用凯特摆测量重力加速度

姓名 PB****

摘要：凯特摆可用来精确地测量重力加速度，通过利用凯特摆其作为复摆模型的共轭点，可以规避一些实验中难以测准的物理量对实验的影响，提高实验精度。本文作者将使用凯特摆装置以测量合肥市当地的重力加速度，由实验的主要原理及操作手法出发，测量重力加速度并给出对测量结果的不确定度分析。

关键词：凯特摆；重力加速度；不确定度分析

1 引言

1818 年在伦敦，C.H.Kater(1777-1835)设计了可倒摆（即凯特摆）测量重力加速度，后来波斯坦大地测量所(Persian geodetic survery)使用五个凯特摆，花了八年时间测得当地重力加速度的值 g=981.274±0.003(cm/s^2)，这充分说明了凯特摆的实验思维和实践价值。

在重力作用下绕固定水平轴在竖直平面内摆动的刚体称作复摆，图 1 为复摆的示意图。过 O 点的水平轴上，当刚体作微小摆动时，设摆动周期为 T_1，那么在 G 的另一侧，即 OG 延长线上，必有一点 O'，刚体悬挂于过 O 点的水平轴上作微小摆动时，摆动周期 $T_2=T_1$，O、O' 即为共轭点，过该两点的水平轴为共轭轴，在 G 的两侧存在无数对共轭轴，O、O' 间距离 l 为复摆的等效摆长。由理论推导可得，复摆的周期公式为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},\ l = \frac{I_G + mh^2}{mh} \tag{1}$$

进而因 $T_1=T_2$，可以由等效摆长相等推出

$$l = \frac{I_G + mh_1^2}{mh_1} = \frac{I_G + mh_2^2}{mh_2},\ l = h_1 + h_2 \tag{2}$$

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{{T_1}^2 + {T_2}^2}{2l} + \frac{{T_1}^2 - {T_2}^2}{2(h_1 - h_2)}\ := \mathrm{a} + \mathrm{b} \tag{3}$$

可见只要找到复摆的一对共轭点，分别测出 T_1, T_2, l, h,即可计算出重力加速度。凯特摆的巧妙在于反其道而行之，先确定一对悬挂点，通过调节摆锤改变复摆质心位置的方法，使悬挂点具备共轭点的特性，再测量出相应物理量用于计算。

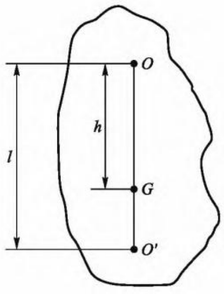

图 1 复摆示意图

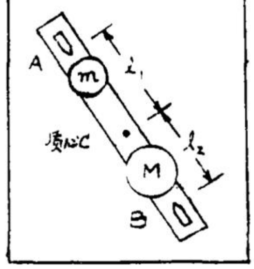

图 2 凯特摆示意图

2 实验

本实验所用仪器有凯特摆、光电探头、多用数字测量仪(精度 0.1ms)、卷尺(2m/1mm，最大允差 1.2mm)、丁形支架和铁架台。

2.1 调节凯特摆，使悬挂点具备共轭点特性

进行凯特摆实验时，应反复来回调节凯特摆两端的大小摆锤，用计数器不断检测正立和倒置时凯特摆的周期变化，通过逐步逼近的方式，使两周期基本相等。本文作者在实验过程中摸索出的调节技巧是

1 实验开始之前，一定要保证刀口和凹槽之间是线接触而不是点接触，检验方法是轴向旋转凯特摆，观察刀口位置的转轴是否为凯特摆轴心，如若不是，应调节支架的底部承重螺丝。这一步极为关键，因为点接触带来的误差可能导致在最后阶段的调节中出现同一侧多次测量的误差极差超过 1ms，导致无论向哪个方向调节小摆锤都无法进一步缩小误差。

2 先调节大摆锤，在 $|T1-T2| < 5ms$ 的条件下再进行小摆锤的调节，调节过程中需要注意记录每次摆锤的调节方向(远离/靠近中轴线)，下一次就能相反方向调节。在最后调节小摆锤的阶段中，可注意到摆锤颜色指代了摆锤材质的不同，黑色摆锤的密度大于橙色摆锤，因而在相同调节距离的情况下，橙色小摆锤更适合用于微调。调节结束时有$|T1-T2| < 1ms$。

2.2 确定质心位置，测量 h1

运用实验器材丁形支架，可不断调整支点位置以达到凯特摆的平衡，进而用钢卷尺多次测量质心到一侧刀口的距离 h1。实验装置设计中，可以使各摆锤质量不等，让凯特摆的质心偏向一侧，使得(2h1-l) 尽量大；实验调节中，尽量使$|T1-T2|$ 越小越好，这样就可以遮掩式(3)中 b 项的影响，使其相对于 a 项来说可以忽略。

2.3 正式测量

测量的物理量包括 T1, T2, l, h1, 每个物理量都应该测量五次。如若因操作失误忘记测量的 h 是 h1 还是 h2，可以由 2h1-l>0 的条件判断。本次实验的数据记录如下：

