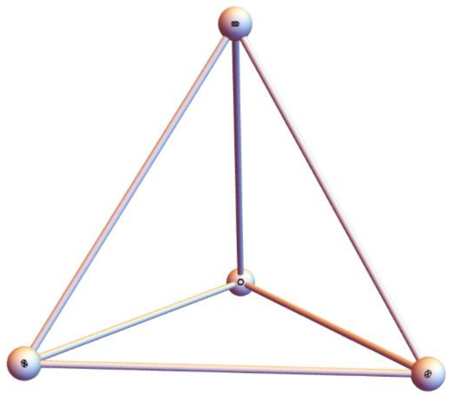
已修订
22-01-04，20:55

第 7 章 刚体力学

一、 刚体运动的描述

1. 刚体模型



刚体定义为不会形变的质点组，即在运动过程中，物体上的任意两点距离保持不变。

先来考虑刚体运动的自由度。

假如刚体只包含 1 个质点，则有 3 个直角坐标分量，自由度为 3。

添加一个质点，2 个质点构成的刚体，需要用 3+3=6 个坐标分量来描述；由于这两点的距离在运动中保持不变，即有 1 个约束条件，故自由度为 6-1=5。

再添加一个质点，这时需要 5+3=8 个坐标。而第三个点到其余两点的距离保持不变，有 2 个约束条件，所以 3 个质点构成的刚体自由度为 8-2=6。

4 个质点构成的刚体需要 6+3=9 个坐标；第四个点到其余三点距离保持不变，有 3 个约束，所以自由度为 9-3=6。

……

依此类推，N 个质点构成的刚体自由度 6，共需要 6 个广义坐标描述刚体的位形。

2. 随体坐标系和惯性系

在讨论刚体运动时，需要使用两套坐标系——随体坐标系和惯性系。

随体坐标系：固定在刚体上，跟随刚体一起运动的坐标系。

在刚体上取定一个**基点**C（也称为参考点），作为随体坐标系的原点，则刚体上任意一点P的位移可以表示为

$$\boldsymbol{r}_P(t) = \boldsymbol{r}_C(t) + \boldsymbol{r}_{CP}(t), \qquad |\boldsymbol{r}_{CP}(t)| = \text{常数}$$

记**惯性系的标准基**为$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$，这组基正交、完备，且构成右手系，

$$\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k = \delta_{jk}, \qquad \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j = \mathbf{1}, \qquad (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1$$

随体系的标准基记为

$$\boldsymbol{e}_j'(t), \qquad j=1,2,3.$$

刚体运动时，随体系的标准基随时间变化，但模长和夹角（垂直）不变，这组标准基一直满足正交归一和完备性，手征性也不变，

$$\boldsymbol{e}_j'(t)\cdot\boldsymbol{e}_k'(t)=\delta_{jk}, \qquad \boldsymbol{e}_j'(t)\boldsymbol{e}_j'(t)=\mathbf{1}, \qquad \big(\boldsymbol{e}_1'(t)\times\boldsymbol{e}_2'(t)\big)\cdot\boldsymbol{e}_3'(t)=1$$

刚体上的任意点P，在**惯性系的坐标**为

$$r_j(t)\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{r}_P(t)\cdot\boldsymbol{e}_j, \qquad j=1,2,3$$

随着刚体的运动而变化。

刚体上的任意点P，在**随体系的坐标**为

$$r_j'\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{r}_{CP}(t)\cdot\boldsymbol{e}_j'(t)\equiv\boldsymbol{r}_{CP}(0)\cdot\boldsymbol{e}_j'(0), \qquad j=1,2,3$$

不随随刚体的运动而变化。

3. 坐标变换和刚体的一般运动

定义从随体系到惯性系的**坐标变换矩阵**

$$R_{jk}\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k'(t), \qquad j,k=1,2,3.$$

又称为 DCM（Direction Cosine Matrix 方向余弦矩阵）。

同一个矢量在两个参考系的坐标不同，之间的变换关系为

$$a_j=\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_k'(t)\boldsymbol{e}_k'(t)\cdot\boldsymbol{e}_j=R_{jk}(t)a_k'$$

$$\vec{a}=R\vec{a}'$$

考虑刚体上任意固定点 P 的位移，

$$\boldsymbol{r}_P(t)=\boldsymbol{r}_C(t)+\boldsymbol{r}_{CP}(t)$$

等式两边同时点乘$\boldsymbol{e}_j$，

$$\begin{aligned} r_{Pj}(t)&=r_{Cj}(t)+\boldsymbol{r}_{CP}(t)\cdot\boldsymbol{e}_j=r_{Cj}(t)+\boldsymbol{r}_{CP}(t)\cdot\boldsymbol{e}_k'(t)\boldsymbol{e}_k'(t)\cdot\boldsymbol{e}_j\\ &=r_{Cj}(t)+\boldsymbol{r}_{CP}(0)\cdot\boldsymbol{e}_k'(0)\boldsymbol{e}_k'(t)\cdot\boldsymbol{e}_j=r_{Cj}(t)+r_{CP,k}(0)R_{jk}(t)\end{aligned}$$

得惯性系的坐标满足

$$\boxed{\vec{r}_P(t)=R(t)\vec{r}_{CP}(0)+\vec{r}_C(t)}$$

上面的等式即刚体转动的沙勒（Chasles）定理。

沙勒定理：刚体最一般位移可以分解为绕基点的转动和随基点的平移。

推论 改变基点，转动矩阵不变。

证明：把基点从C改为A，有

$$\left.\begin{matrix}\vec{r}_P(t)=R(t)\vec{r}_{CP}(0)+\vec{r}_C(t)\text{①}\Longrightarrow\vec{r}_A(t)=R(t)\vec{r}_{CA}(0)+\vec{r}_C(t)\\ \text{①}\end{matrix}\right\}\xRightarrow{\text{相减}}$$
$$\Longrightarrow\vec{r}_P(t)-\vec{r}_A(t)=R(t)\big(\vec{r}_{CP}(0)-\vec{r}_{CA}(0)\big)=R(t)\vec{r}_{AP}(0)$$
$$\Longrightarrow\vec{r}_P(t)=R(t)\vec{r}_{AP}(0)+\vec{r}_A(t)$$

转动矩阵相同。

二、 刚体转动的广义坐标

1. 转动矩阵作为广义坐标

(1) 转动矩阵的正交性

由转动矩阵的定义，（第一章已证）

$$RR^T=\mathbf{1},\qquad R^TR=\mathbf{1}$$

(2) 转动矩阵的行列式

惯性系和随体系都是右手系，（第一章已证）

$$\det R=1$$

也可以利用

$$RR^T=\mathbf{1}\Longrightarrow\det R=\pm1$$

$$R(0)=\mathbf{1}$$

以及$\det R\,(t)$是时间的连续函数得出此结论。

(3) 转动矩阵作为刚体运动的广义坐标

9 个矩阵元，6 个独立约束，剩下 3 个自由度。再加上随基点的平移$\vec{r}_C(t)$这 3 个广义坐标，刚好是刚体运动的 6 个自由度。

但 9 个矩阵元$R_{jk}(t)$不独立，需满足约束方程

$$R_{jl}R_{kl} = \delta_{jk}, \qquad \det R = 1$$

运动方程是 Sylvester 方程，较难求解。

2. 角位移参数

我们希望能得到三个独立的参数作为广义坐标。这需要进一步分析转动矩阵。

(1) 欧拉转动定理

定理 刚体的任意定点转动，都有一个（定点之外的）不动点；或者叙述为，刚体的定点运动等价于绕某转动轴的转动。

欧拉在 1776 年用球面几何证明了此结论。下面的证明利用了线性代数中的谱定理。

证明 转动矩阵R有三个特征值$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$，

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} R\vec{a} = \lambda\vec{a} \Rightarrow \vec{a}^\dagger R^T R\vec{a} = |\lambda|^2 \vec{a}^\dagger\vec{a} \\ R^T R = \mathbf{1} \end{array}\right\} \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \\ \det(R - \lambda\mathbf{1}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 \in \mathbf{R}, \lambda_2 = \lambda_3^* \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = e^{i\psi} \\ \lambda_3 = e^{-i\psi} \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1$对应的特征矢可取为实单位矢量，

$$R\vec{n} = \vec{n}, \qquad \vec{n}^* = \vec{n}, \qquad \vec{n}^2 = 1$$

是转动轴。

(2) 转动矩阵的角位移参数

若矢量$\vec{k}$绕$\vec{n}$方向转动轴转无穷小角度ϵ，则

$$\vec{r}' = \vec{r} + \epsilon\vec{n} \times \vec{r}$$

$$r_i = r_i + \epsilon\varepsilon_{ijk} n_j r_k = \left(\delta_{ik} + \epsilon\varepsilon_{ijk} n_j\right) r_k$$

写成矩阵形式，

$$X_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_3 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}' = \left(\mathbf{1}_{3\times 3} + \epsilon n_j X_j\right)\vec{r} = e^{\epsilon n_j X_j}\vec{r}$$

绕着$\vec{n}$轴连续转动，

$$\vec{r}' = e^{\epsilon n_j X_j} \cdots e^{\epsilon n_j X_j}\vec{r} = e^{\epsilon n_j X_j + \cdots + \epsilon n_j X_j}\vec{r} = e^{\psi n_j X_j}\vec{r} = e^{\psi_j X_j}\vec{r}$$

所以转动矩阵可以参数化为

$$R(\vec{\psi}) = e^{\psi_j X_j} = e^{\psi\vec{n}\cdot\vec{X}}$$

参数$\vec{\psi} = \psi\vec{n}$称为**罗德里格斯 Rodrigues 参数**或**角位移**。这正是我们需要的三个独立广义坐标。

(3) 转动矩阵的表达式

我们来计算转动矩阵的显式表达式。

记

$$A = \vec{\psi}\cdot\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 & -\psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & 0 & -\psi_1 \\ -\psi_2 & \psi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

由凯莱-哈密顿定理，

$$A_{ij} = \psi_k(-\varepsilon_{kij}), \qquad (A^2)_{ij} = -\psi^2\delta_{ij} + \psi_i\psi_j$$

$$\operatorname{tr} A = 0, \qquad \operatorname{tr} A^2 = -2\psi^2, \qquad \det A = 0$$

$$\Longrightarrow A^3 + \psi^2 A = 0$$

$$e^A = \mathbf{1} + \frac{\sin\psi}{\psi}A + \frac{1}{\psi^2}(1-\cos\psi)A^2$$

记

$$X_{\vec{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{X}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

那么

$$R(\psi\vec{n}) = e^{\psi X_{\vec{n}}} = \mathbf{1} + X_{\vec{n}}^2(1-\cos\psi) + X_{\vec{n}}\sin\psi = \mathbf{1}\cos\psi + \vec{n}\vec{n}^T(1-\cos\psi) + X_{\vec{n}}\sin\psi$$

$$R(\vec{\psi}) = \begin{pmatrix} n_1^2(1-\cos\psi)+\cos\psi & n_1n_2(1-\cos\psi)-n_3\sin\psi & n_1n_3(1-\cos\psi)+n_2\sin\psi \\ n_1n_2(1-\cos\psi)+n_3\sin\psi & n_2^2(1-\cos\psi)+\cos\psi & n_2n_3(1-\cos\psi)-n_1\sin\psi \\ n_1n_3(1-\cos\psi)-n_2\sin\psi & n_2n_3(1-\cos\psi)+n_1\sin\psi & n_3^2(1-\cos\psi)+\cos\psi \end{pmatrix}$$

例如

$$R_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}, R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

满足

$$R(2\pi\vec{n}) = \mathbf{1}$$

作用于矢量$\vec{k}$，可得

$$\begin{aligned} R(\vec{\psi})\vec{k} &= \{\mathbf{1} + X_{\vec{n}}^2(1-\cos\psi) + X_{\vec{n}}\sin\psi\}\vec{k} = \vec{k} + \vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{k})(1-\cos\psi) + (\vec{n}\times\vec{k})\sin\psi \\ &= (\vec{n}\cdot\vec{k})\vec{n} + \{\vec{k} - (\vec{n}\cdot\vec{k})\vec{n}\}\cos\psi + (\vec{n}\times\vec{k})\sin\psi \end{aligned}$$

正是第四章讨论过的罗德里格斯转动公式。

(4) 角位移不能线性相加

Rodrigues 参数虽被称为角位移，但并不满足平行四边形法则，不能像通常的矢量那样线性相加。由 BCH 公式

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A-B,[A,B]]+\cdots}$$

知

$$e^{\vec{\psi}_1\cdot\vec{X}} e^{\vec{\psi}_2\cdot\vec{X}} \neq e^{(\vec{\psi}_1+\vec{\psi}_2)\cdot\vec{X}}$$

这与位移不同。

但是无穷小的转动是可加的，

$$e^{\vec{\epsilon}_1\cdot\vec{X}} e^{\epsilon_2\cdot\vec{X}} = \left(\mathbf{1}+\vec{\epsilon}_1\cdot\vec{X}\right)\left(\mathbf{1}+\vec{\epsilon}_2\cdot\vec{X}\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2) = \mathbf{1}+\vec{\epsilon}_1\cdot\vec{X}+\vec{\epsilon}_2\cdot\vec{X}+\mathcal{O}(\epsilon^2) = e^{(\vec{\epsilon}_1+\vec{\epsilon}_2)\cdot\vec{X}}+\mathcal{O}(\epsilon^2)$$

