.刚体力学

- 刚体运动的描述
- 刚体运动的广义坐标
- 刚体运动的角速度
- 定点转动动力学
- 欧拉陀螺
- 拉格朗日陀螺
- 非惯性参考系中的运动

刚体运动学

角速度

- 定点转动

$$\vec{r}_P(t) = R(t)\vec{r}_{CP}(0) + \vec{r}_C(t)$$
$$\vec{r}_C(t) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{r}_P(t) = R(t)\vec{r}_{CP}(0)$$

- 扩大刚体上任意一点的位移

$$\vec{r}_P(t+dt) = \exp\left(\vec{X}\cdot d\vec{\varphi}\right)\vec{r}_P(t)$$

$d\vec{\varphi}$是：在t时刻，dt时间内，刚体转过的无穷小角位移。

- 角速度定义为

$$\vec{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

- 角速度与转动矩阵的关系

$$\vec{r}_P(t+dt) = \exp\left(\vec{X}\cdot d\vec{\varphi}\right)\vec{r}_P(t)$$
$$\Rightarrow R(t+dt)\vec{r}_{CP}(0) = \exp\left(\vec{X}\cdot d\vec{\varphi}\right)R(t)\vec{r}_{CP}(0)$$
$$\Rightarrow R(t+dt) = \exp\left(\vec{X}\cdot d\vec{\varphi}\right)R(t)$$
$$R + \dot{R}dt = \left(\mathbb{I} + \vec{X}\cdot d\vec{\varphi}\right)R$$
$$\boxed{\vec{X}\cdot\vec{\omega} = \dot{R}R^T}$$

- 角速度不是角位移的变化率

$$\vec{\omega} \neq d\vec{\psi}/dt$$

- 角速度线性可加

$$\exp\left\{d\vec{\varphi}_1\cdot\vec{X}\right\}\exp\left\{d\vec{\varphi}_2\cdot\vec{X}\right\}$$
$$= \exp\left\{\left(d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2\right)\cdot\vec{X}\right\}$$
$$\Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

用角位移表示角速度

- 转动矩阵

$$R(t)=e^{\vec{\psi}(t)\cdot\vec{X}}$$

- 角速度

$$\vec{X}\cdot\vec{\omega}(t)=\dot{R}R^T$$

$$\xRightarrow{\text{transpose}}\boxed{-\vec{X}\cdot\vec{\omega}=R\dot{R}^T}$$

- 矩阵指数求导公式

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^A=e^A\left(\frac{\mathbf{1}-e^{-\mathrm{ad}_A}}{\mathrm{ad}_A}\right)\dot{A}}$$

其中伴随表示ad_A定义为

$$\mathrm{ad}_A\circ B\overset{\text{def}}{=}[A,B]=AB-BA$$

- 计算得

$$\vec{X}\cdot\vec{\omega}=-R\dot{R}^T$$

$$=-\left(\frac{\mathbf{1}-e^{\mathrm{ad}_{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}}{\mathrm{ad}_{-\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}\right)\left(-\dot{\vec{\psi}}\cdot\vec{X}\right)$$

$$=\left(\frac{e^{\mathrm{ad}_{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}-\mathbf{1}}{\mathrm{ad}_{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}\right)\dot{\vec{\psi}}\cdot\vec{X}$$

- 由于

$$\mathrm{ad}_{\vec{a}\cdot\vec{X}}\vec{b}\cdot\vec{X}=[\vec{a}\cdot\vec{X},\quad\vec{b}\cdot\vec{X}]$$

$$=a_jb_k\varepsilon_{jkl}X_l=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{X}$$

$$=\left\{\left(\vec{a}\cdot\vec{X}\right)\vec{b}\right\}\cdot\vec{X}$$

用角位移表示角速度

- 代入上式得

$$\vec{X}\cdot\vec{\omega}=\left(\frac{e^{\mathrm{ad}_{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}-\mathbf{1}}{\mathrm{ad}_{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}\right)\dot{\vec{\psi}}\cdot\vec{X}$$

$$=\left(\frac{e^{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}-\mathbf{1}}{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}\dot{\vec{\psi}}\right)\cdot\vec{X}$$

- 惯性系的角速度是

$$\boxed{\vec{\omega}=\frac{e^{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}-\mathbf{1}}{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}\dot{\vec{\psi}}}$$

注意

$$\vec{\omega}\neq\dot{\vec{\psi}}$$

- 随体系的角速度分量是

$$\vec{\omega}'=R^{-1}\vec{\omega}=\frac{\mathbb{I}-e^{-\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}\dot{\vec{\psi}}$$

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix}=\dot{\vec{\psi}}-\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}\left(\vec{\psi}\times\dot{\vec{\psi}}\right)+\frac{\psi-\sin\psi}{\psi^3}\left\{\vec{\psi}\times\left(\vec{\psi}\times\dot{\vec{\psi}}\right)\right\}$$

- Bortz方程

$$\dot{\vec{\psi}}=\frac{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}{\mathbb{I}-e^{-\vec{\psi}\cdot\vec{X}}}\vec{\omega}'$$

$$=\vec{\omega}'+\frac{1}{2}\vec{\psi}\times\vec{\omega}'+\frac{2\sin\psi-\psi(1+\cos\psi)}{2\psi^2\sin\psi}\vec{\psi}\times\left(\vec{\psi}\times\vec{\omega}'\right)$$

$$\approx\vec{\omega}'+\frac{1}{2}\vec{\psi}\times\vec{\omega}'+\frac{1}{12}\vec{\psi}\times(\vec{\psi}\times\vec{\omega}')$$

1971年，NASA保密项目，军用高精度定位

用欧拉角表示角速度

- 转动矩阵

$$R(\phi,\theta,\psi)=R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi)$$

- 角速度

$$\vec{\omega}\cdot\vec{X}=\dot{R}R^T$$
$$=\{\dot{R}_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi)$$
$$+R_z(\phi)\dot{R}_x(\theta)R_z(\psi)$$
$$+R_z(\phi)R_x(\theta)\dot{R}_z(\psi)\}R_z^T(\psi)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi)$$
$$=\dot{R}_z(\phi)R_z^T(\phi)$$
$$+R_z(\phi)\dot{R}_x(\theta)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi)$$
$$+R_z(\phi)R_x(\theta)\dot{R}_z(\psi)R_z^T(\psi)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi)$$

