

# 2022 秋-计算方法-第五次上机作业说明文档

## 1 实验目的

实现三次样条插值算法。给定若干插值点，利用大 M 法计算三次样条插值函数。

## 2 应用背景

在数值分析中，样条 (spline) 是一种特殊的函数，由分段多项式定义。样条一词来源于工程实际，在早期的船舶、汽车、飞机的设计过程中，放样员会使用压铁将富有弹性的细木条在若干指定点处压住，最终木条会形成一条通过指定点的光顺曲线，这里的木条在工程中被叫做样条。

通过弹性木条，我们可以对指定点进行光滑插值，那插值出来的曲线是否有相应的数学表达呢？我们将上述过程抽象为弹性木条在集中载荷下的小变形模型，如图 1 所示。



图 1: 木条在压铁控制下自然弯曲

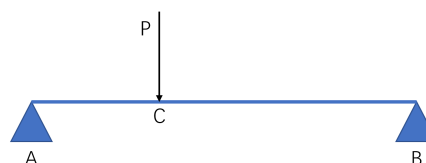


图 2: 相邻区间模型示意图

假定有  $n + 1$  个压铁，位置分别为  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ，木条曲线函数为  $y(x)$ 。根据材料力学中的伯努利-欧拉方程：

$$M(x) = EI k(x), \quad (1)$$

其中  $M(x)$  为曲线弯矩， $EI$  为抗弯刚度， $k(x)$  为曲线的曲率。在小挠度理论下，曲率近似取弯曲变形的二次微分，从而有

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI}, \quad (2)$$

考虑两个相邻的区间，如图 2 所示。假定 A、B、C 三点为三块压铁，将 A、B 两点看作两个支点，压铁 C 给木条的集中载荷力为  $P$ ，设  $|AB| = l, |AC| = l_1, |BC| = l_2$ ，则由静力平衡方程可知 A、B 两点的支反力为

$$P_A = \frac{Pl_2}{l}, P_B = \frac{Pl_1}{l},$$

相应的弯矩方程分别为

$$M(x) = \begin{cases} \frac{Pl_2}{l}x, & 0 \leq x \leq l_1 \\ Pl_1 - \frac{Pl_1}{l}x, & l_1 \leq x \leq l \end{cases} \quad (3)$$

$M(x)$  为分段线性函数。根据式 (2) 可知，曲线在 A-C-B 区间内为分段三次函数，且具有  $C^2$  连续性，故为三次样条函数。通过力学分析我们知道，弹性木条在各节点处自然弯曲的曲线即为三次样条函数。

### 3 实验要求

point.txt 文件中包含了 21 个压铁的位置信息

- (a) 利用大 M 法计算出木条在压铁控制下的曲线，边界条件取自然边界条件，并使用追赶法对得到的线性方程组进行求解。
- (b) 将第 10 个压铁的位置移动至 (0,10)，计算出新的曲线，观察每个区间内的三次函数是否改变。

### 4 提交要求

#### 4.1 提交方式

请提交源代码和实验报告。新建目录，并以“HW5-学号-姓名”方式命名，该目录下应包含如下内容：

- src\ (文件夹，存放你的源代码)
- report.pdf (你的实验报告)

将该文件夹以压缩包方式（压缩包命名方式为“A 组-HW5-学号-姓名.zip”），发送到课程邮箱 [computation\\_22\\_1@163.com](mailto:computation_22_1@163.com)（周三周五班），邮件标题以同样方式命名。

请严格按照命名方式要求提交，不要交错邮箱，否则可能漏记成绩。

#### 4.2 截止时间

在 11 月 13 日 23:59 分前提交。若有特殊情况请向助教说明。