(5) 转动轴的转动

考虑坐标系变换$Q \in \mathrm{SO}(3)$，矢量和矩阵分别变为

$$\vec{a} \to Q\vec{a}, \qquad M \to QMQ^{-1}$$

转动矩阵应该按矩阵变化，

$$R(\psi\vec{n}) \to QR(\psi\vec{n})Q^{-1} = \exp\left\{Q\left(\vec{\psi}\cdot\vec{X}\right)Q^{-1}\right\}$$

而我们知道

$$\left.\begin{array}{r} Q_{jj'}Q_{kk'}Q_{ll'}\varepsilon_{j'k'l'} \equiv \det Q\ \varepsilon_{jkl} \\ \det Q = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow Q_{jj'}Q_{kk'}Q_{ll'}\varepsilon_{j'k'l'} = \varepsilon_{jkl} \Longrightarrow Q_{jj'}Q_{kk'}Q_{ll'}\left(X_{j'}\right)_{k'l'} = \left(X_j\right)_{kl}$$

$$\xrightarrow{\text{乘以}Q_{ji}} Q_{kk'}Q_{ll'}(X_i)_{k'l'} = Q_{ji}\left(X_j\right)_{kl} \Longrightarrow QX_iQ^T = Q_{ji}X_j$$

$$\Longrightarrow \boxed{Q\left(\vec{\psi}\cdot\vec{X}\right)Q^{-1} = \left(Q\vec{\psi}\right)\cdot\vec{X}}$$

所以有

$$\boxed{QR(\psi\vec{n})Q^{-1} = R(\psi Q\vec{n})}$$

即转动轴按矢量转动，转动角不变。这从几何意义上很好理解。

3. Euler 角参数

(1) 定义

除了角位移之外，描述刚体运动还常用 Euler 角参数，把刚体转动分解成三个转动矩阵之积：

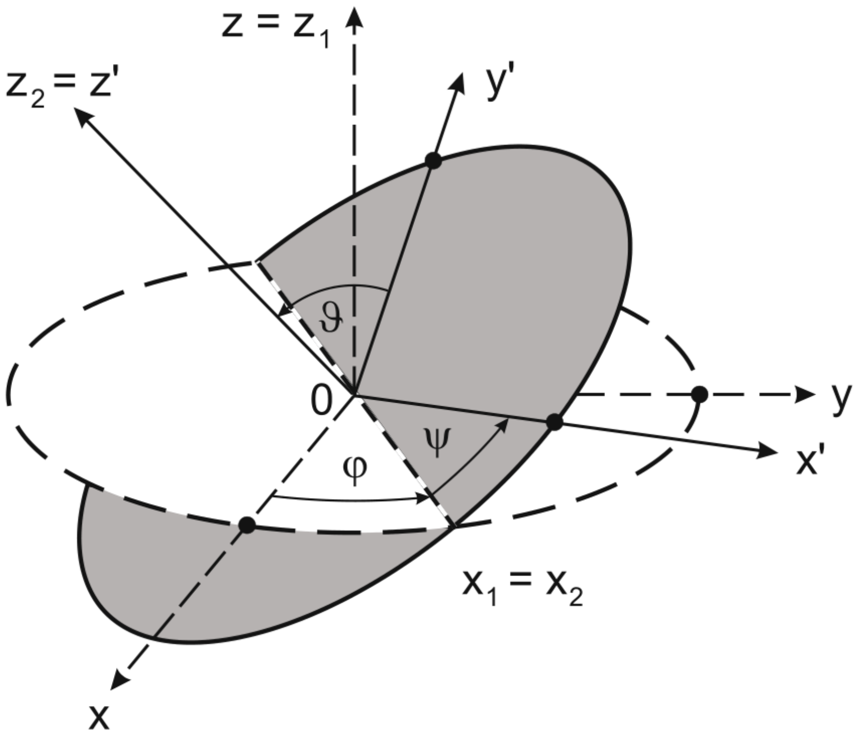
①随体坐标系绕z轴逆时针转ϕ角，$Oxyz \to Ox'y'z'$；

②随体坐标系绕**节线**——x'轴逆时针旋转θ角，$Ox'y'z' \to Ox''y''z''$；

③随体坐标系绕Oz''逆时针旋转ψ角。

即

$$R(\phi,\theta,\psi) \stackrel{\text{def}}{=} R_{z''}(\psi)R_{x'}(\theta)R_z(\phi)$$



随体系的第 3 轴，转动之后的方向由纬度θ和经度ϕ确定。$\theta \in [0,\pi]$是第 3 轴与z轴的夹角，称为**章动角**（nutation angle）；$\phi \in [0,2\pi)$是第 3 轴绕z轴转过的角度，称为**进动角**（precession angle）；$\psi \in [0,2\pi)$是刚体绕第 3 轴旋转的角度，称为**自转角**（intrinsic rotation, spin angle）。

(2) 转换为惯性系的转动

现在有

$$\begin{aligned} R_{z''}(\psi)R_{x'}(\theta)R_z(\phi) &= \{R_{x'}(\theta)R_{z'}(\psi)R_{x'}(\theta)^{-1}\}R_{x'}(\theta)R_z(\phi) = R_{x'}(\theta)R_{z'}(\psi)R_z(\phi) \\ &= \{[R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\phi)^{-1}][R_z(\phi)R_z(\psi)R_z(\phi)^{-1}]\}R_z(\phi) = R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi) \end{aligned}$$

$$R(\phi,\theta,\psi) = R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi)$$

将

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

代入计算得

$$R(\phi,\theta,\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\phi-\cos\theta\sin\psi\sin\phi & -\cos\theta\cos\psi\sin\phi-\sin\psi\cos\phi & \sin\theta\sin\phi\\ \cos\psi\sin\phi+\cos\theta\sin\psi\cos\phi & \cos\theta\cos\psi\cos\phi-\sin\psi\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta\end{pmatrix}$$

矩阵的最后一列，是随体系第 3 轴的方向。

上式是力学中习惯的定义方式。在群论和量子力学中，Euler 转动定义稍有区别，

$$\begin{aligned}&R(\alpha,\beta,\gamma)\stackrel{\text{def}}{=}R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)\\&=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

比较$R(\vec{\psi})$和$R(\alpha,\beta,\gamma)$的第三行和第三列元素，易得到两种参数之间的关系

$$\alpha=\alpha(\vec{\psi}),\qquad \beta=\beta(\vec{\psi}),\qquad \gamma=\gamma(\vec{\psi})$$

所以$R(\alpha,\beta,\gamma)$能够取遍SO(3)。

Tait–Bryan angles 常用于工程和控制领域，

$$R(\phi,\theta,\psi)=R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$$

roll 横滚角（轴向：前） pitch 俯仰角（轴向：右） yaw 航向角（轴向：下）

(3) 欧拉角参数的缺点：万向节死锁 Gimbal Lock

①机械上，当陀螺仪两轴刚好重合时，转动时只有两个自由度，陀螺随框架转动；（图）

②算法上，当$\theta=0$时，参数有无穷多种取法，可能导致大数相减，丢失数值精度。

4. 用四元数表示转动*

(1) 用四元数表示转动

除了角位移、欧拉角这两种常用的广义坐标，还有多种参数可以描述刚体运动[1]。四元数是其中最重要的。

[1] 参考附录.

复数$a+b\boldsymbol{i}$表示平面上的矢量，并且可以表示对矢量的旋转和尺度变换，$\boldsymbol{i}$表示旋转90°，旋转任意角度θ的线性变换为$e^{\boldsymbol{i}\theta}$。

对 3 维空间，引进 3 个虚数单位，空间的点记为虚数

$$x\boldsymbol{i}_1+y\boldsymbol{i}_2+z\boldsymbol{i}_3$$

$\boldsymbol{i}_1$表示绕x-轴旋转90°，

$$\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{i}_3, \qquad \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3=-\boldsymbol{i}_2$$

依次类推；并且约定$\boldsymbol{i}_1^2=-1$。总之，四元数**乘法规则**为

$$\boldsymbol{i}_1^2=\boldsymbol{i}_2^2=\boldsymbol{i}_3^2=\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3=-1 \Leftrightarrow \boldsymbol{i}_j\boldsymbol{i}_k=-\delta_{jk}+\varepsilon_{jkl}\boldsymbol{i}_l$$

一个四元数由实部和虚部组成，又称为矢量部分和标量部分，

$$\mathbb{H} \stackrel{\text{def}}{=} \{a_0+a_1\boldsymbol{i}_1+a_2\boldsymbol{i}_2+a_3\boldsymbol{i}_3 | a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\}$$

$$a=a_0+a_1\boldsymbol{i}_1+a_2\boldsymbol{i}_2+a_3\boldsymbol{i}_3=a_0+\vec{a}\cdot\vec{\boldsymbol{i}}$$

$$\operatorname{Re}a=a_0, \qquad \operatorname{Im}a=\vec{a}\cdot\vec{\boldsymbol{i}}$$

其**复共轭**定义为

$$a^* \stackrel{\text{def}}{=} a_0-a_1\boldsymbol{i}_1-a_2\boldsymbol{i}_2-a_3\boldsymbol{i}_3$$

两个四元数相乘得

$$ab=(a_0+\vec{a}\cdot\vec{\boldsymbol{i}})(b_0+\vec{b}\cdot\vec{\boldsymbol{i}})=(a_0b_0-\vec{a}\cdot\vec{b})+(a_0\vec{b}+b_0\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\boldsymbol{i}}$$

四元数的乘法，交换律不成立，但满足结合律，

$$(ab)c=a(bc)$$

复共轭满足

$$(ab)^*=(a_0b_0-\vec{a}\cdot\vec{b})-(a_0\vec{b}+b_0\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\boldsymbol{i}}=b^*a^*$$

四元数的**模长**定义为

$$|a| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^*a}=\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

$$|ab|=\sqrt{(ab)^*(ab)}=\sqrt{b^*a^*ab}=\sqrt{(a^*a)b^*b}=|a||b|$$

四元数的**逆**为

$$a^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a^*}{|a|^2}$$

满足

$$a^{-1}a=aa^{-1}=1$$

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

如果利用单位模长的四元数q，对三维空间的矢量相似变换，

$$\tilde{r} \stackrel{\text{def}}{=} x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2 + z\boldsymbol{i}_3$$

$$\tilde{r} \to \widetilde{r'} = q\tilde{r}q^{-1}$$

$$qq^* = 1 \Longrightarrow q^{-1} = q^*$$

这是线性变换，并且

$$\operatorname{Re}\widetilde{r'} = \operatorname{Re} q\tilde{r}q^{-1} = \frac{1}{2}q\tilde{r}q^{-1} + \frac{1}{2}(q\tilde{r}q^{-1})^* = \frac{1}{2}q\tilde{r}q^{-1} - \frac{1}{2}q\tilde{r}q^{-1} = 0$$

$$\left|\widetilde{r'}\right| = |q\tilde{r}q^{-1}| = |\tilde{r}|$$

模长不变，因此是正交变换，

$$q(\vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}})q^{-1} = (R\vec{r})\cdot\vec{\boldsymbol{i}}$$

参数化幺模四元数，得此线性变换的表达式：

$$\left.\begin{aligned} q(\vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}})q^{-1} \equiv \exp\left(\frac{1}{2}\vec{\psi}\cdot\vec{\boldsymbol{i}}\right)(\vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}})\exp\left(-\frac{1}{2}\vec{\psi}\cdot\vec{\boldsymbol{i}}\right) \\ e^A B e^{-B} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \cdots \end{aligned}\right\} \Longrightarrow q(\vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}})q^{-1} = \vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}} + \left[\frac{1}{2}\vec{\psi}\cdot\vec{\boldsymbol{i}},\vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}}\right] + \cdots \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \Longrightarrow q(\vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}})q^{-1} = \vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}} + 2\psi_j r_k\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{i}_j,\frac{1}{2}\boldsymbol{i}_k\right] + \cdots \\ \left[\frac{\boldsymbol{i}_j}{2},\frac{\boldsymbol{i}_k}{2}\right] = \varepsilon_{jkl}\frac{\boldsymbol{i}_l}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow q(\vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}})q^{-1} = \vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}} + \psi_j r_k \varepsilon_{jkl}\boldsymbol{i}_l + \cdots \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow q(\vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}})q^{-1} = r_l\boldsymbol{i}_l - \psi_j\left(X_j\right)_{kl} r_k\boldsymbol{i}_l + \cdots = \left[\exp\left(\vec{\psi}\cdot\vec{X}\right)\vec{r}\right]\cdot\vec{\boldsymbol{i}}$$

$$q\left(\vec{\psi}\right)(\vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}})q^{-1}\left(\vec{\psi}\right) = \left(R\left(\vec{\psi}\right)\vec{r}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{i}}$$