- 逐项计算

$$\dot{R}_z(\phi)=\frac{d}{dt}e^{\phi X_3}=\mathbf{0}+\dot{\phi}X_3+\dot{\phi}\phi X_3^2+\cdots=\dot{\phi}X_3e^{\phi X_3}$$
$$\dot{R}_z(\phi)R_z^T(\phi)=\left(\dot{\phi}X_3e^{\phi X_3}\right)e^{-\phi X_3}=\dot{\phi}X_3$$
$$=\left(\dot{\phi}\vec{e}_z\right)\cdot\vec{X}$$

$$\dot{R}_x(\theta)R_x^T(\theta)=\dot{\theta}\vec{e}_x\cdot\vec{X}$$
$$\Rightarrow R_z(\phi)\dot{R}_x(\theta)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi)=\left(\dot{\theta}R_z(\phi)\vec{e}_x\right)\cdot\vec{X}$$
$$=\left(\dot{\theta}\vec{e}_{x'}\right)\cdot\vec{X}$$

$$R_z(\phi)R_x(\theta)\dot{R}_z(\psi)R_z^T(\psi)R_x^T(\theta)R_z^T(\phi)=\dot{\psi}\vec{e}_{z''}\cdot\vec{X}$$

$$\vec{\omega}\cdot\vec{X}=\dot{\phi}\vec{e}_z\cdot\vec{X}+\dot{\theta}\vec{e}_{x'}\cdot\vec{X}+\dot{\psi}\vec{e}_{z''}\cdot\vec{X}$$
$$\vec{\omega}=\dot{\phi}\vec{e}_z+\dot{\theta}\vec{e}_{x'}+\dot{\psi}\vec{e}_{z''}$$

用欧拉角表示角速度

- 计算得

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{x'} = R_z(\phi)\vec{e}_x = R_z(\phi)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{z''} = R_z(\phi)R_x(\theta)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \sin\phi\sin\theta \\ -\cos\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

- 代入

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_{x'} + \dot{\psi}\vec{e}_{z''}$$

得惯性系的角速度分量是

$$\begin{cases} \omega_x = \cos\phi\,\dot{\theta} + \sin\phi\sin\theta\,\dot{\psi} \\ \omega_y = \sin\phi\,\dot{\theta} - \cos\phi\sin\theta\,\dot{\psi} \\ \omega_z = \dot{\phi} + \cos\theta\,\dot{\psi} \end{cases}$$

欧拉运动学方程

- 非惯性系的角速度

$$\vec{\omega}' = R^{-1}\vec{\omega}$$

或

$$\vec{\omega}' \cdot \vec{X} = R^T \dot{R}$$

- 与惯性系表达式

$$\vec{\omega} \cdot \vec{X} = \dot{R}R^T = -R\dot{R}^T$$

知，只需要把上页$\vec{\omega}$表达式做替换

$$R \to R^T$$

并乘以(-1)

- $R \to R^T$等价于

$$\phi \to -\psi,$$
$$\theta \to -\theta$$
$$\psi \to -\phi$$

- 得刚体运动学方程

$$\boxed{\begin{cases} \omega_1 = \sin\theta\sin\psi\,\dot{\phi} + \cos\psi\,\dot{\theta} \\ \omega_2 = \sin\theta\cos\psi\,\dot{\phi} - \sin\psi\,\dot{\theta} \\ \omega_3 = \cos\theta\,\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}}$$

- 写成矩阵形式，

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

反解得

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin\psi}{\sin\theta} & \dfrac{\cos\psi}{\sin\theta} & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ -\dfrac{\cos\theta\sin\psi}{\sin\theta} & -\dfrac{\cos\theta\cos\psi}{\sin\theta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

上式在$\theta \approx 0$时失效，造成定位导航算法的困扰。

刚体上任意点的速度

- 位移

$$\vec{r}_P(t) = \vec{r}_{CP}(t) + \vec{r}_C(t)$$
$$= R(t)\vec{r}_{CP}(0) + \vec{r}_C(t)$$

- 速度

$$\vec{v}_P(t) = \dot{R}(t)\vec{r}_{CP}(0) + \vec{v}_C(t)$$
$$= \dot{R}(t)R^{-1}(t)R(t)\vec{r}_{CP}(0) + \vec{v}_C(t)$$
$$= \left(\vec{\omega}(t) \cdot \vec{X}\right)\vec{r}_{CP}(t) + \vec{v}_C(t)$$
$$= \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CP}(t) + \vec{v}_C(t)$$

- 推论

刚体的角速度，与基点的选择无关。

证明：

前面已证明，选取不同基点时，转动矩阵$R(t)$是相同的。

因而

$$\vec{\omega} \cdot \vec{X} = \dot{R}(t)R(t)^{-1}$$

给出相同的角速度。

瞬轴和瞬心

- 推论

任一时刻刚体的一般运动状态，可分为3类：

（1）平动；

（2）转动（有瞬轴）；

（3）螺旋运动（有**瞬轴**，但是瞬轴上点的速度不为零）。

选择不同的基点，牵连速度的变化为

$$\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CA}(t)$$

瞬轴上的点没有垂直于角速度的分量。

- 刚体的平面平行运动

角速度非零时，必存在唯一的瞬心。

- 瞬心在随体坐标系划过的轨迹，称为本体极迹，
- 瞬心在惯性坐标系的轨迹称为空间极迹

- 例：火车的车轮在铁轨上的运动

铁轨是空间极迹

轮缘是本体极迹

刚体动力学

刚体的动能与转动惯量

- 刚体动能为

$$T=\sum_P \frac{1}{2} m_P \dot{\vec{r}}_P^2$$

$$=\sum_P \frac{1}{2} m_P [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CP}(t)+\vec{v}_C(t)]^2$$

- 定点转动的动能

$$T=\sum_P \frac{1}{2} m_P [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{CP}(t)]^2$$

$$=\frac{1}{2} \sum_P m_P [\vec{r}_{CP}^2 \vec{\omega}^2-(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{CP})^2]$$

- 定义转动惯量张量

$$I=\sum_P m_P \left(\vec{r}_{CP}^2 \mathbf{1}-\vec{r}_{CP} \vec{r}_{CP}^T\right)$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$$