T1/s	T2/s	L/cm	h2/cm
1.73325	1.73335	74.10	9.45
1.73329	1.73336	74.15	9.43
1.73328	1.73329	74.18	9.50
1.73330	1.73324	74.10	9.47
1.73327	1.73332	74.15	9.51

3 实验结果讨论

3.1 数据处理

以下无特别说明均取 n=5，置信区间 P=0.997, K_p=3.000 t_p=5.51。卷尺置信系数为 C=3 $\Delta_{估计} = 0.0005\text{m}$ $\Delta_B = \sqrt{{\Delta_{卷尺}}^2 + {\Delta_{估计}}^2} = 0.0013\text{m}$ 由数据算得各项均值如下：

$$\overline{T_1^2} = 3.004252 \quad \overline{T_2^2} = 3.004370 \quad (s^2)$$

$$\bar{l} = 0.74136 \quad \overline{h_1} = 0.64664 \quad \overline{h_2} = 0.09472 \quad (m)$$

3.2 不确定度计算

3.2.1 计算T_1^2和T_2^2的不确定度

对于T_1^2的不确定度，其$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(T_{1i}^2 - \overline{T_1^2})^2}{n(n-1)}} = 0.000298\, s^2$，且因用数字表测量，$\Delta_B = 0$，则

$$U_{T1} = \sqrt{(t_p u_A)^2} = 0.00164\, s^2$$

同理，对于T_2^2的不确定度，有

$$U_{T2} = \sqrt{(t_p u_A)^2} = 0.00415\, s^2$$

3.2.2 计算 L h1 h2 的不确定度

L 的不确定度计算如下：

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2}{n(n-1)}} = 1.57 \times 10^{-4} m \qquad U_l = \sqrt{(t_p u_A)^2 + (\frac{K_p \Delta_B}{C})^2} = 0.0014\, m$$

同理，h1 的不确定度为：

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(h_{1i} - \overline{h_1})^2}{n(n-1)}} = 1.630 \times 10^{-4}\, m \qquad U_{h1} = \sqrt{(t_p u_A)^2 + (\frac{K_p \Delta_B}{C})^2} = 0.0014\, m$$

h2 的不确定度为：

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(h_{2i} - \overline{h_2})^2}{n(n-1)}} = 1.496 \times 10^{-4}\, m \qquad U_{h2} = \sqrt{(t_p u_A)^2 + (\frac{K_p \Delta_B}{C})^2} = 0.0014\, m$$

3.2.3 计算合成不确定度

对于式(3)，其右端的全微分为

$$\text{d right} = \left(\frac{1}{2l} + \frac{1}{2(h_1 - h_2)}\right) dT_1^2 + \left(\frac{1}{2l} - \frac{1}{2(h_1 - h_2)}\right) dT_2^2 - \frac{T_1^2 + T_2^2}{2l^2} dl - \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(h_1 - h_2)^2} dh_1 + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(h_1 - h_2)^2} dh_2$$

所以$U_{Right} = \sqrt{\left(\frac{1}{2l} + \frac{1}{2(h_1 - h_2)}\right)^2 {U_{T1}}^2 + \left(\frac{1}{2l} - \frac{1}{2(h_1 - h_2)}\right)^2 {U_{T2}}^2 + (\frac{T_1^2 + T_2^2}{2l^2} U_l)^2 + \left(\frac{T_1^2 - T_2^2}{2(h_1 - h_2)^2} U_{h1}\right)^2 + \left(\frac{T_1^2 - T_2^2}{2(h_1 - h_2)^2} U_{h1}\right)^2} = 0.024\, kg \cdot s^{-2}$

故重力的不确定度为 $U = \sqrt{(\frac{4\pi^2 U_{Right}}{Right^2})^2} = 0.0575\, kg \cdot s^{-2}$

合肥重力加速度的测量值为 $g = \frac{4\pi^2}{Right} = 9.726 \pm 0.0575\, kg \cdot s^{-2}$ (P = 0.997)

4 总结

在凯特摆测量重力加速度的实验中，我们将原实验（用单摆测量重力加速度）中难以测量的量转化为容易测量的量，即把复摆等效摆长的测量转化为共轭点距离的测量。尽管实验中 h1 和 h2 的测量精度下降，但因式(3)中分母与分子的大小差距悬殊，故摆长测量误差对实验结果影响很小，在实验中是通过凯特摆的结构（中间轻两头重）来增大 |h1-h2|，从而降低实验误差。通过对数据处理的误差分析，可知本次实验的误差主要来自于长度测量，其中的$\frac{K_p\Delta_B}{C}$项在本次实验中影响较大。综合来看，与合肥本地的重力加速度 9.7947$kg\cdot s^{-2}$相比，测量值相对较小。

5 参考文献

[1] 盛妍. 凯特摆测重力加速度实验中的误区——以虚拟仿真实验为例[J]. 大学物理, 2021(10).

[2] Bill Crummett,张小溪. 重力加速度的测量[J]. 怀化师专学报. 1991(3).

[3] 中国科学技术大学实验讲义《实验 2 用凯特摆测量重力加速度》