或者写成

$$R(q) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

单位四元数与 DCM 存在二对一的对应。

如果作两次变换，则有

$$\begin{aligned} &(q_1q_2)(\vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}})(q_1q_2)^{-1} = (R(q_1q_2)\vec{r})\cdot\vec{\boldsymbol{i}} \\ &= q_1q_2(\vec{r}\cdot\vec{\boldsymbol{i}})q_2^{-1}q_1^{-1} = (R(q_1)R(q_2)\vec{r})\cdot\vec{\boldsymbol{i}} \\ &\Longrightarrow R(q_1q_2) = R(q_1)R(q_2) \end{aligned}$$

幺模四元数的乘法与转动矩阵的乘法规则相同（同态），所以我们可以用幺模四元数来表示三维空间的转动。

实四元数代表三维空间转动有关，而复四元数则表示四维时空的洛伦兹变换。

(2) 四元数表示的优点

①线性，计算量小；

②易规整，可以在每次做完乘法之后，把所得的四元数模长归一，从而抑制计算中舍入误差的积累，而 DCM 计算中必须使用 SVD 规整；

③计算时无死锁。

因此在物理、计算机动画和工程控制中得到广泛应用。

三、 刚体运动的角速度

1. 角速度

我们来考虑瞬时转动。在$t \to t + dt$时，

$$R(t)\vec{r}_P(0) \to R(t+dt)\vec{r}_P(0) \equiv R(d\vec{\varphi})\{R(t)\vec{r}_P(0)\}$$

$$R(t+dt) = R(d\vec{\varphi})R(t)$$

$$R(d\vec{\varphi}) = R(t+dt)R^{-1}(t)$$

展开并保留到一阶无穷小量，

$$\mathbf{1} + \vec{X} \cdot d\vec{\varphi} = R(t+dt)R^{-1}(t) = \left[R(t) + \dot{R}(t)dt\right]R^{-1}(t) = \mathbf{1} + \dot{R}(t)R^{-1}(t)dt$$

$$\vec{X} \cdot d\vec{\varphi} = \dot{R}(t)R^{-1}(t)dt$$

定义**角速度**为

$$\vec{\omega} \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{X} \cdot \vec{\omega}(t) = \dot{R}(t)R(t)^{-1} = \dot{R}(t)R^T(t)}$$

注意$\vec{\omega} \neq d\vec{\psi}/dt$，角速度不是角位移的变化率。

2. 角速度线性可加

由于无穷小转动的角位移线性可加，

$$\exp\{d\vec{\varphi}_1\cdot\vec{X}\}\exp\{d\vec{\varphi}_2\cdot\vec{X}\}=\exp\{(d\vec{\varphi}_1+d\vec{\varphi}_2)\cdot\vec{X}\}$$

角速度

$$\vec{\omega}_1=\frac{d\vec{\varphi}_1}{dt},\qquad \vec{\omega}_2=\frac{d\vec{\varphi}_2}{dt}$$

也是线性可加的。

3. 用四元数表示的角速度*

按角速度定义有

$$q(t+dt)=\exp\left\{\frac{1}{2}d\vec{\varphi}\cdot\vec{\imath}\right\}q(t)$$

$$\Rightarrow \dot{q}=\frac{1}{2}(\vec{\omega}\cdot\vec{\imath})q\Rightarrow\vec{\omega}\cdot\vec{\imath}=2\dot{q}q^*$$

$$\Rightarrow\vec{\omega}'\cdot\vec{\imath}=2q^*\dot{q}$$

在定位导航应用中，利用传感器获得随体坐标系的角速度$\tilde{\omega}'(t)=\vec{\omega}'\cdot\vec{\imath}$，然后由（也称为欧拉运动学方程）

$$\dot{q}=\frac{1}{2}q\tilde{\omega}'$$

可解出车辆、飞行器等运动物体的姿态四元数$q(t)$。

4. 用角位移参数表示的角速度

如果用角位移参数表示转动，则

$$R(t)=e^{\vec{\psi}(t)\cdot\vec{X}}$$

$$\vec{X}\cdot\vec{\omega}(t)=\dot{R}R^T\xRightarrow{\text{transpose}}\boxed{-\vec{X}\cdot\vec{\omega}=R\dot{R}^T}$$

利用矩阵指数求导公式

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^A=e^A\left(\frac{\mathbf{1}-e^{-\mathrm{ad}_A}}{\mathrm{ad}_A}\right)\dot{A}}$$

$$\mathrm{ad}_A\circ B\overset{\text{def}}{=}[A,B]$$

计算得

$$\mathrm{ad}_{\vec{a}\cdot\vec{X}}\vec{b}\cdot\vec{X}=[\vec{a}\cdot\vec{X},\quad\vec{b}\cdot\vec{X}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{X}=\{(\vec{a}\cdot\vec{X})\vec{b}\}\cdot\vec{X}=-\vec{a}\vec{b}^T+\vec{b}\vec{a}^T$$

$$\vec{X}\cdot\vec{\omega}=-R\dot{R}^T=-\left(\frac{\mathbf{1}-e^{\mathrm{ad}_{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}}{\mathrm{ad}_{-\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}\right)\left(-\dot{\vec{\psi}}\cdot\vec{X}\right)=\left(\frac{e^{\mathrm{ad}_{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}-\mathbf{1}}{\mathrm{ad}_{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}\right)\dot{\vec{\psi}}\cdot\vec{X}$$
$$=\left(\frac{e^{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}-\mathbf{1}}{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}\dot{\vec{\psi}}\right)\cdot\vec{X}$$

所以在惯性系的角速度分量为

$$\vec{\omega}=\frac{e^{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}-\mathbf{1}}{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}\dot{\vec{\psi}}$$

$$\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix}=\dot{\vec{\psi}}+\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}\left(\vec{\psi}\times\dot{\vec{\psi}}\right)+\frac{\psi-\sin\psi}{\psi^3}\left\{\vec{\psi}\times\left(\vec{\psi}\times\dot{\vec{\psi}}\right)\right\}$$

在随体系$\vec{X}\cdot\vec{\omega}'=-\dot{R}^TR$；只需$R\to R^T\Leftrightarrow\vec{\psi}\to-\vec{\psi}$，且乘以$(-1)$，

$$\vec{\omega}'=\frac{\mathbf{1}-e^{-\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}\dot{\vec{\psi}}$$

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix}=\dot{\vec{\psi}}-\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}\left(\vec{\psi}\times\dot{\vec{\psi}}\right)+\frac{\psi-\sin\psi}{\psi^3}\left\{\vec{\psi}\times\left(\vec{\psi}\times\dot{\vec{\psi}}\right)\right\}$$

5. BORTZ 方程*

在惯性导航系统（INS）中，传感器测的是随体系中的角速度和加速度分量。

为求解位姿，反解得

$$\dot{\vec{\psi}}=\frac{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}{\mathbf{1}-e^{-\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}\vec{\omega}'$$

$$\frac{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}{\mathbf{1}-e^{-\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}=\mathbf{1}+\frac{1}{2}\vec{\psi}\cdot\vec{X}+\frac{2\sin\psi-\psi(1+\cos\psi)}{2\psi^2\sin\psi}\left(\vec{\psi}\cdot\vec{X}\right)^2$$

有 Bortz 方程（发表于 1971 年，NASA，军用高精度定位，解决了“划桨现象”、“圆锥误差”），

$$\dot{\vec{\psi}}=\vec{\omega}'+\frac{1}{2}\vec{\psi}\times\vec{\omega}'+\frac{2\sin\psi-\psi(1+\cos\psi)}{2\psi^2\sin\psi}\vec{\psi}\times(\vec{\psi}\times\vec{\omega}')$$

可积分求解刚体姿态。

小角度时可略去高阶项，

$$\frac{2\sin\psi-\psi(1+\cos\psi)}{2\psi^2\sin\psi}=\frac{1}{12}+\frac{\psi^2}{720}+\cdots$$

$$\dot{\vec{\psi}}\approx\vec{\omega}'+\frac{1}{2}\vec{\psi}\times\vec{\omega}'+\frac{1}{12}\vec{\psi}\times(\vec{\psi}\times\vec{\omega}')$$

6. 欧拉运动学方程

使用欧拉角作为广义坐标时，角速度在惯性系的分量为

$$\vec{\omega}\cdot\vec{X} = \dot{R}R^T$$
$$= \dot{R}_z(\phi)R_z^T(\phi) + R_z(\phi)\dot{R}_x(\theta)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi) + R_z(\phi)R_x(\theta)\dot{R}_z(\psi)R_z^T(\psi)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi)$$

逐项计算，

$$\dot{R}_z(\phi)R_z^T(\phi) = \dot{\phi}X_3 = \dot{\phi}\vec{e}_z\cdot\vec{X}$$

$$\dot{R}_x(\theta)R_x^T(\theta) = \dot{\theta}\vec{e}_x\cdot\vec{X} \Rightarrow R_z(\phi)\dot{R}_x(\theta)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi) = \dot{\theta}\vec{e}_{x'}\cdot\vec{X}$$

$$R_z(\phi)R_x(\theta)\dot{R}_z(\psi)R_z^T(\psi)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi) = \dot{\psi}\vec{e}_{z''}\cdot\vec{X}$$

于是

$$\vec{\omega}\cdot\vec{X} = \dot{\phi}\vec{e}_z\cdot\vec{X} + \dot{\theta}\vec{e}_{x'}\cdot\vec{X} + \dot{\psi}\vec{e}_{z''}\cdot\vec{X}$$

$$\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} = \dot{\phi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_{x'} + \dot{\psi}\vec{e}_{z''} = \dot{\phi}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \dot{\theta}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 0\end{pmatrix} + \dot{\psi}\begin{pmatrix}\sin\phi\sin\theta\\ -\cos\phi\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0 & \cos\phi & \sin\phi\sin\theta\\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi\sin\theta\\ 1 & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\omega_x = \cos\phi\,\dot{\theta} + \sin\phi\sin\theta\,\dot{\psi}\\ \omega_y = \sin\phi\,\dot{\theta} - \cos\phi\sin\theta\,\dot{\psi}\\ \omega_z = \dot{\phi} + \cos\theta\,\dot{\psi}\end{cases}$$

角速度在随体坐标系中的分量满足

$$\vec{\omega}'\cdot\vec{X} = R^{-1}\{\dot{R}R^{-1}\}R = R^{-1}\dot{R} = R^T\dot{R}$$

对比惯性系的表达式

$$\vec{\omega}\cdot\vec{X} = \dot{R}R^T = -R\dot{R}^T$$

可见只需把前面结果中$R \to R^{-1} \Leftrightarrow \phi \to -\psi, \theta \to -\theta, \psi \to -\psi$，最后再乘以$(-1)$，

$$\boxed{\begin{cases}\omega_1 = \sin\theta\sin\psi\,\dot{\phi} + \cos\psi\,\dot{\theta}\\ \omega_2 = \sin\theta\cos\psi\,\dot{\phi} - \sin\psi\,\dot{\theta}\\ \omega_3 = \cos\theta\,\dot{\phi} + \dot{\psi}\end{cases}}$$

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\sin\psi & \cos\psi & 0\\ \sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \cos\theta & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}$$

上式即刚体的 Euler 运动学方程。

反解随体系的 Euler 运动学方程，得

$$
\begin{pmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sin\psi}{\sin\theta} & \dfrac{\cos\psi}{\sin\theta} & 0\\ \cos\psi & -\sin\psi & 0\\ -\dfrac{\cos\theta\sin\psi}{\sin\theta} & -\dfrac{\cos\theta\cos\psi}{\sin\theta} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}
$$

此式可用于定位导航，但在$\theta\approx 0$时失效。

作业：p215 4.3, 4.5

7. 刚体上任意点的速度

刚体上任一固定点的位移

$$
\vec{r}_P(t)=\vec{r}_{CP}(t)+\vec{r}_C(t)=R(t)\vec{r}_{CP}(0)+\vec{r}_C(t)
$$

对时间求导，

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}_P(t)=\dot{R}(t)\vec{r}_{CP}(0)+\vec{v}_C(t)\\
&=\dot{R}(t)R^{-1}(t)R(t)\vec{r}_{CP}(0)+\vec{v}_C(t)=\left(\vec{\omega}(t)\cdot\vec{X}\right)\vec{r}_{CP}(t)+\vec{v}_C(t)\\
&=\vec{\omega}(t)\times\vec{r}_{CP}(t)+\vec{v}_C(t)
\end{aligned}
$$

推论 刚体的角速度与基点的选择无关。

选取不同基点时，转动矩阵$R(t)$是相同的，因而$\vec{\omega}\cdot\vec{X}=\dot{R}(t)R(t)^{-1}$给出相同的角速度。

8. 瞬轴和瞬心

推论 任一时刻刚体的一般运动状态，可分为 3 类：

（1）平动；（2）转动（有**瞬轴**）；（3）螺旋运动。

证明 $\vec{\omega}(t)=\vec{0}$为平动。

当$\vec{\omega}(t)\neq\vec{0}$时，

$$
\vec{v}_A=\vec{\omega}(t)\times\vec{r}_{CA}(t)+\vec{v}_C(t)
$$

由于 A 点可自由选择，$\vec{r}_{CA}(t)$可取任意值。通过选择基点，第一项$\vec{\omega}(t)\times\vec{r}_{CA}(t)$可以凑成任意垂直于$\vec{\omega}(t)$的矢量。于是选择 A 点，以抵消$\vec{v}_C(t)$项，使$\vec{v}_A$垂直$\vec{\omega}(t)$方向的分量为零，这时