- 连续质量分布时，转动惯量是

$$I_{jk}=\iiint \rho(x,y,z)\left(r^2 \delta_{jk}-r_j r_k\right) dxdydz$$

转动惯量

- 转动惯量张量

$$I=\sum_P m_P\left(\vec{r}_{CP}^2\mathbb{I}-\vec{r}_{CP}\vec{r}_{CP}^T\right)$$

对称、

正定（因为动能正定。除了质量分布在一条直线的退化情形。）

- 平行轴定理

$$\overleftrightarrow{I}=\overleftrightarrow{I}_C+M\left(\vec{r}_C^2\mathbb{I}-\vec{r}_C\vec{r}_C^T\right)$$

- 在惯性系中计算时，由于刚体在运动，因而质量的空间分布$\rho(x,y,z)$随时间变化，I_{jk}随之而变；

- 在随体系中计算时，I_{jk}是常数。

角动量

- 相对于参考点的角动量

$$\vec{J} = \sum_P \vec{r}_{CP} \times m_P \dot{\vec{r}}_{CP} = \sum_P \vec{r}_{CP} \times m_P (\vec{\omega} \times \vec{r}_{CP})$$

$$\begin{aligned} J_i &= \sum_P \varepsilon_{ijk} r_{CP,j} m_P \varepsilon_{kab} \omega_a r_{CP,b} \\ &= \sum_P r_{CP,j} m_P \omega_a r_{CP,b} \left(\delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja}\right) \\ &= \sum_P m_P \omega_a \left(\delta_{ia} \vec{r}_{CP}^{\,2} - r_{CP,i} r_{CP,a}\right) \\ &= I_{ia}\omega_a \end{aligned}$$

一般不与角速度平行。

主轴坐标系

- 按谱定理，

  正定的实对称矩阵，可以利用实正交矩阵对角化。

- 设

$$I\vec{a} = \lambda\vec{a}$$

特征值称为主转动惯量

特征矢称为主轴

- Sylvester惯性定理

  三个主轴相互正交

- 随体坐标系可以选取主轴为坐标轴，即主轴坐标系

- 主轴系的转动惯量不仅是常数，并且是对角矩阵

$$I = \mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_3\}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_j I_j\omega_j^2$$

$$J_i = I_i\omega_i(\text{指标}i\text{不求和})$$

惯量椭球

- 定义点的坐标

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\overset{\text{def}}{=}\frac{\vec{n}}{\sqrt{I_n}}$$

这些点必然满足

$$1=I_{11}x^2+I_{22}y^2+I_{33}z^2+2I_{12}xy+2I_{13}xz+2I_{23}yz$$

在一个椭球面上。

称此椭球面为惯量椭球。

- 定轴转动的动能

$$T=\frac{1}{2}I_n\omega^2$$

- 一般形式的刚体转动动能

$$T=\frac{1}{2}I_{jk}\omega_j\omega_k$$

- 所以

$$I_n=I_{jk}n_jn_k$$

- 主轴系中的惯量椭球

$$I_1x^2+I_2y^2+I_3z^2=1$$

- 刚体运动时，惯量椭球随之运动。

定点转动的刚体动力学

- 作用量

$$S[\vec{\psi}] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} I_{jk}\omega_j\omega_k - V[t, \vec{r}_{CP}(t)] \right\} dt$$

- 转动矩阵的变分

$$\vec{X}\cdot\vec{\omega} = \dot{R}R^T$$
$$\Longrightarrow \vec{X}\cdot d\vec{\varphi} = (dR)R^T$$
$$\Longrightarrow \vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi} = (\delta R)R^T$$
$$\Longrightarrow \delta R = (\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi})R$$

- 拉氏函数的变分

$$\delta\left(\frac{1}{2} I_{jk}\omega_j\omega_k\right) = \frac{1}{2}\delta(\vec{\omega}^T I \vec{\omega})$$
$$= \vec{J}\cdot\delta\vec{\omega} + \vec{\omega}^T(\delta I)\vec{\omega}$$

$$\vec{\omega}^T(\delta I)\vec{\omega} = \vec{\omega}^T \left\{ \sum_P m_P[\delta(\vec{r}_{CP}^2)\mathbf{1} - \delta\vec{r}_{CP}\vec{r}_{CP}^T - \vec{r}_{CP}\delta\vec{r}_{CP}^T] \right\} \vec{\omega}$$
$$= \vec{\omega}^T \left\{ \sum_P m_P[0\cdot\mathbf{1} - \delta R\vec{r}_{CP}(0)\vec{r}_{CP}^T - \vec{r}_{CP}\vec{r}_{CP}^T(0)\delta R^T] \right\} \vec{\omega}$$
$$= -\vec{\omega}^T \left\{ \sum_P m_P[\delta R\vec{r}_{CP}(0)\vec{r}_{CP}^T + \vec{r}_{CP}\vec{r}_{CP}^T(0)\delta R^T] \right\} \vec{\omega}$$
$$= -\vec{\omega}^T \left\{ \sum_P m_P \left[(\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi})R\vec{r}_{CP}(0)\vec{r}_{CP}^T \right.\right.$$
$$\left.\left. + \vec{r}_{CP}\vec{r}_{CP}^T(0)R^T(\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi})^T \right] \right\} \vec{\omega}$$
$$= -\vec{\omega}^T \left\{ \sum_P m_P \left[(\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi})\vec{r}_{CP}\vec{r}_{CP}^T + \vec{r}_{CP}\vec{r}_{CP}^T(\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi})^T \right] \right\} \vec{\omega}$$

$= 0$（对第二项转置）

$$\Rightarrow \delta\left(\frac{1}{2} I_{jk}\omega_j\omega_k\right) = \vec{J}\cdot\delta\vec{\omega}$$

变分

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\{\vec{J}\cdot\delta\vec{\omega}-\delta V[t,\vec{r}_{CP}]\}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\vec{J}\cdot\delta\dot{\vec{\varphi}}-\sum_P\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_{CP}}\cdot\delta\vec{r}_{CP}(t)\right\}dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\vec{J}\cdot\delta\dot{\vec{\varphi}}-\sum_P\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_{CP}}\delta R\vec{r}_{CP}(0)\right\}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\vec{J}\cdot\delta\dot{\vec{\varphi}}-\sum_P\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_{CP}}\cdot\left(\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi}\right)R\vec{r}_{CP}(0)\right\}dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\vec{J}\cdot\delta\dot{\vec{\varphi}}-\sum_P\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_{CP}}\cdot\left(\vec{X}\cdot\delta\vec{\varphi}\right)\vec{r}_{CP}(t)\right\}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\vec{J}\cdot\delta\dot{\vec{\varphi}}+\sum_P\vec{F}_{CP}\cdot\left(\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}_{CP}\right)\right\}dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\vec{J}\cdot\delta\dot{\vec{\varphi}}+\delta\vec{\varphi}\cdot\sum_P\left(\vec{r}_{CP}\times\vec{F}_{CP}\right)\right\}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\{-\dot{\vec{J}}+\vec{M}\right\}\cdot\delta\vec{\varphi}dt$$

