathrm{d}x = \begin{cases} -x\ln x + x + C, & 0 < x \le 1, \\ x\ln x - x + C + 2, & x > 1. \end{cases}$$ □

说明 注意函数在 $x=1$ 处的连续性将得出两个积分常数的约束关系 (2 分).

5. 已知 $f(x) = \mathrm{e}^{x^p}$，p 是常数，$p > 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} [f(1)f(2)\cdots f(n)]^{\frac{1}{n^{p+1}}}$.

解 由题意得:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f(i)\right)^{\frac{1}{n^{p+1}}} = \mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i^p}{n^{p+1}}}.$$

下面考虑极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{i^p}{n^{p+1}}$.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^p}{n^{p+1}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^p \cdot \frac{1}{n} \to \int_0^1 x^p \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1} x^{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1} \, (n\to\infty)$$

其中，上式已运用积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的 Riemann 和的定义.

故原极限

$$\lim_{n\to\infty} [f(1)f(2)\cdots f(n)]^{\frac{1}{n^{p+1}}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{p+1}}.$$ □

二、(本题 10 分) 已知曲线 $y = y(x)$ 经过原点，且在原点的切线平行直线 $2x - y - 5 = 0$，而 $y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x}$，求曲线 $y = y(x)$.

解 由题意得：$y(0) = 0, y'(0) = 2$.

考虑二阶常系数齐次线性方程 $y'' - 6y' + 9y = 0$.

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow y_1 = \mathrm{e}^{3x}, y_2 = x\mathrm{e}^{3x} \Rightarrow y_{\mathrm{h}} = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2 x\mathrm{e}^{3x} \; (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$$y_1' = 3\mathrm{e}^{3x}, y_2' = (3x+1)\mathrm{e}^{3x} \Rightarrow W(x) = (3x+1)\mathrm{e}^{6x} - 3x\mathrm{e}^{6x} = \mathrm{e}^{6x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^{3x}\cdot \mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{6x}} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 + C \\ C_2(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}\cdot \mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{6x}} \mathrm{d}x = x + C \end{cases} \Rightarrow y_{\mathrm{p}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

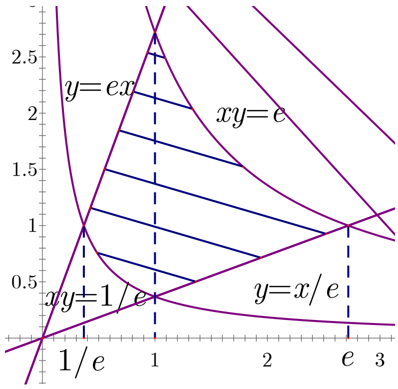
$$\Rightarrow y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = \left(-\frac{1}{2}x^2 + C_1\right)\mathrm{e}^{3x} + (x + C_2)x\mathrm{e}^{3x} = \left(\frac{1}{2}x^2 + C_2 x + C_1\right)\mathrm{e}^{3x}.$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{3x}.$$ □

三、(本题 10 分) 求由方程 $\left|\ln x\right| + \left|\ln y\right| = 1$ 所表示的平面曲线所围成的平面图形的面积.

解 此图形由下列四条曲线围成:

$$\begin{cases} xy = \mathrm{e},\ x \geq 1, y \geq 1 \\ y = \dfrac{x}{\mathrm{e}},\ x \geq 1, 0 < y < 1 \\ y = \mathrm{e}x,\ 0 < x < 1, y \geq 1 \\ xy = \dfrac{1}{\mathrm{e}}, 0 < x < 1, 0 < y < 1 \end{cases}$$



所围的图形如图所示. 所以, 面积为

$$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\left(\mathrm{e}x - \frac{1}{\mathrm{e}x}\right)\mathrm{d}x + \int_{1}^{\mathrm{e}}\left(\frac{\mathrm{e}}{x} - \frac{x}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}. \ \square$$

四、(本题 10 分) 设 α, β 为实数. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x^\beta}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

问当且仅当 α, β 取何值时, $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可积 (需说明理由)?

(注: 此处的可积是指有通常意义的积分, 不包含反常积分.)

解 (1) 当 $\alpha > 0$ 时,

$$\left|x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta}\right| \leq \left|x^\alpha\right| \to 0\ (x \to 0) \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow f \in C[0,1] \Rightarrow f \in R[0,1].$$

(2) 当 $\alpha = 0$ 时, $\left|\sin\dfrac{1}{x^\beta}\right| \leq 1 \Rightarrow f(x)$ 有界, 且至多只有 $x = 0$ 一个间断点, 故 $f \in R[0,1]$.

(3) 当 $\alpha < 0$ 时,

1° $\beta \geq 0$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 附近无界, $f(x)$ 不可积;

2° $\beta < 0$, $x^\alpha \sin\dfrac{1}{x^\beta} \sim x^{\alpha-\beta}\ (x \to 0)$, 则当且仅当 $\alpha - \beta \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界, 且至多只有 $x = 0$ 一个间断点, 故 $f \in R[0,1]$.

综上, 当且仅当 $\alpha \geq 0$ 或 $\beta \leq \alpha < 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可积. $\square$

说明 本题也可以将 β 的符号作为依据进行分类讨论, 得出 $\beta \geq 0, \alpha \geq 0$ 或 $\beta < 0, \alpha \geq \beta$ 的条件.