（1）若$v_A=0$，则刚体有**瞬时转动轴**$\vec{r}_A+\lambda\vec{\omega}$，轴上点的速度为

$$
\vec{v}_P(t)=\vec{\omega}(t)\times\vec{r}_{AP}(t)+\vec{0}=\vec{\omega}\times(\vec{r}_A+\lambda\vec{\omega}-\vec{r}_A)=\vec{0}
$$

这一时刻刚体绕瞬轴作纯转动；

（2）若$v_A \neq 0$，则刚体作螺旋运动，即绕螺旋轴$\vec{r}_A + \lambda\vec{\omega}$转动的同时，还沿螺旋轴方向以速度$v_A$平动。

平面平行运动则较为简单：

补充作业：证明对刚体的平面平行运动，角速度非零时，必存在唯一的瞬心。

瞬心在随体坐标系划过的轨迹，称为**本体极迹**，在惯性坐标系的轨迹称为**空间极迹**。

例 平面平行运动，瞬时转动中心 铁轨

作业：p215, 4.1, 4.2, 4.6

9. 角加速度

在惯性系中，角加速度定义为

$$\vec{\varepsilon}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

推论 角加速度矢量可加。

刚体上任一固定点的加速度为

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}\{\vec{\omega}(t)\times\vec{r}_{CP}(t)+\vec{v}_C(t)\}\\ &= \vec{\varepsilon}(t)\times\vec{r}_{CP}(t)+\vec{\omega}(t)\times\left(\dot{R}(t)\vec{r}_{CP}(0)\right)+\vec{a}_C(t)\\ &= \vec{\varepsilon}(t)\times\vec{r}_{CP}(t)+\vec{\omega}(t)\times\left(\vec{\omega}(t)\times\vec{r}_{CP}(t)\right)+\vec{a}_C(t)\end{aligned}$$

3 项分别为**转动牵连加速度**、**向轴牵连加速度**和**平动牵连加速度**。

四、 定点转动

1. 转动惯量张量

转动动能为

$$T=\sum_P \frac{1}{2}m_P\dot{\vec{r}}_P^2=\sum_P \frac{1}{2}m_P[\vec{\omega}(t)\times\vec{r}_{CP}(t)+\vec{v}_C(t)]^2$$

$$= \sum_P \frac{1}{2} m_P [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CP}(t)]^2 = \frac{1}{2} \sum_P m_P [\vec{r}_{CP}^2 \vec{\omega}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{CP})^2]$$

定义转动惯量张量

$$I = \sum_P m_P (\vec{r}_{CP}^2 \mathbf{1} - \vec{r}_{CP} \vec{r}_{CP}^T)$$

则

$$T = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$$

对连续的质量分布，转动惯量张量为

$$I_{jk} = \iiint \rho(x, y, z) \left(r^2 \delta_{jk} - r_j r_k \right) dxdydz$$

推论 转动惯量张量对称、正定（除了质量分布在一条直线的情形）。

平行轴定理：$\overleftrightarrow{I} = \overleftrightarrow{I}_C + M\left(\vec{r}_C^2 \overleftrightarrow{\mathbf{1}} - \vec{r}_C \vec{r}_C^T\right)$

证明留作**练习**。

相对于参考点的角动量为

$$\vec{J} = \sum_P \vec{r}_{CP} \times m_P \dot{\vec{r}}_{CP} = \sum_P \vec{r}_{CP} \times m_P (\vec{\omega} \times \vec{r}_{CP})$$

$$J_i = \sum_P \varepsilon_{ijk} r_{CP,j} m_P \varepsilon_{kab} \omega_a r_{CP,b} = \sum_P r_{CP,j} m_P \omega_a r_{CP,b} \left(\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja} \right)$$
$$= \sum_P m_P \omega_a \left(\delta_{ia} \vec{r}_{CP}^2 - r_{CP,i} r_{CP,a} \right) = I_{ia} \omega_a$$

$$J_j = I_{jk} \omega_k$$

一般不与角速度平行。

动量和动能可以在随体坐标系中计算，也可以在惯性系计算。在惯性系中计算时，由于刚体在运动，因而质量的空间分布$\rho(x, y, z)$随时间变化，I_{jk}随之而变；**在随体系中计算时，$\boldsymbol{I_{jk}}$是常数。**

2. 惯量张量的主轴

按谱定理，正定的实对称矩阵，可以利用实正交矩阵对角化。设

$$I\vec{a} = \lambda \vec{a}$$

特征值称为**主转动惯量**，特征矢称为**主轴**；三个主轴相互正交（Sylvester 惯性定理）。

随体坐标系可以选取主轴为坐标轴，即**主轴坐标系**，这时转动惯量为对角阵，

$$I = \mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_3\}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_j I_j \omega_j^2, \qquad J_i = I_i\omega_i(\text{指标}i\text{不求和})$$

作业：p216, 4.10, 4.13, 4.14

3. 惯量椭球

考虑定轴转动的动能，

$$T = \frac{1}{2} I_n \omega^2$$

与一般情形的转动动能比较得

$$T = \frac{1}{2} I_{jk}\omega_j\omega_k = \frac{1}{2} I_n \omega^2 \Longrightarrow I_n = I_{jk} n_j n_k$$

引进

$$\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{n}}{\sqrt{I_n}}$$

$$\begin{aligned} &I_n = I_{jk} n_j n_k \\ &\Leftrightarrow 1 = I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{12}xy + 2I_{13}xz + 2I_{23}yz \end{aligned}$$

这个方程决定的曲面称为惯量椭球。

惯量椭球的物理意义：原点到椭球面上的距离为$\rho = \frac{1}{\sqrt{I_n}}$

回转半径：$mk^2 = I_n \Rightarrow k = \sqrt{I_n/m}$

作业：p216,4.15

4. 定点转动的动力学方程

作用量为

$$\mathrm{S}[\vec{\psi}] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{1}{2} I_{jk}\omega_j\omega_k - V[t, \vec{r}_{CP}(t)]\right\} dt$$

计算变分，

$$\vec{X}\cdot\vec{\omega}=\dot{R}R^T\Longrightarrow\vec{X}\cdot d\vec{\varphi}=(dR)R^T\Longrightarrow\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi}=(\delta R)R^T$$

$$\Longrightarrow\delta R=\left(\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi}\right)R$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}I_{jk}\omega_j\omega_k\right)=\frac{1}{2}\delta(\vec{\omega}^TI\vec{\omega})=\vec{J}\cdot\delta\vec{\omega}+\vec{\omega}^T(\delta I)\vec{\omega}$$

上式中第二项为

$$\begin{aligned}
&\vec{\omega}^T(\delta I)\vec{\omega}=\vec{\omega}^T\left\{\sum_P m_P[\delta(\vec{r}_{CP}^2)\mathbf{1}-\delta\vec{r}_{CP}\vec{r}_{CP}^T-\vec{r}_{CP}\delta\vec{r}_{CP}^T]\right\}\vec{\omega}\\
&=\vec{\omega}^T\left\{\sum_P m_P[0\cdot\mathbf{1}-\delta R\vec{r}_{CP}(0)\vec{r}_{CP}^T-\vec{r}_{CP}\vec{r}_{CP}^T(0)\delta R^T]\right\}\vec{\omega}\\
&=-\vec{\omega}^T\left\{\sum_P m_P[\delta R\vec{r}_{CP}(0)\vec{r}_{CP}^T+\vec{r}_{CP}\vec{r}_{CP}^T(0)\delta R^T]\right\}\vec{\omega}\\
&=-\vec{\omega}^T\left\{\sum_P m_P\left[\left(\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi}\right)R\vec{r}_{CP}(0)\vec{r}_{CP}^T+\vec{r}_{CP}\vec{r}_{CP}^T(0)R^T\left(\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi}\right)^T\right]\right\}\vec{\omega}\\
&=-\vec{\omega}^T\left\{\sum_P m_P\left[\left(\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi}\right)\vec{r}_{CP}\vec{r}_{CP}^T+\vec{r}_{CP}\vec{r}_{CP}^T\left(\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi}\right)^T\right]\right\}\vec{\omega}\\
&=0\text{（对第二项转置）}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\{\vec{J}\cdot\delta\vec{\omega}-\delta V[t,\vec{r}_{CP}]\}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\vec{J}\cdot\delta\dot{\vec{\varphi}}-\sum_P\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_{CP}}\cdot\delta\vec{r}_{CP}\right\}dt\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\vec{J}\cdot\delta\dot{\vec{\varphi}}-\sum_P\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_{CP}}\delta R\vec{r}_{CP}(0)\right\}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\vec{J}\cdot\delta\dot{\vec{\varphi}}-\sum_P\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_{CP}}\cdot\left(\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi}\right)R\vec{r}_{CP}(0)\right\}dt\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\vec{J}\cdot\delta\dot{\vec{\varphi}}-\sum_P\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_{CP}}\cdot\left(\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi}\right)\vec{r}_{CP}\right\}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\vec{J}\cdot\delta\dot{\vec{\varphi}}+\sum_P\vec{F}_{CP}\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_{CP})\right\}dt\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\vec{J}\cdot\delta\dot{\vec{\varphi}}+\delta\vec{\varphi}\cdot\sum_P\left(\vec{r}_{CP}\times\vec{F}_{CP}\right)\right\}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\{-\dot{\vec{J}}+\vec{M}\right\}\cdot\delta\vec{\varphi}dt
\end{aligned}$$

另外

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt}=\vec{\omega}=\frac{e^{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}-\mathbf{1}}{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}\dot{\vec{\psi}}\Longrightarrow\delta\vec{\varphi}=\frac{e^{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}-\mathbf{1}}{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}\delta\vec{\psi}$$

$\delta\vec{\varphi}$是独立的变分，因此哈密顿原理给出的运动方程是

$$\frac{d\vec{J}}{dt}=\vec{M}$$

即角动量定理。

5. EULER 动力学方程

运动方程$\dot{\vec{J}}=\vec{M}$中的矢量，是惯性系的分量。

但是在惯性系，$J_i=I_{ij}\omega_j$，而I_{ij}是随时间变化的，把方程中的矢量、张量改写成随体系中的分量，会比较简洁，为此在两边同乘以R^{-1}，

$$R^{-1}\vec{M}=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\\M_3\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{c}R^{-1}\dfrac{d\vec{J}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(R^{-1}\vec{J}\right)-\dot{R}^T\vec{J}=\dfrac{d}{dt}\left(R^{-1}\vec{J}\right)-\left(\dot{R}^TR\right)\left(R^{-1}\vec{J}\right)\\ R^{-1}R=\mathbf{1}\Rightarrow R^{-1}\dot{R}+\dot{R}^TR=0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow R^{-1}\frac{d\vec{J}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(R^{-1}\vec{J}\right)+\left(R^{-1}\dot{R}\right)\left(R^{-1}\vec{J}\right)\sim\frac{d}{dt}J_a+\left(\omega_bX_b\right)_{ac}J_c$$

$$\dot{J}_a+\varepsilon_{abc}\omega_bJ_c=I_{ab}\dot{\omega}_b+\varepsilon_{abc}\omega_bI_{cd}\omega_d=M_a$$

在随体系（by Lagrange）有

$$\frac{d\vec{J}'}{dt}+\vec{\omega}'\times\vec{J}'=\vec{M}'$$

在主轴坐标系，$J_i=I_i\omega_i$（i不求和），得 Euler 动力学方程，

$$\boxed{\begin{cases}I_1\dot{\omega}_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3=M_1\\I_2\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=M_2\\I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=M_3\end{cases}}$$

无外力时，Euler 动力学方程只涉及角速度，不涉及欧拉角——可以先解出角速度，然后代入运动学方程解出刚体的姿态。

6. 相对微商

前面的推导过程，对于任何矢量都适用，即任意矢量物理量$\vec{A}$在惯性系的变化率

$$\vec{B}=\frac{d\vec{A}}{dt}$$

在随体系（相对微商）的分量满足

$$\vec{B}'=\frac{d\vec{A}'}{dt}+\vec{\omega}'\times\vec{A}'$$

7. 运动参考系中质点的位移、速度和加速度

考虑在运动参考系中运动的质点，质点在刚体上，并相对于刚体运动。

参考点位移记为$\vec{r}_C(t)$，则质点P的位移为

$$\vec{r}_P(t)=\vec{r}_C(t)+\vec{r}_{CP}(t)$$

其速度为

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \frac{d}{dt}\vec{r}_{CP}$$

$$\vec{v}_P - \vec{v}_C = \frac{d}{dt}\vec{r}_{CP}$$

利用相对微商，

$$\vec{v}'_P - \vec{v}'_C = \frac{d}{dt}\vec{r}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP} = \vec{v}'_C + \vec{v}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}$$