刚体的运动方程

- 哈密顿原理

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left\{-\dot{\vec{J}}+\vec{M}\right\}\cdot\delta\vec{\varphi}dt=0$$

- $\delta\vec{\varphi}$是独立的变分

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt}=\vec{\omega}=\frac{e^{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}-\mathbf{1}}{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}\dot{\vec{\psi}}$$

$$\Rightarrow\delta\vec{\varphi}=\frac{e^{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}-\mathbf{1}}{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}\delta\vec{\psi}$$

$$\det\left(\frac{e^{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}-\mathbf{1}}{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}\right)\neq 0$$

- 刚体定点转动的运动方程，即角动量定理

$$\frac{d\vec{J}}{dt}=\vec{M}$$

欧拉动力学方程

- 惯性系的运动方程

$$\frac{d\vec{J}}{dt}=\vec{M}$$

- 在随体系转动惯量是常数，方便求解，

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}=R^{-1}\vec{M}$$

$$R^{-1}\frac{d\vec{J}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(R^{-1}\vec{J}\right)-\dot{R}^T\vec{J}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(R^{-1}\vec{J}\right)-\left(\dot{R}^T R\right)\left(R^{-1}\vec{J}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(R^{-1}\vec{J}\right)+\left(R^{-1}\dot{R}\right)\left(R^{-1}\vec{J}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(R^{-1}\vec{J}\right)+\left(\vec{\omega}'\cdot\vec{X}\right)\left(R^{-1}\vec{J}\right)$$

- 随体系的运动方程（by Lagrange）

$$\dot{J}_a+\varepsilon_{abc}\omega_b J_c=M_a$$

$$\frac{d\vec{J}'}{dt}+\vec{\omega}'\times\vec{J}'=\vec{M}'$$

- 在主轴系称为欧拉刚体动力学方程

$$\boxed{\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3=M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=M_3 \end{cases}}$$

后面省去随体系物理量上的"'"

- 无外力时，Euler动力学方程只涉及角速度，不涉及欧拉角，

——可以先解出角速度，然后代入运动学方程解出刚体的姿态。

欧拉陀螺

第一种可解模型

欧拉陀螺的首次积分

- 欧拉陀螺

不受外力矩，并且作定点转动的刚体，称为自由刚体或欧拉陀螺

$$L=\frac{1}{2}\sum_P m_P\dot{\vec{r}}_P^2$$
$$=\frac{1}{2}(I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2)$$

- 在主轴系的动力学方程

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1=(I_2-I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2\dot{\omega}_2=(I_3-I_1)\omega_3\omega_1 \\ I_3\dot{\omega}_3=(I_1-I_2)\omega_1\omega_2 \end{cases}$$

- 动能守恒：拉氏量不含时。

- 角动量守恒：

拉氏量转动对称，惯性系中角动量矢量守恒。

- 在随体系，

$\vec{J}'^2=$ 常数J^2 （转动不改变矢量模长）

欧拉陀螺的解

- 利用首次积分消去ω_1, ω_2，

$$\begin{cases} I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = J^2 \\ \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{(I_2 - I_3)I_3\omega_3^2 - 2I_2T + J^2}{(I_1 - I_2)I_1} \\ \omega_2^2 = \dfrac{(I_1 - I_3)I_3\omega_3^2 - 2I_1T + J^2}{(I_2 - I_1)I_2} \end{cases}$$

- 代入第三个Euler动力学方程

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_1\omega_2$$

- 积分即可解出$\omega_3(t)$（椭圆积分），是t的周期函数

可参考H.H蒲赫哥尔兹，《理论力学基本教程（下）》，第4章第7节。

- 把$\vec{\omega}(t)$再代入Euler运动学方程，（数值）积分可得角位移或欧拉角。

欧拉陀螺的稳定性

- 考虑无外力矩作用的自由刚体

$$I_1\dot{\omega}_1=(I_2-I_3)\omega_2\omega_3$$
$$I_2\dot{\omega}_2=(I_3-I_1)\omega_3\omega_1$$
$$I_3\dot{\omega}_3=(I_1-I_2)\omega_1\omega_2$$

设$I_1<I_2<I_3$

- 如果初始时刻刚体沿2轴转动，

$$\omega_1,\omega_3\sim 0,\qquad \omega_2\gg\omega_1,\omega_3$$

对第三个方程微商，得

$$I_1\ddot{\omega}_1=(I_2-I_3)\{\dot{\omega}_2\omega_3+\omega_2\dot{\omega}_3\}$$
$$=(I_2-I_3)\left\{\frac{(I_3-I_1)}{I_2}\omega_3\omega_1\omega_3+\omega_2\frac{(I_1-I_2)}{I_3}\omega_1\omega_2\right\}$$
$$=(I_2-I_3)\left\{\frac{(I_3-I_1)}{I_2}\omega_3^2+\frac{(I_1-I_2)}{I_3}\omega_2^2\right\}\omega_1$$
$$\approx(I_2-I_3)\frac{(I_1-I_2)}{I_3}\omega_2^2\omega_1$$
$$\ddot{\omega}_1=\text{正数}\times\omega_1$$

$\omega_1(t),\omega_3(t)$将指数增长，刚体角速度迅速偏离原本的方向。不稳定。

- 如果初始时刻刚体沿1轴转动，

$$\omega_2,\omega_3\sim 0,\qquad \omega_1\gg\omega_2,\omega_3$$

则

$$I_2\ddot{\omega}_2=(I_3-I_1)\{\dot{\omega}_3\omega_1+\omega_3\dot{\omega}_1\}$$
$$=(I_3-I_1)\left\{\frac{(I_1-I_2)}{I_3}\omega_1\omega_2\omega_1+\omega_3\frac{(I_2-I_3)}{I_1}\omega_2\omega_3\right\}$$
$$=-\left\{\frac{I_1-I_2}{I_3}(I_1-I_3)\omega_1^2+\frac{I_2-I_3}{I_1}(I_1-I_3)\omega_3^2\right\}\omega_2$$
$$\approx-\frac{I_1-I_2}{I_3}(I_1-I_3)\omega_1^2\omega_2$$
$$\ddot{\omega}_2=\text{负数}\times\omega_2$$