五、(本题 12 分, 每小题 6 分)

(1) 设实数 $\alpha > 0$, 讨论正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\right)$ 的敛散性.

(2) 设实数 $A > 0$, 讨论函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n} - \sin\frac{x}{n}\right)$ 在闭区间 $[-A, A]$ 上的一致收敛性.

(1) **解(1)** 1° 当 $0 < \alpha < 1$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^\alpha}\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \int_0^n\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_0^n = \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\right) < \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{n^{1+\alpha}}$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}\,(\alpha>0)$收敛，由上式及比较判别法知，正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\right)(0<\alpha<1)$收敛.

2° 当$\alpha \geq 1$时,

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\right) \leq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\right).$$

由(1)的结论及比较判别法知，正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\right)(\alpha\geq 1)$收敛.

综上，正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\right)(\alpha>0)$收敛. □

解(2) 一、先证：对$\forall m\in\mathbb{N}^*$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{m}}}\right)$收敛.

由 Hölder 不等式，

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{m}}}\right)^m \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n})^{m-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot n^{m-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{m}}} \leq \sqrt[m]{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot n^{m-1}} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot n^{\frac{m-1}{m}} \cdots(*)$$

又

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} \sim \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} = \ln(n+1)\,(n\to\infty)$$

从而$\exists M>0$，使得$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq \ln(n+1)+M\ (n=1,2,\cdots)$，代入(*)得:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{m}}} \leq (\ln(n+1)+M)^{\frac{1}{m}}\cdot n^{\frac{m-1}{m}} \Rightarrow \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{m}}}\right) \leq \frac{(\ln(n+1)+M)^{\frac{1}{m}}}{n^{\frac{m+1}{m}}}$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln(n+1)+M)^{\frac{1}{m}}}{n^{\frac{m+1}{m}}}$收敛，从而由比较判别法知，正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{m}}}\right)$收敛.

二、对$\forall\alpha>0,\exists m\in\mathbb{N}^*$，使得$\alpha\geq\frac{1}{m}>0$，从而

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\right) \leq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{m}}}\right).$$

由上式及比较判别法知，正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\right)(\alpha>0)$收敛. □

(2) **解(1)** 由于函数 $f_n(x)=\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}$ 是奇函数，故只需讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)$ 在 $[0,A]$ 上的一致收敛性.

对于某个取定的 $A>0$，取 $N=[A]+1\in\mathbb{N}^*$，则原函数项级数的一致收敛性与 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)$ 相同.

由于 $n\geq N>A\Rightarrow\frac{x}{n}<1\Rightarrow 0\leq\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}<\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^3\leq\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{A}{n}\right)^3$,

由级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛及 Weierstrass 判别法知，函数项级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)$ 在 $[0,A]$ 上一致收敛.

从而原函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)$ 在 $[-A,A]$ 上一致收敛. □

说明 事实上，若注意到函数 $f(x)=x-\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调性，立即得出以下证法.

解(2) 注意到奇函数 $f_n(x)=\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}$ 在 $[-A,A]$ 上单调递增，则有

$$\left|\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right|\leq\frac{A}{n}-\sin\frac{A}{n}.$$

又 $\frac{A}{n}-\sin\frac{A}{n}\sim\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{A}{n}\right)^3$，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A}{n}-\sin\frac{A}{n}\right)$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 同收敛，

由 Weierstrass 判别法知，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\sin\frac{x}{n}\right)$ 在 $[-A,A]$ 上一致收敛. □

六、(本题 8 分) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的可微函数且有反函数，已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x$.

解 记 $t=f^{-1}(x)\Rightarrow f(t)=x\Rightarrow f'(t)\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$，代入得:

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=\int t\mathrm{d}f(t)=tf(t)-\int f(t)\mathrm{d}t=tf(t)-F(t)+C=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C.$$ □

七、(本题 12 分) 设函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

证明：$F(x)$ 是以 T 为周期的连续函数的充分必要条件是 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$.

证明 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数 $\Rightarrow F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$.

$F(x)$ 以 T 为周期 $\Leftrightarrow F(x+T)=F(x)\Leftrightarrow F(x+T)-F(x)=0\Leftrightarrow\int_x^{x+T}f(t)\mathrm{d}t=0\cdots(*)$

由 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数知，

$$\int_x^{x+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_x^T f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_x^T f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(u+T)\mathrm{d}u=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

从而，$(*)\Leftrightarrow\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$. □

八、(本题 8 分) 设数列 $\{a_n\}$ 为有界数列, 级数 a_n 发散. 证明: 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1.

证明 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R.

1° 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 从而当 $\left|x\right| > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散 $\Rightarrow R \leq 1 \cdots (1)$.

2° 当 $x < 1$ 时, 由数列 $\{a_n\}$ 有界 $\Rightarrow \exists M > 0, \left|a_n\right| \leq M\ (n = 1,2,\cdots)$.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n x^n\right| \leq M\sum_{n=1}^{\infty}\left|x^n\right| = M \cdot \frac{\left|x\right|}{1-\left|x\right|}$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛, 故收敛 $\Rightarrow R \geq 1 \cdots (2)$.

由(1)(2)知, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = 1$. □

余启帆

2020 年 1 月 24 日