于是P点对惯性系的速度这一物理量，在随体系的分量为

$$\vec{v}'_P = \vec{v}'_C + \frac{d}{dt}\vec{r}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP} = \vec{v}'_C + \vec{v}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}$$

式子两边同乘以$R(t)$，变换为惯性系的分量，

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{v}_{CP} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CP}$$

需注意其中相对速度的定义为

$$\vec{v}_{CP} = R\frac{d}{dt}\vec{r}'_{CP} \neq \frac{d}{dt}\vec{r}_{CP}$$

即随体系的观测量，在惯性系坐标轴上的投影（分量）。

推论 绝对速度 = 平动牵连速度 + 相对速度 + 转动牵连速度

对绝对速度公式再次求导，

$$\vec{v}_P - \vec{v}_C = \vec{v}_{CP} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CP}$$

$$\vec{a}_p - \vec{a}_C = \frac{d}{dt}(\vec{v}_P - \vec{v}_C) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{CP} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CP})$$

在随体系的分量满足

$$\begin{aligned}
\vec{a}'_P - \vec{a}'_C &= \frac{d}{dt}\vec{v}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{v}'_{CP} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}) + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}) \\
&= \vec{a}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{v}'_{CP} + \frac{d\vec{\omega}'}{dt} \times \vec{r}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \frac{d\vec{r}'_{CP}}{dt} + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}) \\
&= \vec{a}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{v}'_{CP} + \vec{\varepsilon}' \times \vec{r}'_{CP} + \vec{\omega}' \times \vec{v}'_{CP} + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}) \\
&= \vec{\varepsilon}' \times \vec{r}'_{CP} + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_{CP}) + \vec{a}'_{CP} + 2\vec{\omega}' \times \vec{v}'_{CP}
\end{aligned}$$

乘以$R(t)$，写成惯性系的分量，

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{CP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{CP}) + \vec{a}_{CP} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{CP}$$

需要注意这里相对加速度的定义为：

$$\vec{a}_{CP} \stackrel{\text{def}}{=} R\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}'_{CP} \neq \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_{CP}$$

推论

$$\text{绝对加速度} = \text{平动牵连加速度} + \text{转动牵连加速度} + \text{向轴}(\text{牵连})\text{加速度} + \text{相对加速度} + \text{Coriolis 加速度}$$

MEMS 微机电系统，陀螺仪，利用 Coriolis 加速度测角速度。

五、 EULER 陀螺

不受外力矩，并且作定点转动的刚体，称为**自由刚体**或**欧拉陀螺**。

1. 动力学方程

$$\dot{J}_a + \varepsilon_{abc}\omega_b J_c = 0$$

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{cases}$$

补充作业 采用欧拉角参数，写出自由刚体的拉氏量、哈密顿量、正则方程。

补充作业（选做） 采用角位移参数，写出自由刚体的拉氏量、哈密顿量、正则方程。

补充作业（选做*） 采用四元数参数，写出自由刚体的拉氏量、哈密顿量、正则方程。

2. 首次积分

转动动能守恒：拉氏量不含时。

角动量守恒：拉氏量转动对称，惯性系中角动量矢量守恒；或者在随体系，$\vec{J}^2 =$ 常数（转动不改变矢量模长）。

习题（选做）：对自由刚体，转动是对称变换，求诺特守恒量。

3. 求解

利用首次积分消去ω_1, ω_2，

$$\begin{cases} I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = J^2 \\ \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = T \end{cases}$$

解出

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{(I_2 - I_3)I_3\omega_3^2 - 2I_2T + J^2}{(I_1 - I_2)I_1} \\ \omega_2^2 = \frac{(I_1 - I_3)I_3\omega_3^2 - 2I_1T + J^2}{(I_2 - I_1)I_2} \end{cases}$$

代入第三个 Euler 动力学方程

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_1\omega_2$$

积分即可解出$\omega_3(t)$（椭圆积分），是t的周期函数[2]。把结果再代入 Euler 运动学方程可求得角位移或欧拉角。

作业 p217 4.20

4. 稳定解和陀螺仪

设$I_1 < I_2 < I_3$，对 Euler 动力学方程的分析表明，沿着I_1, I_3方向的的转动是稳定的，沿I_2方向的转动是不稳定的。（网球拍定理）

无外力矩作用的刚体，欧拉动力学方程为

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{aligned}$$

- 如果初始时刻刚体沿2轴转动，$\omega_1, \omega_3 \sim 0$，$\omega_2 \gg \omega_1, \omega_3$，则

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\{\dot{\omega}_2\omega_3 + \omega_2\dot{\omega}_3\} &= (I_2 - I_3)\left\{\frac{(I_3 - I_1)}{I_2}\omega_3\omega_1\omega_3 + \omega_2\frac{(I_1 - I_2)}{I_3}\omega_1\omega_2\right\} \\ &= (I_2 - I_3)\left\{\frac{(I_3 - I_1)}{I_2}\omega_3^2 + \frac{(I_1 - I_2)}{I_3}\omega_2^2\right\}\omega_1 \approx (I_2 - I_3)\frac{(I_1 - I_2)}{I_3}\omega_2^2\omega_1 \end{aligned}$$

$$\ddot{\omega}_1 = \text{正数} \times \omega_1$$

同样有

[2] 可参考 H.H 蒲赫哥尔兹，《理论力学基本教程（下）》，第 4 章第 7 节。

$$I_3\ddot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\{\dot{\omega}_1\omega_2 + \omega_1\dot{\omega}_2\} = (I_1 - I_2)\left\{\frac{(I_2 - I_3)}{I_1}\omega_2\omega_3\omega_2 + \omega_1\frac{(I_3 - I_1)}{I_2}\omega_3\omega_1\right\}$$
$$= (I_1 - I_2)\left\{\frac{(I_2 - I_3)}{I_1}\omega_2^2 + \frac{(I_3 - I_1)}{I_2}\omega_1^2\right\}\omega_3 \approx (I_1 - I_2)\frac{(I_2 - I_3)}{I_1}\omega_2^2\omega_3$$

$$\ddot{\omega}_3 = \text{正数} \times \omega_3$$

$\omega_1(t), \omega_3(t)$将指数增长，刚体角速度迅速偏离原本的方向。不稳定。

- 如果初始时刻刚体沿1轴转动，$\omega_2, \omega_3 \sim 0$，$\omega_1 \gg \omega_2, \omega_3$，则

$$I_2\ddot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\{\dot{\omega}_3\omega_1 + \omega_3\dot{\omega}_1\} = (I_3 - I_1)\left\{\frac{(I_1 - I_2)}{I_3}\omega_1\omega_2\omega_1 + \omega_3\frac{(I_2 - I_3)}{I_1}\omega_2\omega_3\right\}$$
$$= -\left\{\frac{I_1 - I_2}{I_3}(I_1 - I_3)\omega_1^2 + \frac{I_2 - I_3}{I_1}(I_1 - I_3)\omega_3^2\right\}\omega_2 \approx -\frac{I_1 - I_2}{I_3}(I_1 - I_3)\omega_1^2\omega_2$$

$$\ddot{\omega}_2 = \text{负数} \times \omega_2$$

同样

$$I_3\ddot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\left\{\frac{(I_2 - I_3)}{I_1}\omega_2^2 + \frac{(I_3 - I_1)}{I_2}\omega_1^2\right\}\omega_3 \approx (I_1 - I_2)\frac{(I_3 - I_1)}{I_2}\omega_1^2\omega_3$$

$$\ddot{\omega}_3 = \text{负数} \times \omega_3$$

$\omega_1(t), \omega_3(t)$将类似三角函数震荡，刚体角速度方向基本保持不变。稳定。

李雅普诺夫稳定性：Lyapunov stability

如果一个动力系统，初始时在平衡态附近的任何一个状态，之后均能维持在平衡态附近，那么称此平衡态李雅普诺夫稳定。

- 如果初始时刻刚体沿3轴转动，$\omega_1, \omega_2 \sim 0$，$\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$，则

$$I_1\ddot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\left\{\frac{I_3 - I_1}{I_2}\omega_3^2 + \frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_2^2\right\}\omega_1 \approx (I_2 - I_3)\frac{I_3 - I_1}{I_2}\omega_3^2\omega_1$$

$$I_2\ddot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\left\{\frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_1^2 + \frac{I_2 - I_3}{I_1}\omega_3^2\right\}\omega_2 \approx \frac{I_2 - I_3}{I_1}(I_3 - I_1)\omega_3^2\omega_2$$

$$\ddot{\omega}_1 = \text{负数} \times \omega_1, \qquad \ddot{\omega}_2 = \text{负数} \times \omega_2$$

$\omega_1(t), \omega_2(t)$将按三角函数震荡，刚体角速度方向基本保持不变。稳定。

类似可证，对称陀螺$I_1 = I_2 \neq I_3$，若开始时沿 1 轴旋转，

$$I_2\ddot{\omega}_2 = -\left\{\frac{I_1 - I_2}{I_3}(I_1 - I_3)\omega_1^2 + \frac{I_2 - I_3}{I_1}(I_1 - I_3)\omega_3^2\right\}\omega_2 = -\frac{I_2 - I_3}{I_1}(I_1 - I_3)\omega_3^2\omega_2 \approx 0$$

$$\omega_2(t) \approx \varepsilon_2 t$$

不稳定；只有沿第三轴的运动是稳定的。

若惯量椭球是球形，$I_1 = I_2 = I_3$，则沿任意方向的转动都是不稳定的。

5. POINSOT 对欧拉陀螺的几何描述

图像直观：惯量椭球是本体极面，空间极面是一个不动的平面（垂直于角动量）

设 P 点为惯量椭球与瞬时转动轴的交点，

$$\vec{r}_p = \frac{\vec{n}}{\sqrt{I}} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{I}\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}}$$

在主轴系满足方程

$$1 = I_1 x_p^2 + I_2 y_p^2 + I_3 z_p^2$$

P 点处切平面的方向为$(I_1 x_p \quad I_2 y_p \quad I_3 z_p)$，切平面方程为

$$(I_1 x_p \quad I_2 y_p \quad I_3 z_p) \cdot \vec{r} = c$$

又 P 点在切平面中，且满足

$$(I_1 x_p \quad I_2 y_p \quad I_3 z_p) \cdot \vec{r}_p = 1 \Rightarrow c = 1$$

得切平面在主轴系中的方程为

$$(I_1 x_p \quad I_2 y_p \quad I_3 z_p) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

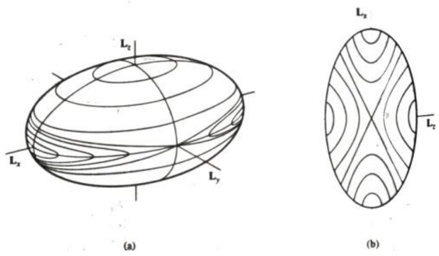
i. 切平面法向沿角动量$\vec{J}$：
在本体坐标系，$J_i = I_i \omega_i = \sqrt{2T} I_i r_{pi} \propto I_i r_{pi} = (I_1 x_p \quad I_2 y_p \quad I_3 z_p)$（重复指标不求和），平行于切向量。
在惯性系$\vec{J}$是常数，这说明切平面在惯性系的方向是不随时间改变的。
ii. 切平面到 O 点（基点）的距离（截距）不变：
$$\overrightarrow{OP} \cdot \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} = \vec{r}_p \cdot \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}} \cdot \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} = \frac{2T}{\sqrt{2T}|\vec{J}|} = \frac{\sqrt{2T}}{|\vec{J}|} = \text{常数}$$

总之，**切平面在惯性系中静止不动，惯量椭球在不动平面上作无滑动滚动**。

6. 角速度在惯量椭球上的轨迹

Goldstein 3ed., p204

在主轴坐标系，转动能守恒



$$I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2=2T$$

而惯量椭球方程为

$$I_1x^2+I_2y^2+I_3z^2=1\ (*)$$

所以$\vec{r}=\frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}}$在惯量椭球上。

而本体坐标系的首次积分$\vec{J}^2=$常数，即

$$I_1^2\omega_1^2+I_2^2\omega_2^2+I_3^2\omega_3^2=J^2\Leftrightarrow I_1^2x^2+I_2^2y^2+I_3^2z^2=\frac{J^2}{2T}\ (**)$$

瞬轴的轨迹为两个椭球方程的交线。

7. 对称欧拉陀螺

（1） 求解动力学方程

如果陀螺是对称的，$I_1=I_2$，则在主轴系的动力学方程是

$$\begin{cases}0=I_1\dot{\omega}_1+(I_3-I_1)\omega_2\omega_3\\0=I_1\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1\\0=I_3\dot{\omega}_3\end{cases}$$

由第三个方程得

$$\omega_3=\text{常数}$$

记**进动角速度**为

$$\Omega\stackrel{\text{def}}{=}\frac{I_3-I_1}{I_1}\omega_3$$

动力学方程成为

$$\begin{cases}\dot{\omega}_1=-\Omega\omega_2\\\dot{\omega}_2=\Omega\omega_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{\omega}_1=-\Omega^2\omega_1\\\ddot{\omega}_2=-\Omega^2\omega_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_1=\omega_h\cos(\Omega t+\alpha)\\\omega_2=\omega_h\sin(\Omega t+\alpha)\end{cases}$$