$\omega_1(t),\omega_3(t)$将类似三角函数震荡，刚体角速度方向基本保持不变。稳定。

- 网球拍定理：自由刚体沿着I_1,I_3方向的转动是稳定的，沿I_2方向的转动是不稳定的。

- 惯性导航：磁浮陀螺→MEMS，激光陀螺

Poinsot定理

- 在随体系中观察，设P点为惯量椭球与瞬轴的交点，
$$\vec{r}_p=\frac{\vec{n}}{\sqrt{I_n}}=\frac{\vec{\omega}}{\sqrt{I_n}\omega}=\frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}}$$
满足方程
$$I_1x_p^2+I_2y_p^2+I_3z_p^2=1$$

- 惯量椭球在P点的切平面法向是
$$\frac{1}{2}\nabla_P\left(I_1x_p^2+I_2y_p^2+I_3z_p^2\right)=\begin{pmatrix}I_1x_p & I_2y_p & I_3z_p\end{pmatrix}^T=\frac{\vec{J}}{\sqrt{2T}}$$

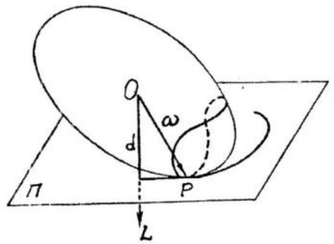
- 切平面方程是
$$\frac{\vec{J}}{\sqrt{2T}}\cdot\vec{r}=1$$
其中的截距利用椭球方程
$$\begin{pmatrix}I_1x_p & I_2y_p & I_3z_p\end{pmatrix}^T\cdot\vec{r}_p=1$$
求出。

- 在惯性系中看，切平面的法向是角动量，所以不变。

- 在惯性系中看，参考点（定点转动的定点，或质心参考系的质心）不动，且参考点到切平面的距离
$$\vec{r}_P\cdot\frac{\vec{J}}{|\vec{J}|}=\frac{\sqrt{2T}}{|\vec{J}|}$$
是常数。

- 总之，

切平面在惯性系中静止不动，惯量椭球在不动平面上作纯滚动。



对称欧拉陀螺-动力学方程的解

- 陀螺是对称的，
$$I_1 = I_2$$
且不受外力，在主轴系中动力学方程为
$$\begin{cases} 0 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1)\omega_2\omega_3 \\ 0 = I_1\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ 0 = I_3\dot{\omega}_3 \end{cases}$$

- 求解动力学方程，由第三个方程得
$$\omega_3 = 常数$$
- 记进动角速度为
$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_3 - I_1}{I_1}\omega_3$$

- 动力学方程成为
$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\Omega\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \Omega\omega_1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\omega}_1 = -\Omega^2\omega_1 \\ \ddot{\omega}_2 = -\Omega^2\omega_2 \end{cases}$$
解出
$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_h \cos(\Omega t + \alpha) \\ \omega_2 = \omega_h \sin(\Omega t + \alpha) \end{cases}$$
- 角速度的大小
$$\omega = \sqrt{\omega_3^2 + \omega_h^2}$$
是常数。
- 角速度矢端在主轴系水平面中的投影（模长是常数ω_h），以圆频率Ω作圆周运动。

规则进动

- 惯性系中角动量守恒，取之为惯性系的z轴方向

- 随体系角动量分量是

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J\sin\theta\sin\psi \\ J\sin\theta\cos\psi \\ J\cos\theta \end{pmatrix}$$

- 第三个动力学方程给出

$$0 = I_3 \dot{\omega}_3$$

即

$$\dot{J}_3 = I_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

$$\frac{d}{dt}(J\cos\theta) = 0$$

$$\theta(t) = \theta_0$$

- 对称欧拉陀螺自由运动，章动角不变，只有进动角和自转角在变化，称之为规则进动。

运动学方程的解

- 把动力学方程的解

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_h \cos(\Omega t + \alpha) \\ \omega_2 = \omega_h \sin(\Omega t + \alpha) \\ \omega_3 = \cos\theta_0\,\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}$$

代入欧拉运动学方程，

$$\begin{cases} \omega_1 = \sin\theta\sin\psi\,\dot{\phi} + \cos\psi\,\dot{\theta} \\ \omega_2 = \sin\theta\cos\psi\,\dot{\phi} - \sin\psi\,\dot{\theta} \\ \omega_3 = \cos\theta\,\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_h \cos(\Omega t + \alpha) = \sin\theta_0 \sin\psi\,\dot{\phi} \\ \omega_h \sin(\Omega t + \alpha) = \sin\theta_0 \cos\psi\,\dot{\phi} \\ \omega_3 = \cos\theta_0\,\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{cases}$$

- 前两个方程相除解出$\psi(t)$，

$$\psi(t) = \frac{\pi}{2} - (\Omega t + \alpha) \equiv -\Omega t + \psi_0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \psi_0$$

- 再代入第三式解出$\dot{\phi}$，对时间积分，

$$\phi(t) = \frac{\omega_3 + \Omega}{\cos\theta_0} t + \phi_0$$

- 欧拉角表达式中独立积分常数为$\{\theta_0, \psi_0, \phi_0, \omega_3\}$
- 也可以利用

$$\omega_3 = \frac{J\cos\theta_0}{I_3}$$

保留$\{\theta_0, \psi_0, \phi_0, J\}$这几个独立积分常数，

$$\phi = \frac{J}{I_1} t + \phi_0$$

$$\theta = \theta_0$$

$$\psi = -\frac{(I_3 - I_1) J \cos\theta_0}{I_1 I_3} t + \psi_0$$

空间锥面

- 惯性系的角速度

$$\begin{cases}\omega_x = \cos\phi\,\dot\theta + \sin\phi\sin\theta\,\dot\psi \\ \omega_y = \sin\phi\,\dot\theta - \cos\phi\sin\theta\,\dot\psi \\ \omega_z = \dot\phi + \cos\theta\,\dot\psi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\omega_x = \dfrac{I_3 - I_1}{2I_1 I_3} J\sin 2\theta_0 \cos\left(\dfrac{J}{I_1}t + \phi_0 + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \omega_y = \dfrac{I_3 - I_1}{2I_1 I_3} J\sin 2\theta_0 \sin\left(\dfrac{J}{I_1}t + \phi_0 + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \omega_z = \dfrac{(I_1 + I_3) + (I_1 - I_3)\cos 2\theta_0}{2I_1 I_3} J\end{cases}$$

- 角速度在惯性系与z-轴的夹角正切值为

$$\frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\omega_z} = \frac{(I_3 - I_1)\sin 2\theta_0}{(I_1 + I_3) + (I_1 - I_3)\cos 2\theta_0}$$

是常数，夹角不变

- 由左侧的角速度表达式，瞬轴以进动角速度J/I_1绕z-轴逆时针旋转。
- 瞬轴在空间扫过一个锥面，称为空间锥面

本体锥面

- 在主轴系的角速度分量

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{J\sin\theta_0}{I_1}\cos\left(\Omega t + \dfrac{\pi}{2} - \psi_0\right) \\ \omega_2 = \dfrac{J\sin\theta_0}{I_1}\sin\left(\Omega t + \dfrac{\pi}{2} - \psi_0\right) \\ \omega_3 = \dfrac{J\cos\theta_0}{I_3} \end{cases}$$

- 角速度与z'-轴的夹角正切值为

$$\frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega_3} = \frac{I_3}{I_1}\tan\theta_0$$

是常数

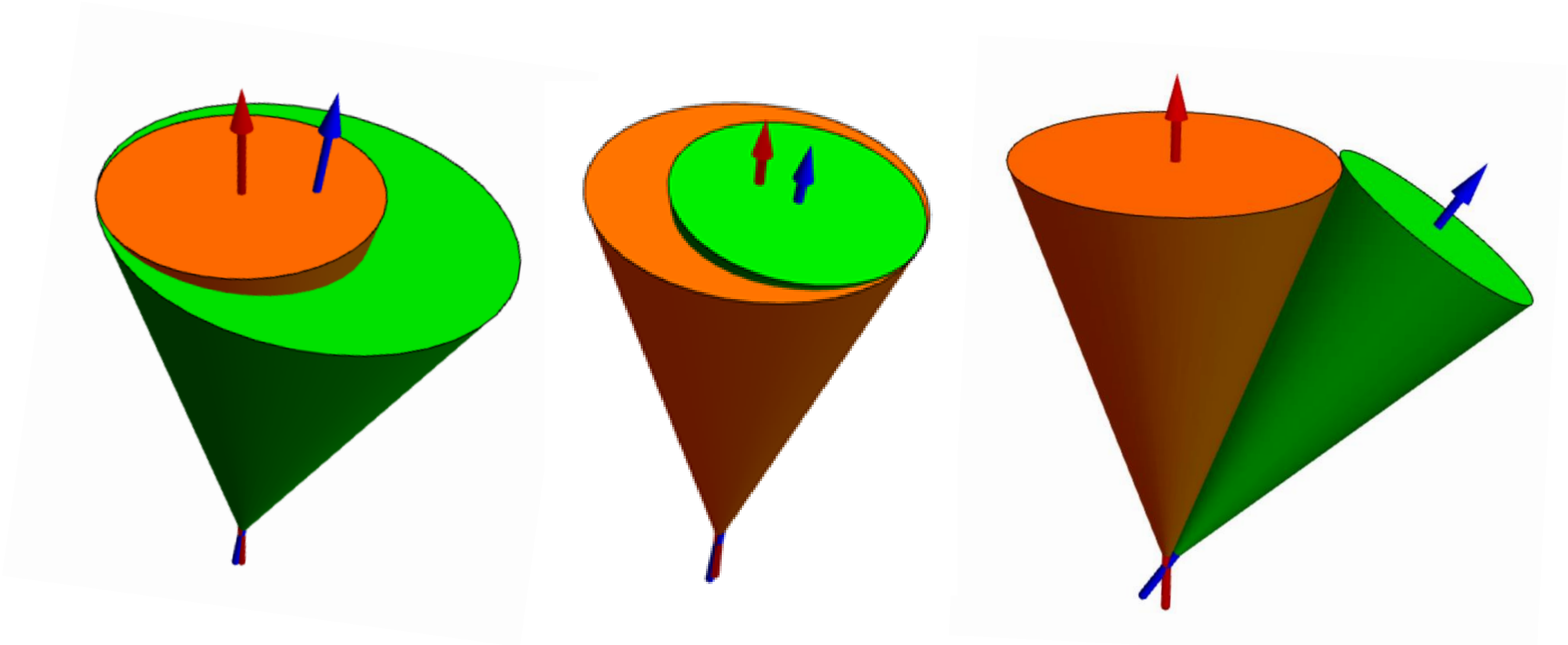
- 由左侧的表达式，角速度绕3-轴以圆频率Ω旋转，夹角不变
- 瞬轴在主轴系扫过的轨迹称为本体锥面

本体锥面与空间锥面

- 定点转动的瞬轴上各点速度为零
- 所以本体锥面（绿色）在空间锥面（橙色）上作无滑滚动。

瞬轴、角动量和第3轴三线共面：

$$\vec{\omega}\cdot\left(\vec{J}\times\vec{e}_3\right)=\begin{vmatrix}\omega_1 & I_1\omega_1 & 0\\ \omega_2 & I_1\omega_2 & 0\\ \omega_3 & I_3\omega_3 & 1\end{vmatrix}=0$$