这时角速度的大小

$$\omega=\sqrt{\omega_3^2+\omega_h^2}$$

是常数；角速度矢端在主轴系水平面中的投影（模长是ω_h），以圆频率Ω作圆周运动。

注意到惯性系中角动量守恒，取之为惯性系的z轴方向。这时在随体坐标系中的角动量分量为

$$
\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & -\cos\theta\cos\psi\sin\phi - \cos\phi\sin\psi & \sin\theta\sin\phi \\ \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \cos\theta\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & -\cos\phi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} J\sin\theta\sin\psi \\ J\sin\theta\cos\psi \\ J\cos\theta \end{pmatrix}
$$

于是

$$
0 = I_3\dot{\omega}_3 = \dot{J}_3 = J\frac{d}{dt}\cos\theta \Rightarrow \theta(t) = \theta_0
$$

即章动角不变，只有进动角和自转角在变化，称之为**规则进动**。

（2） 求解运动学方程

将

$$
\begin{cases} \omega_1 = \omega_h\cos(\Omega t + \alpha) \\ \omega_2 = \omega_h\sin(\Omega t + \alpha) \\ \omega_3 = \cos\theta_0\,\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}
$$

代入 Euler 运动学方程，

$$
\begin{cases} \omega_1 = \sin\theta\sin\psi\,\dot{\phi} + \cos\psi\,\dot{\theta} \\ \omega_2 = \sin\theta\cos\psi\,\dot{\phi} - \sin\psi\,\dot{\theta} \\ \omega_3 = \cos\theta\,\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} \omega_h\cos(\Omega t + \alpha) = \sin\theta_0\sin\psi\,\dot{\phi} \\ \omega_h\sin(\Omega t + \alpha) = \sin\theta_0\cos\psi\,\dot{\phi} \\ \omega_3 = \cos\theta_0\,\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}
$$

前两式相除得

$$
\psi(t) = \frac{\pi}{2} - (\Omega t + \alpha) \equiv -\Omega t + \psi_0, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} - \psi_0
$$

再代入第三式解出$\dot{\phi}$，对时间积分，

$$
\phi(t) = \frac{\omega_3 + \Omega}{\cos\theta_0}t + \phi_0
$$

到这里为止，解出的欧拉角表达式中独立积分常数为$\{\theta_0, \psi_0, \phi_0, \omega_3\}$。

（3） 积分常数之间的关系

把解代入角动量表达式，

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J\sin\theta\sin\psi \\ J\sin\theta\cos\psi \\ J\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J\sin\theta_0\sin(-\Omega t+\psi_0) \\ J\sin\theta_0\cos(-\Omega t+\psi_0) \\ J\cos\theta_0 \end{pmatrix}$$

而在主轴系，同时有

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_1\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_h\cos\left(\Omega t+\frac{\pi}{2}-\psi_0\right) \\ I_1\omega_h\sin\left(\Omega t+\frac{\pi}{2}-\psi_0\right) \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} J\sin\theta_0\sin(-\Omega t+\psi_0) \\ J\sin\theta_0\cos(-\Omega t+\psi_0) \\ J\cos\theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_h\cos\left(\Omega t+\frac{\pi}{2}-\psi_0\right) \\ I_1\omega_h\sin\left(\Omega t+\frac{\pi}{2}-\psi_0\right) \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

得关系式

$$\omega_h = \frac{J\sin\theta_0}{I_1}, \qquad \omega_3 = \frac{J\cos\theta_0}{I_3}$$

于是有

$$\omega = \sqrt{\omega_h^2+\omega_3^2} = J\left\{\left(\frac{\sin\theta_0}{I_1}\right)^2+\left(\frac{\cos\theta_0}{I_3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\Omega = \frac{I_3-I_1}{I_1}\omega_3 = \frac{I_3-I_1}{I_1I_3}J\cos\theta_0$$

$$\frac{\omega_3+\Omega}{\cos\theta_0} = \frac{1}{\cos\theta_0}\left\{\frac{J\cos\theta_0}{I_3}+\frac{I_3-I_1}{I_1I_3}J\cos\theta_0\right\} = J\left\{\frac{1}{I_3}+\frac{I_3-I_1}{I_1I_3}\right\} = \frac{J}{I_1}$$

可以在结果中只保留$\{\theta_0,\psi_0,\phi_0,J\}$这几个独立积分常数，

$$\begin{cases} \phi = \dfrac{J}{I_1}t+\phi_0 \\ \theta = \theta_0 \\ \psi = -\dfrac{(I_3-I_1)J\cos\theta_0}{I_1I_3}t+\psi_0 \end{cases}$$

（4） 在随体系观察

在主轴系，进动角速度为

$$\Omega = \frac{I_3-I_1}{I_1}\omega_3 = \frac{I_3-I_1}{I_1I_3}J\cos\theta_0$$

随体系的角速度、角动量分量，以及动能、转动惯量为

$$\begin{cases}\omega_1 = \dfrac{J\sin\theta_0}{I_1}\cos\left(\Omega t + \dfrac{\pi}{2} - \psi_0\right)\\ \omega_2 = \dfrac{J\sin\theta_0}{I_1}\sin\left(\Omega t + \dfrac{\pi}{2} - \psi_0\right)\\ \omega_3 = \dfrac{J\cos\theta_0}{I_3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}J_1 = J\sin\theta_0\cos\left(\Omega t + \dfrac{\pi}{2} - \psi_0\right)\\ J_2 = J\sin\theta_0\sin\left(\Omega t + \dfrac{\pi}{2} - \psi_0\right)\\ J_3 = J\cos\theta_0\end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_1\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \frac{J^2}{2}\left(\frac{\sin^2\theta_0}{I_1} + \frac{\cos^2\theta_0}{I_3}\right)$$

$$I = \frac{2T}{\omega^2} = I_1 I_3 \frac{I_3\sin^2\theta_0 + I_1\cos^2\theta_0}{I_3^2\sin^2\theta_0 + I_1^2\cos^2\theta_0} = I_1 I_3 \frac{I_1 + I_3 + (I_1 - I_3)\cos 2\theta_0}{I_1^2 + I_3^2 + (I_1^2 - I_3^2)\cos 2\theta_0}$$

（5） 在惯性系观察

在惯性系的角速度模长与随体系相同，分量为

$$\begin{cases}\omega_x = \cos\phi\,\dot\theta + \sin\phi\sin\theta\,\dot\psi\\ \omega_y = \sin\phi\,\dot\theta - \cos\phi\sin\theta\,\dot\psi\\ \omega_z = \dot\phi + \cos\theta\,\dot\psi\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\omega_x = \dfrac{I_3 - I_1}{2I_1 I_3}J\sin 2\theta_0\cos\left(\dfrac{J}{I_1}t + \phi_0 + \dfrac{\pi}{2}\right)\\ \omega_y = \dfrac{I_3 - I_1}{2I_1 I_3}J\sin 2\theta_0\sin\left(\dfrac{J}{I_1}t + \phi_0 + \dfrac{\pi}{2}\right)\\ \omega_z = \dfrac{(I_1 + I_3) + (I_1 - I_3)\cos 2\theta_0}{2I_1 I_3}J\end{cases}$$

惯性系的角动量为

$$\begin{cases}J_x = 0\\ J_y = 0\\ J_z = J\end{cases}$$

（6） 本体圆锥和空间圆锥

由于定义角动量方向为惯性系的z-轴，$J > 0$，角速度在惯性系与z-轴的夹角正切值为

$$\frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\omega_z} = \frac{(I_3 - I_1)\sin 2\theta_0}{(I_1 + I_3) + (I_1 - I_3)\cos 2\theta_0}$$

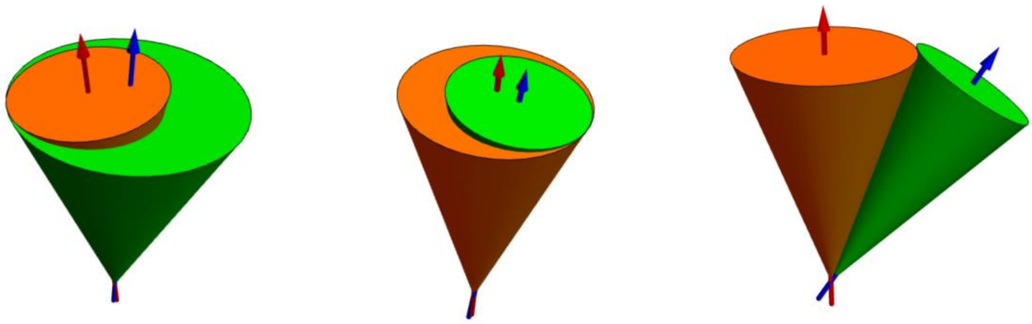
不变，瞬轴（见第（5）小节惯性系ϖ的表达式）和第 3 主轴（见第（5）小节ϕ的表达式）以**进动角速度J/I_1**绕z-轴逆时针旋转。瞬轴在空间扫过一个锥面（参看第二 3 节欧拉角定义的图），称为**空间锥面**。

在主轴系，角速度与3-轴的夹角正切值为

$$\frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega_3} = \frac{I_3}{I_1}\tan\theta_0$$

角速度绕3-轴以圆频率Ω旋转（见$\omega_1, \omega_2, \omega_3$的表达式），在主轴系扫过的轨迹称为**本体锥面**。角动量（即惯性系z-轴）与3-轴的夹角为θ_0，同样以圆频率Ω旋转（见J_1, J_2, J_3的表达式）。

定点转动的瞬轴上各点速度为零，所以本体锥面（下图，绿色）在空间锥面（橙色）上作**无滑滚动**。



红色箭头是角动量方向，蓝色箭头是第三主轴。

练习：

1. 本体锥面在空间锥面内部还是外部，两者的转动方向相同还是相反，各需满足什么条件？（提示：考虑第三主轴、角动量和角速度的关系）

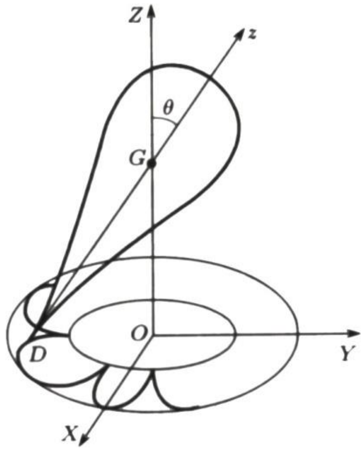
2. 不动平面距离固定点的距离是多少？惯量椭球在不动平面上滚动的轨迹是什么形状？

作业 p217 4.19

六、 LAGRANGE 陀螺

1. 对称重陀螺的拉氏量

对称重陀螺又称拉格朗日陀螺，作定点[3]转动，有重力作用；主轴惯量$I_1 = I_2$，质心在第三轴上，到固定点距离为l。



对称陀螺绕第 3 轴旋转，拉氏量不变，所以是对称变换；绕惯性系z轴的旋转，也是对称变换。由诺特定理，有对应的两个守恒量。如果取这两种变换的参数自转角ψ和进动角ϕ作为广义坐标，则这两个坐标都是循环坐标。这是采用欧拉角参数的好处。

利用欧拉运动学方程写出动能，可得拉格朗日函数，

$$\begin{cases}\omega_1 = \sin\theta\sin\psi\,\dot{\phi} + \cos\psi\,\dot{\theta} \\ \omega_2 = \sin\theta\cos\psi\,\dot{\phi} - \sin\psi\,\dot{\theta} \Longrightarrow \\ \omega_3 = \cos\theta\,\dot{\phi} + \dot{\psi}\end{cases}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 - V \\ &= \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\cos\theta\,\dot{\phi} + \dot{\psi}\right)^2 - mgl\cos\theta \end{aligned}$$

此时不能像自由刚体那样，动力学方程、运动学方程分开求解。

2. 等效拉氏量

系统有 3 个显见的首次积分，

i. 拉氏量不含ψ，p_ψ守恒，
$$p_\psi = I_3\left(\cos\theta\,\dot{\phi} + \dot{\psi}\right) = I_3\omega_3 = J_3$$
ii. 拉氏量不含ϕ，p_ϕ守恒，
$$p_\phi = I_1\dot{\phi}\sin^2\theta + I_3\left(\cos\theta\,\dot{\phi} + \dot{\psi}\right)\cos\theta = I_1\dot{\phi}\sin^2\theta + J_3\cos\theta = J_z$$
iii. 拉氏量不含时，机械能守恒，
$$\frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{J_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta = E$$

由前两个守恒量可解出

$$\begin{cases}\dot{\phi} = \dfrac{J_z - J_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} \\ \dot{\psi} = \dfrac{J_3}{I_3} - \dfrac{J_z - J_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\cos\theta\end{cases}$$

作 Routh 变换消去循环坐标，得等效拉氏量

$$L_{\text{eff}}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 - V_{\text{eff}}(\theta)$$