红色箭头是角动量方向，蓝色箭头是第3主轴

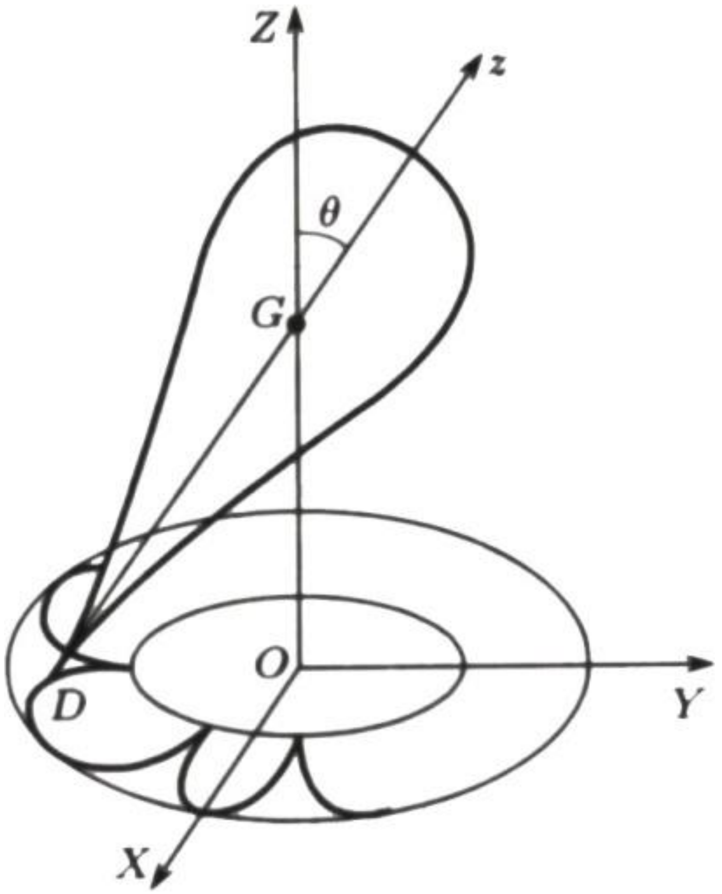
拉格朗日陀螺

第二种可解模型

拉格朗日陀螺的拉氏函数

- **对称重陀螺**又称拉格朗日陀螺
  定点转动
  对称（主轴惯量$I_1 = I_2$）
  质心在第三轴上（到参考点距离为l）
- 拉格朗日函数

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 - V$$
$$= \frac{I_1}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right)$$
$$+ \frac{I_3}{2} \left(\cos\theta \, \dot{\phi} + \dot{\psi} \right)^2 - mgl \cos\theta$$



守恒量和等效拉氏函数

- 首次积分

  ❶拉氏量不含ψ，p_ψ守恒，

  $$p_\psi = I_3\left(\cos\theta\,\dot\phi + \dot\psi\right) = I_3\omega_3 = J_3$$

  ❷拉氏量不含ϕ，p_ϕ守恒，

  $$p_\phi = I_1\dot\phi\sin^2\theta + I_3\left(\cos\theta\,\dot\phi + \dot\psi\right)\cos\theta$$
  $$= I_1\dot\phi\sin^2\theta + J_3\cos\theta = J_z$$

  ❸拉氏量不含时，机械能守恒，

  $$\frac{I_1}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\right) + \frac{J_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta = E$$

- 由前两个守恒量可解出

  $$\begin{cases} \dot\phi = \dfrac{J_z - J_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} \\ \dot\psi = \dfrac{J_3}{I_3} - \dfrac{J_z - J_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\cos\theta \end{cases}$$

- 作Routh变换消去循环坐标，得等效拉氏量

  $$L_{\text{eff}}\left(\theta,\dot\theta\right) = \frac{1}{2}I_1\dot\theta^2 - V_{\text{eff}}(\theta)$$

  $$V_{\text{eff}}(\theta) \overset{\text{def}}{=} \frac{(J_z - J_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + mgl\cos\theta + \frac{J_3^2}{2I_3}$$

  在$\theta = 0,\pi$时势能为正无穷。

求解

- 系统不含时，广义能量守恒，

$$\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) = E$$

- 变量代换

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \cos\theta$$

广义能量守恒成为

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_3} - \frac{2mgl}{I_1}u\right)(1-u^2) - \frac{(J_z - J_3 u)^2}{I_1^2}$$

- 利用此方程解出$\dot{u}$，
- 积分可求得$\theta(t)$；
- 代回可得$\dot{\phi},\dot{\psi}$表达式；
- 再积分可得所有欧拉角。

- 解析结果为椭圆积分，略

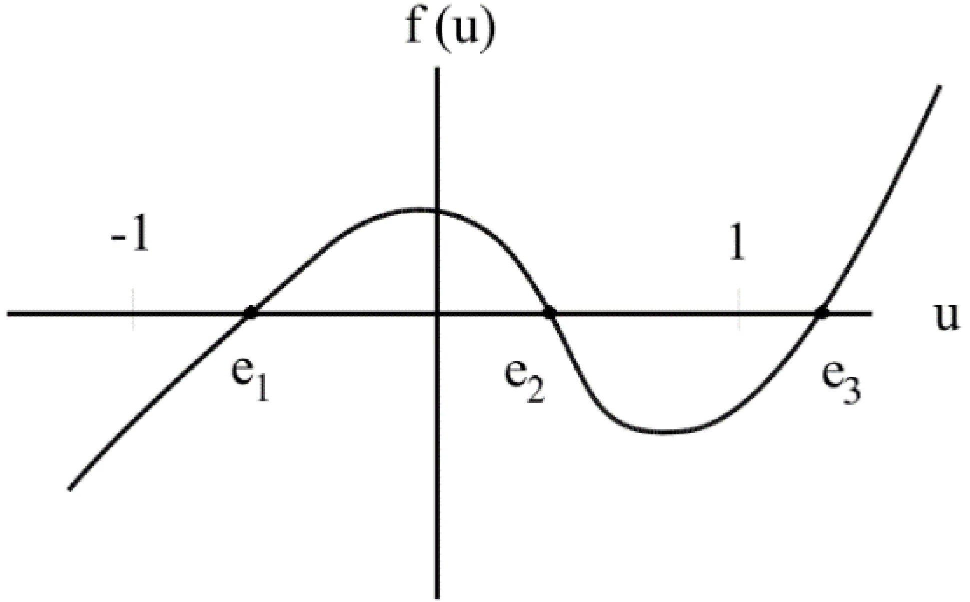
章动角的变化范围

- 章动角取得极值处，

$$\dot{u}=0$$

$$\Rightarrow \dot{u}^2=f(u)$$

$$\stackrel{\text{def}}{\equiv}\left(\frac{2E}{I_1}-\frac{J_3^2}{I_1I_3}-\frac{2mgl}{I_1}u\right)(1-u^2)-\frac{(J_z-J_3u)^2}{I_1^2}=0$$