其中等效势能

[3] 定点是陀螺足。这节的讨论也适用于一个玩具陀螺在光滑地面上的运动。分离质心的水平运动之后，描述玩具陀螺姿态（欧拉角）的拉氏量以及运动方程，与定点转动陀螺完全一致。

$$V_{\text{eff}}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(J_z - J_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + mgl\cos\theta + \frac{J_3^2}{2I_3}$$

在$\theta = 0, \pi$时为正无穷。

3. 求解

系统不含时，等效广义能量守恒，

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) = E$$

令

$$u = \cos\theta \Rightarrow \dot{u} = -\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow \dot{u}^2 = \dot{\theta}^2\sin^2\theta$$

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{(J_z - J_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + mgl\cos\theta + \frac{J_3^2}{2I_3} = E$$
$$\Rightarrow \dot{u}^2 = \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_3} - \frac{2mgl}{I_1}u\right)(1-u^2) - \frac{(J_z - J_3u)^2}{I_1^2}$$

利用此方程解出$\dot{u}$，积分可求得$\theta(t)$；代回可得$\dot{\phi}, \dot{\psi}$表达式，再次积分可得所有欧拉角。

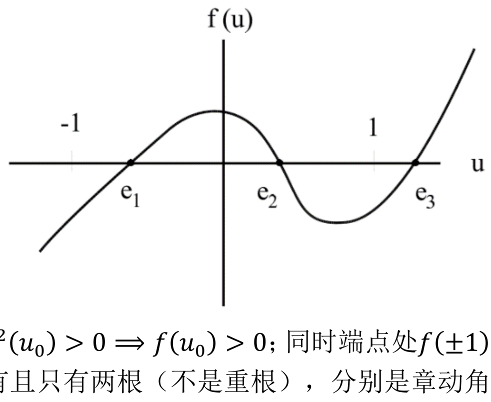
解析结果为椭圆积分，过于复杂，无助于理解其物理意义，这里略去。

作业 p217 4.21, 4.23

4. 章动角的范围

$\dot{u} = 0$处，章动角取得极值，

$$\dot{u}^2 = f(u) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_1I_3} - \frac{2mgl}{I_1}u\right)(1-u^2) - \frac{(J_z - J_3u)^2}{I_1^2} = 0$$



这是三次多项式，有三个根。

$u \to +\infty$时$f(u) \to +\infty$，且$f(1) < 0$，必有一根大于 1，舍弃。**不考虑稳定进动**，$\exists u_0 \in (-1,1)$使$\dot{u}^2(u_0) > 0 \Rightarrow f(u_0) > 0$；同时端点处$f(\pm 1) < 0$（直立陀螺除外），所以这时方程在$(-1,1)$区间有且只有两根（不是重根），分别是章动角的最大值和最小值。

补充习题：稳定进动时，方程$f(u) = 0$有重根，这对积分常数有什么要求？求这时的进动角速度。

5. 第 3 主轴的轨迹

按欧拉角的定义，第 3 主轴的纬度θ、经度为ϕ，因此

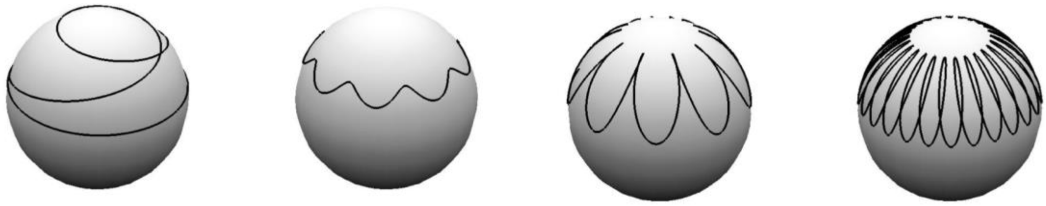
$$\dot{\phi} = \frac{J_z - J_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} = a(\theta)$$

是第三主轴的进动角速度，考虑章动范围$\theta \in [\theta_1, \theta_2]$，

（1）$\forall\theta \in [\theta_1, \theta_2],\ \dot{\phi} = a(\theta) \neq 0$时，第 3 轴向同一方向不折回地进动（前两张图）；

（2）$a(\theta_1) = 0 | a(\theta_2) = 0$，第 3 轴轨迹是带尖点的曲线（第三张图，比如把倾斜且自转的陀螺放开的情形就是如此）；

（3）$\exists\theta \in (\theta_1, \theta_2), a(\theta) = 0$，则轨迹为带圈的曲线（第四张图）。



6. 睡陀螺

如果开始时陀螺直立旋转，$J_z = J_3$守恒。

考虑等效拉氏量，对等效势能在$\theta \approx 0$附近作泰勒展开，可以求得作微振动的条件。

即 p217　4.24（作业）

在摩擦力的耗散作用下，拉格朗日陀螺→睡陀螺→失稳。

7. 回转仪

对称快陀螺又称回转仪，其转动动能远大于重力势能，

$$\frac{1}{2}I_3\omega_3^2 \gg mgl$$

且I_3/I_1不是小量。

若忽略势能，快陀螺就是对称欧拉陀螺。利用等效势能表达式，可以求出其微振动频率（**补充作业**）。

考虑一个特殊的初始条件——快速抛出的快陀螺：捏住陀螺的对称轴，使陀螺高速自转，然后释放陀螺。

$$\dot{\theta}(0) = 0, \qquad \dot{\phi}(0) = 0, \qquad \dot{\psi}(0) \neq 0$$

这是前小节第三轴轨迹为带尖点曲线的情形，

推论 1

$$\theta(0)=\theta_1$$

是章动角的最小值。

在最大章动角θ_2和最小章动角θ_1处，$\dot{\theta}=0$. 记$u_1=\cos\theta_1, u_2=\cos\theta_2$,

$$\left.\begin{array}{r}\left(\frac{2E}{I_1}-\frac{J_3^2}{I_1I_3}-\frac{2mgl}{I_1}u_2\right)(1-u_2^2)-\frac{(J_z-J_3u_2)^2}{I_1^2}=0\\ \frac{2E}{I_1}-\frac{J_3^2}{I_1I_3}=\frac{2mgl}{I_1}u_1,\qquad J_z=J_3\cos\theta_1\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{r}u_1-u_2=\frac{2I_1mgl}{J_3^2}(1-u_2^2)\\ p=\frac{J_3^2}{2I_1mgl}=\frac{I_3^2\omega_3^2}{2I_1mgl}\gg 1\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{r}u_2^2-pu_2+pu_1-1=0\Longrightarrow u_2=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4pu_1+4}}{2}\\ u_2<1\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{r}u_2=\frac{p-\sqrt{p^2-4pu_1+4}}{2}\\ p\gg 1\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u_2\approx u_1-\frac{1}{p}(1-u_1^2)-\frac{2}{p^2}u_1(1-u_1^2)+\mathcal{O}(p^{-3})$$

推论 2 初始时转速越快，章动范围越小。

由于快陀螺的章动角变化范围很小，记$w=u_1-u$,

$$\left.\begin{array}{r}\dot{u}^2=\left(\frac{2E}{I_1}-\frac{J_3^2}{I_1I_3}-\frac{2mgl}{I_1}u\right)(1-u^2)-\frac{(J_z-J_3u)^2}{I_1^2}\\ \frac{2E}{I_1}-\frac{J_3^2}{I_1I_3}=\frac{2mgl}{I_1}u_1\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \dot{w}^2=\frac{2mgl}{I_1}w\{1-(u_1-w)^2\}-\frac{J_3^2}{I_1^2}w^2=\frac{2mgl}{I_1}\{-w^3+2u_1w^2+(1-u_1^2)w\}-\frac{J_3^2}{I_1^2}w^2$$

$$\dot{w}^2=\frac{2mgl}{I_1}(1-u_1^2)w-\frac{J_3^2}{I_1^2}w^2+\mathcal{O}(p^{-2})$$

$$\ddot{w}=\frac{mgl}{I_1}(1-u_1^2)-\frac{J_3^2}{I_1^2}w$$

$$w(t)=\frac{mglI_1}{J_3^2}(1-u_1^2)\left\{1-\cos\left(\frac{J_3}{I_1}t\right)\right\}$$

$$u(t)=u_1-\frac{mglI_1}{J_3^2}(1-u_1^2)\left\{1-\cos\left(\frac{J_3}{I_1}t\right)\right\}$$

推论 3 章动角$\theta(t)$随时间按三角函数震荡。

进动角速度为

$$\dot{\phi}=\frac{J_z-J_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\xrightarrow{J_z=J_3\cos\theta_1}\dot{\phi}=\frac{J_3}{I_1}\frac{\cos\theta_1-\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{J_3}{I_1}\frac{w}{1-(u_1-w)^2}$$

取平均，

$$\langle\dot{\phi}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \dot{\phi}dt \approx \frac{J_3}{I_1(1-u_1^2)}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T wdt = \frac{J_3}{I_1}\frac{mglI_1}{J_3^2} = \frac{mgl}{I_3\omega_3}$$

推论 4 初速越快，进动越慢。

8. LARMOR 进动

原子核外电子在高速旋转，在外磁场中有势能

$$V = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = \mu B\cos\theta$$

与对称重陀螺势能的表达式形式相同，相当于快陀螺，进动角速度为

$$\frac{mgl}{J_3} \to \frac{\mu B}{J_3} = \frac{ef\pi a^2 B}{m\omega a^2} = \frac{eB}{2m}$$

七、 KOWALEWSKAJA（柯瓦列夫斯卡娅）解

$I_1 = I_2 = 2I_3$，有重力，质心在赤道面内。实用场景受限，略。

法兰西科学院 1888 年有奖征解。

俄国女数学家柯瓦列夫斯卡娅

Софья Васильевна Ковалевская

1850.1.15－1891.2.10

八、 非惯性参考系中的运动

1. 质点在非惯性系中的拉氏量和哈密顿量

记$\vec{r}_0(t)$是参考点的位移，$\vec{r}(t)$是质点相对于转动参考系的位移，两者都是在转动参考系的分量。转动参考系的运动已知。

在惯性系，

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

利用相对微商，在随体系（转动参考系，非惯性系）

$$\vec{v}' - \vec{v}_0' = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$

这节下面去掉符号“′”以简化符号。上式即，质点相对惯性系的速度，在运动参考系的分量为

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}+\vec{\omega}\times\vec{r}+\vec{v}_0$$

得质点运动的拉氏量

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{2}m\vec{v}^2-V(t,\vec{r})=\frac{1}{2}m\{(\vec{v}-\vec{v}_0)+\vec{v}_0\}^2-V(t,\vec{r})\\&=\frac{1}{2m}\{(\vec{v}-\vec{v}_0)^2+2(\vec{v}-\vec{v}_0)\cdot\vec{v}_0+\vec{v}_0^2\}-V(t,\vec{r})\\&=\frac{1}{2m}\{(\vec{v}-\vec{v}_0)^2+2\vec{v}\cdot\vec{v}_0-\vec{v}_0^2\}-V(t,\vec{r})\\&=\frac{1}{2}m\left\{\left(\dot{\vec{r}}+\vec{\omega}\times\vec{r}\right)^2-2\vec{r}\cdot\vec{a}_0+2\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{v}_0)-\vec{v}_0^2\right\}-V(t,\vec{r})\end{aligned}$$

其中$\vec{r}_0(t),\vec{v}_0(t)$是已知函数。舍弃拉氏量的规范项，可以拉氏函数可以等价地写成

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{2}m\left\{\left(\dot{\vec{r}}+\vec{\omega}\times\vec{r}\right)^2-2\vec{r}\cdot\vec{a}_0\right\}-V(t,\vec{r})\\&=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2+m\dot{\vec{r}}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})+\frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2-m\vec{r}\cdot\vec{a}_0-V(t,\vec{r})\end{aligned}$$

其中$\vec{\omega}(t),\vec{a}_0(t)$也是已知函数。

作勒让德变换得哈密顿量

$$\vec{p}=m\dot{\vec{r}}+m(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2-\frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2+m\vec{r}\cdot\vec{a}_0+V(t,\vec{r})\\&=\frac{1}{2m}\{\vec{p}-m(\vec{\omega}\times\vec{r})\}^2-\frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2+m\vec{r}\cdot\vec{a}_0+V(t,\vec{r})\\&=\frac{\vec{p}^2}{2m}-\vec{p}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})+m\vec{r}\cdot\vec{a}_0+V(t,\vec{r})\end{aligned}$$

上式第二项是科里奥利力的广义势函数，第三项是惯性力势函数，第三项为惯性离心势。

练习：写出拉氏方程、哈密顿方程。

2. 在地面参考系的运动

对于地表运动，$\vec{a}_0$只与所在地点有关，可归入当地重力加速度之中；地球自转角速度

$$\omega_0=7.27221\times10^{-5}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