- 三次多项式，有三个根
- $u\to+\infty$时$f(u)\to+\infty$，且$f(1)<0$，必有一根大于1。

  舍弃此根。
- 考虑稳定进动，即

$$\exists u_0\in(-1,1)使\dot{u}^2(u_0)>0$$

或

$$\exists u_0\in(-1,1),\quad f(u_0)>0$$

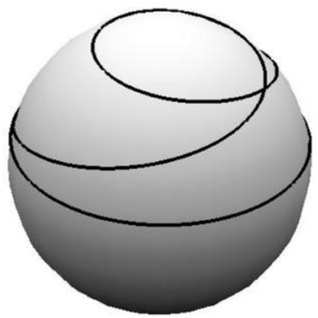
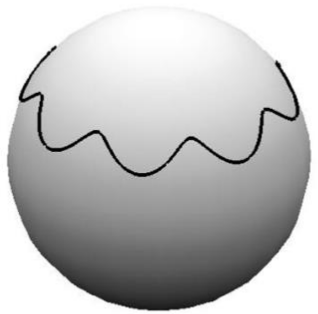
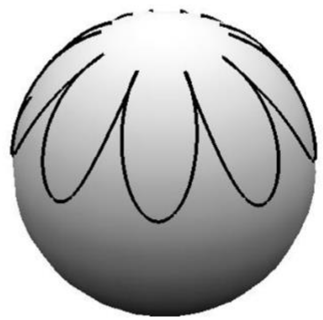
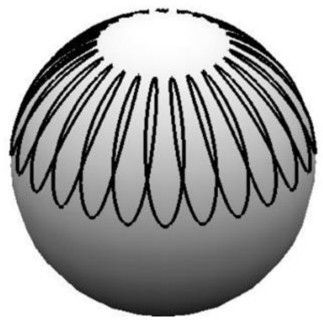
- 端点处$f(\pm1)<0$（直立陀螺除外），所以这时方程在$[-1,1]$区间有且只有两根（不是重根），分别是章动角的最大值和最小值。

第3主轴的轨迹

- 按欧拉角的定义，第3主轴的纬度θ、经度为ϕ
- 第三主轴的进动角速度是

$$\dot{\phi} = \frac{J_z - J_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} = a(\theta)$$

1. $\forall\theta \in [\theta_1, \theta_2]$，$\dot{\phi} = a(\theta) \neq 0$时，第3轴向同一方向不折回地进动（前两张图）；
2. $a(\theta_1) = 0 | a(\theta_2) = 0$，第3轴轨迹是带尖点的曲线（第三张图，比如把倾斜且自转的陀螺放开的情形就是如此）；
3. $\exists\theta \in (\theta_1, \theta_2), a(\theta) = 0$，则轨迹为带圈的曲线（第四张图）。

回转仪的特性

- 对称快陀螺又称回转仪
- 其转动动能远大于重力势能

- 快速抛出的快陀螺：捏住陀螺的对称轴，使陀螺高速自转，然后释放陀螺。

$$\dot{\theta}(0)=0,\qquad \dot{\phi}(0)=0,\qquad \dot{\psi}(0)\neq 0$$

这是前面第三轴轨迹为带尖点曲线的情形

- 推论1

$$\theta(0)=\theta_1$$

是章动角的最小值。

证明 参考讲稿

$$\left(\frac{2E}{I_1}-\frac{J_3^2}{I_1 I_3}-\frac{2mgl}{I_1}u_2\right)(1-u_2^2)-\frac{(J_z-J_3u_2)^2}{I_1^2}=0$$

$$\Rightarrow u_2\approx u_1-\frac{1}{p}(1-u_1^2)-\frac{2}{p^2}u_1(1-u_1^2)+\mathcal{O}(p^{-3})$$

回转仪的特性

- 推论2 初始时转速越快，章动范围越小。

证明 由于快陀螺的章动角变化范围很小，记

$$w = u_1 - u$$

广义能量守恒即方程

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{J_3^2}{I_1 I_3} - \frac{2mgl}{I_1}u\right)(1-u^2) - \frac{(J_z - J_3 u)^2}{I_1^2}$$

$$\dot{w}^2 = \frac{2mgl}{I_1}(1-u_1^2)w - \frac{J_3^2}{I_1^2}w^2 + \mathcal{O}(p^{-2})$$

$$\ddot{w} = \frac{mgl}{I_1}(1-u_1^2) - \frac{J_3^2}{I_1^2}w$$

$$w(t) = \frac{mglI_1}{J_3^2}(1-u_1^2)\left\{1 - \cos\left(\frac{J_3}{I_1}t\right)\right\}$$

- 推论3 章动角$\theta(t)$随时间按三角函数震荡。

证明 左侧最后一式即

$$u(t) = u_1 - \frac{mglI_1}{J_3^2}(1-u_1^2)\left\{1 - \cos\left(\frac{J_3}{I_1}t\right)\right\}$$

- 推论4 初速越快，进动越慢。

证明 进动角速度为

$$\dot{\phi} = \frac{J_z - J_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} \xrightarrow{J_z = J_3\cos\theta_1} \dot{\phi} = \frac{J_3}{I_1}\frac{\cos\theta_1 - \cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{J_3}{I_1}\frac{w}{1-(u_1-w)^2}$$

取平均，

$$\langle\dot{\phi}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \dot{\phi}\,dt \approx \frac{J_3}{I_1(1-u_1^2)}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T w\,dt$$

$$= \frac{J_3}{I_1}\frac{mglI_1}{J_3^2} = \frac{mgl}{I_3\omega_3}$$

拉莫尔进动

- 原子核外电子在高速旋转，在外磁场中有势能

$$V=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}=\mu B\cos\theta$$

- 在上一章中，我们曾用泊松代数求解过进动角速度

- 类比：与对称重陀螺势能的表达式形式相同，相当于快陀螺，进动角速度为

$$\frac{mgl}{J_3}\to\frac{\mu B}{J_3}=\frac{ef\pi a^2 B}{m\omega a^2}=\frac{eB}{2m}$$

- 法兰西科学院1888年有奖征解
- 对称陀螺

$$I_1 = I_2 = 2I_3$$

- 有重力
- 质心在赤道面内
- 实用场景受限，略

俄国女数学家柯瓦列夫斯卡娅
Софья Васильевна Ковалевская
1850.1.15 – 1891.2.10

KOWALEWSKAJA解

第三种可解模型