为小量，其平方项可以忽略，

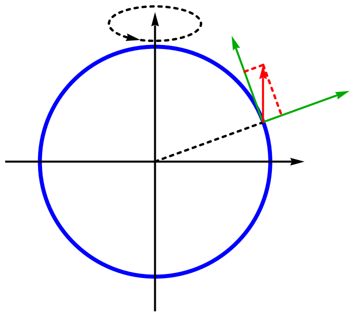
$$L=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2+m\dot{\vec{r}}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})-V(t,\vec{r})$$

$$H=\frac{1}{2m}\{\vec{p}-m(\vec{\omega}\times\vec{r})\}^2+V(t,\vec{r})$$

一般我们取地表向东方向为x轴正向，地表向北为y轴，垂直地表向上为z轴（ENU 坐标）。地球自转角速度为

$$\vec{\omega} = (0, \omega_0 \cos\theta_0\,, \omega_0 \sin\theta_0)$$

其中θ_0是坐标原点（参考点）附近的纬度。



如果只有重力场，

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + m\dot{\vec{r}}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) - mgz$$

$$H = \frac{1}{2m}\{\vec{p} - m(\vec{\omega}\times\vec{r})\}^2 + mgz$$

3. 应用

例 落体偏东

取 ENU 坐标，

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

可用莫培督原理求轨道。

先用等能约束条件消去时间参数，

$$\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + mgz = E \Longrightarrow dt = \sqrt{\frac{m}{2(E-mgz)}}|d\vec{r}|$$

约化作用量成为

$$\int_{z_1}^{z_2}\vec{p}\cdot d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} m\left(\dot{\vec{r}} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right)\cdot d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2}\left\{\sqrt{2m(E-mgz)}|d\vec{r}| + m(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot d\vec{r}\right\}$$
$$= \int_{z_1}^{z_2}\left\{\sqrt{2m(E-mgz)}\sqrt{1+x'^2+y'^2} + m(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{r}'\right\}dz$$

我们讨论物体在高处从静止下落的情形，ω_0和$x, \dot{x}, y, \dot{y}$均为小量，只需保留到二阶，

$$\int_{z_1}^{z_2}\vec{p}\cdot d\vec{r} \approx \int_{z_1}^{z_2}\left\{\sqrt{2m(E-mgz)}\left(1+\frac{1}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2\right) + m\omega_0\cos\theta_0\,(zx'-x)\right\}dz$$

舍弃规范项，约化作用量为

$$W[x,y] = \int_{z_1}^{z_2}\vec{p}\cdot d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2m(E-mgz)}(x'^2+y'^2) + m\omega_0\cos\theta_0\,(zx'-x)\right\}dz$$

利用 Lagrange 框架下的 Maupertuis 原理，轨道方程为

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\left\{\sqrt{2m(E-mgz)}x' + m\omega_0\cos\theta_0\, z\right\} = -m\omega_0\cos\theta_0 \\ \dfrac{d}{dz}\sqrt{2m(E-mgz)}y' = 0 \end{cases}$$

设开始时质点静止于坐标原点，

$$x(z=0)=0, \qquad y(z=0)=0, \qquad E=0$$

得

$$\begin{cases} \sqrt{2(-gz)}x' = -2\omega_0\cos\theta_0\, z \\ y' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0\cos\theta_0\sqrt{\dfrac{-z^3}{g}} \\ y = 0 \end{cases}$$

取合肥的纬度，若一小球落到深 100m 的矿井底部，

$$\theta_0 = 31.8584°, \qquad g = 9.7947\,\mathrm{m/s^2}$$

落点偏东

$$\frac{2}{3}\omega_0\cos\theta_0\left(\frac{2h^3}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.0186\mathrm{m}$$

练习：不计空气阻力，估计炮弹落地偏差。

练习：用相空间的莫培督原理求落体问题的相轨道。

例 傅科摆

仍取 ENU 坐标。设球面摆静止时，质点位于坐标原点。绳长l，栓在$(0,0,l)$处，约束方程

$$x^2+y^2+(z-l)^2 = l^2 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2 = 2lz$$

体系微振动时x,y为小量，由约束方程知z为 2 阶小量，

$$z = \frac{1}{2l}(x^2+y^2)$$

拉氏量只需保留至 2 阶小量；常数ω_0更小，只需保留x,y的领头阶，舍弃ω_0^2项，

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + m\dot{\vec{r}}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) - mgz$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m\omega_0\{x(\dot{y}\sin\theta_0 - \dot{z}\cos\theta_0) - \dot{x}(y\sin\theta_0 - z\cos\theta_0)\} - mgz$$
$$\approx \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega_0\sin\theta_0\{x\dot{y} - \dot{x}y\} - \frac{1}{2}\frac{mg}{l}(x^2 + y^2)$$

作勒让德变换

$$p_x = m\dot{x} - m\omega_0\sin\theta_0\, y, \qquad p_y = m\dot{y} + m\omega_0\sin\theta_0\, x$$

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\frac{mg}{l}(x^2 + y^2)$$
$$= \frac{1}{2m}\left\{(p_x + m\omega_0\sin\theta_0\, y)^2 + \left(p_y - m\omega_0\sin\theta_0\, x\right)^2\right\} + \frac{1}{2}\frac{mg}{l}(x^2 + y^2)$$
$$= \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\frac{g}{l} + \omega_0^2\sin\theta_0\right)(x^2 + y^2) + \omega_0\sin\theta_0\left(yp_x - xp_y\right)$$

记

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2), \qquad \omega^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g}{l} + \omega_0^2\sin\theta_0 \approx \frac{g}{l}$$

$$H' = \omega_0\sin\theta_0\left(yp_x - xp_y\right) = -\omega_0\sin\theta_0\, L_z$$

$$H = H_0 + H', \qquad [H_0, H'] = 0$$

利用算子

$$\hat{H}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left[\cdot, H_0(t_0, x(t_0), y(t_0), p_x(t_0), p_y(t_0)\right]$$

$$\hat{H}' \stackrel{\text{def}}{=} \left[\cdot, H'(t_0, x(t_0), y(t_0), p_x(t_0), p_y(t_0)\right]$$

$$\hat{L}_z \stackrel{\text{def}}{=} \left[\cdot, x(t_0)p_y(t_0) - y(t_0)p_x(t_0)\right]$$

$$[\vec{r}, \psi\cdot\vec{L}] = (\vec{\psi}\cdot\vec{X})\vec{r} \Longrightarrow \exp\left\{\vec{\psi}\cdot\hat{\vec{L}}\right\}\vec{r}(t_0) = R(\vec{\psi})\vec{r}(t_0)(\text{练习})$$

在$t = t_0 + \tau$时，坐标演化成为

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp\{\tau\hat{D}\}\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \exp\{\tau\hat{H}\}\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \exp\{\tau\hat{H}_0\}\exp\{-\omega_0\sin\theta\,\tau\hat{L}_z\}\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix}$$

无微扰项时，平面振子轨迹为椭圆。由于 Coriolis 力的影响，在北半球，摆平面或椭圆的长短轴以圆频率$\omega_0\sin\theta$顺时针旋转。在合肥地区，旋转一圈约需

$$\frac{2\pi}{\omega_0\sin\theta} = 45\text{h}28\text{min}$$

Dept. Mod. Phys.
2022.01.04
朱界杰

附录 描述刚体运动的其它参数

有 Euler 参数、Cayley-Klein 参数、Hamilton 参数等，这些参数的定义都源于SO(3)群与SU(2)群的同态。

(1) 2 维酉矩阵表示

Pauli 矩阵定义为

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$\frac{\sigma_j}{2}$之间的对易关系与$J_j=iX_j$之间的对易关系完全相同，

$$\sigma_j\sigma_k\equiv\delta_{jk}\mathbf{1}_{2\times2}+i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$$

$$\left[\frac{\sigma_j}{2},\frac{\sigma_k}{2}\right]=i\varepsilon_{jkl}\frac{\sigma_l}{2}\leftrightarrow\left[J_j,J_k\right]=i\varepsilon_{jkl}J_l$$

因此，由 Baker-Hausdorff 公式，$\mathrm{SO}(3)=\left\{R(\vec\psi)=\mathrm{e}^{-i\vec J\cdot\vec\psi}\right\}$与$\mathrm{SU}(2)=\left\{u(\vec\psi)=e^{-i\frac{\vec\sigma}{2}\cdot\vec\psi}\right\}$的乘法规则完全相同（群的同态）。可以用 2 维复矩阵表示转动[4]，

$$u=\begin{pmatrix}a&b\\-b^*&a^*\end{pmatrix},\qquad aa^*+bb^*=1$$

$$\begin{aligned}&u(\vec r\cdot\vec\tau)u^{-1}=(R(u)\vec r)\cdot\vec\tau\\&\Rightarrow R(u)=\begin{pmatrix}\frac12(a^2+a^{*2}-b^2-b^{*2})&-\frac{i}{2}(a^2-a^{*2}+b^2-b^{*2})&-(ab+a^*b^*)\\\frac{i}{2}(a^2-a^{*2}-b^2+b^{*2})&\frac12(a^2+a^{*2}+b^2+b^{*2})&i(a^*b^*-ab)\\a^*b+ab^*&i(a^*b-ab^*)&aa^*-bb^*\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) Euler 参数

又由于

$$\begin{aligned}u(\vec\psi)=e^{-i\frac{\vec\sigma}{2}\cdot\vec\psi}&=\cos\frac{\psi}{2}\mathbf{1}_{2\times2}-i(\vec\sigma\cdot\vec n)\sin\frac{\psi}{2}\\&=\begin{pmatrix}\cos\frac{\psi}{2}-in_3\sin\frac{\psi}{2}&(-in_1-n_2)\sin\frac{\psi}{2}\\(-in_1+n_2)\sin\frac{\psi}{2}&\cos\frac{\psi}{2}+in_3\sin\frac{\psi}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以可引进 Euler 参数（Goldstein 3ed., p155）

$$e_0=\cos\frac{\psi}{2},\qquad e_j=-n_j\sin\frac{\psi}{2},\qquad e_0^2+\vec e^2=1,$$

---

[4] 设$u=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$。$\det u=1\Rightarrow ad-bc=1;u^\dagger u=\mathbf{1}\Rightarrow ab^*+cd^*=0,|a|^2+|c|^2=1,|b|^2+|d|^2=1$. $0=d(ab^*+cd^*)=(1+bc)b^*+c|d|^2=b^*+c(|b|^2+|d|^2)=b^*+c\Rightarrow c=-b^*$. $0=b(ab^*+cd^*)=a|b|^2+(ad-1)d^*=a(|b|^2+|d|^2)-d^*=a-d^*\Rightarrow d=a^*$.

$$u=\begin{pmatrix} e_0+ie_3 & e_2+ie_1 \\ -e_2+ie_1 & e_0-ie_3 \end{pmatrix}$$

对应的转动矩阵为

$$R(e_0,e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix} e_0^2+e_1^2-e_2^2-e_3^2 & 2(e_1e_2+e_0e_3) & 2(e_1e_3-e_0e_2) \\ 2(e_1e_2-e_0e_3) & e_0^2-e_1^2+e_2^2-e_3^2 & 2(e_2e_3+e_0e_1) \\ 2(e_1e_3+e_0e_2) & 2(e_2e_3-e_0e_1) & e_0^2-e_1^2-e_2^2+e_3^2 \end{pmatrix}$$

(3) CAYLEY-KLEIN 参数

（Goldstein 3ed. P155）

$$u=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad u\in SU(2)\Leftrightarrow \delta=\alpha^*,\gamma=-\beta^*,\alpha\delta-\beta\gamma=1$$

转动矩阵为

$$R(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2) & -\frac{i}{2}(\alpha^2-\delta^2+\beta^2-\gamma^2) & -\alpha\beta+\gamma\delta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2-\delta^2-\beta^2+\gamma^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2+\delta^2+\beta^2+\gamma^2) & -i(\gamma\delta+\alpha\beta) \\ \beta\delta-\alpha\gamma & i(\beta\delta+\alpha\gamma) & \alpha\delta+\beta\gamma \end{pmatrix}$$

(4) 四元数

Hamilton 参数即把 Pauli 矩阵对应到四元数，

$$q\overset{\text{def}}{=}q_0+q_1\boldsymbol{i}_1+q_2\boldsymbol{i}_2+q_3\boldsymbol{i}_3$$

四元数的乘法规则

$$\boldsymbol{i}_j\boldsymbol{i}_k=-\delta_{jk}+\varepsilon_{jkl}\boldsymbol{i}_l$$

与 Pauli 矩阵的乘法规则比较

$$\sigma_j\sigma_k=\delta_{jk}+i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$$

知$\boldsymbol{i}_{\mathrm{j}}\Leftrightarrow -i\sigma_j$，所以

$$q\leftrightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad a=q_0-q_3i, \qquad b=-q_2-q_1i$$

$$u(\vec{\psi})=\cos\frac{\psi}{2}\mathbf{1}_{2\times 2}-i(\vec{\tau}\cdot\vec{n})\sin\frac{\psi}{2}\Rightarrow q_0=\cos\frac{\psi}{2},q_j=n_j\sin\frac{\psi}{2},|q|^2=1$$

即 3 维空间的转动与单位模长的四元数对应，连续转动对应四元数的乘法。

转动矩阵与四元数的关系为

$$R(q)=\begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{pmatrix}$$