一、 (12 分) 设 A, B 是某个概率空间中的两个事件, 满足 $0 < \mathrm{P}(A) < 1$, $0 < \mathrm{P}(B) < 1$, 且 $\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B)$, 试判断以下几个不等式是否正确，并详细说明理由.

(1) $\mathrm{P}(B^c|A^c) > \mathrm{P}(B^c)$;

(2) $\mathrm{P}(A^c|B^c) > \mathrm{P}(A^c)$;

(3) $\mathrm{P}(B|A^c) > \mathrm{P}(B)$;

(4) $\mathrm{P}(A|B) > \mathrm{P}(A)$.

二、 (16 分) 一个盒子中装有编号分别为 $1, 2, \ldots, 10$ 的大小相同的小球, 现有放回地从盒中每次随机摸取一个球, 记录其号码, 试验一直进行到摸出 10 个偶数号码的小球才停止. 以 X 记号码 2 被摸出的次数, 以 Y 表示号码 1, 3, 5 一共被摸出的次数. 分别求 X 和 Y 的概率分布.

三、 (16 分) 甲有硬币 15 枚, 乙有硬币 10 枚，两人玩一场公平游戏. 在每一局中, 每人获胜的概率相同, 获胜者从对方手中拿走一枚硬币. 当一个人手中拥有所有的 25 枚硬币, 游戏结束, 且该人获得最终胜利. 求甲最终取胜的概率.

四、 (20 分) 在区间 $(0,1)$ 上随机地选择一个点 X, 然后以 $1/3$ 的概率在区间 $(X,1)$ 上随机选择一个点 Y, 或以 $2/3$ 的概率在区间 $(0,X)$ 上随机选择一个点 Y.

(1) 求 (X,Y) 的联合概率密度函数;

(2) 求 Y 的边际概率密度.

五、 (18 分) 设 $\phi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 分别表示标准正态分布的概率密度函数和分布函数, 对任意常数 $\lambda, \gamma \in \Re$, 记函数

$$f(x) = 2\phi(x)\Phi(\lambda x), \quad x \in \Re,$$
$$g(x, y) = 2\phi(x)\phi(y)\Phi(\lambda x + \mu y), \quad (x, y) \in \Re^2.$$

(1) 证明: $f(x)$ 为某个随机变量的概率密度函数.

(2) 证明: $g(x, y)$ 为某个二维随机向量的概率密度函数.

(3) 若随机变量 X 的概率密度函数为如上定义的 $f(x)$, 试求$|X|$ 的概率密度函数.

六、 (18 分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布.

(1) 对任意常数 $c > 0$, 试求 cX 的分布.

(2) 记 $U = \max\{X, Y\}$, 试证明 U 与 $X + \frac{1}{2}Y$ 同分布.

(3) 请用指数分布的特殊性质对 (2) 中的性质给予解释.

【题 1】（18 分）

《伊索寓言》中狼来了的故事大家耳熟能详. 假设一个可信的孩子说谎的概率是 0.1, 一个不可信的孩子说谎的概率是 0.6. 假设村民对一个小孩（记为 W）的印象是该小孩可信度（可信的概率）是 0.8.

(1) 当第一次村民上山打狼，发现狼没有来（即小孩 W 撒了谎），此时村民对小孩 W 的可信度看法将如何改变？

(2) 当第二次村民上山打狼，发现狼没有来（即小孩 W 又撒了谎），此时问此时村民对小孩 W 的可信度看法又将如何改变？

(3) 上面两小题说明了什么道理？

【题 2】（16 分）

甲乙两人玩轮流抛掷硬币的游戏，约定：如果连续两个正面比连续两个反面先出现，那么甲赢；否则乙赢. 假设每次抛掷是独立地进行，正面出现的概率均为 p, $0 < p < 1$, 则最终甲赢的概率是多少？

【题 3】(16 分)

设随机变量 $X \sim U(0,1)$, $Z \sim U(0,\beta)$ 和 $Y \sim U(\beta,1)$, 其中 $\beta \in (0,1)$ 为一个常数，且 X, Y, Z 相互独立. 定义一个新的随机变量

$$W = I(X \le \beta)\,Z + I(X > \beta)\,Y,$$

其中 $I(A)$ 表示事件 A 的示性变量. 证明 $W \sim U(0,1)$.

证明: 对任意 $x \in (0,1)$, 利用全概率公式以及随机变量 X, Y, Z 的独立性得

$$\begin{aligned} P(W \le x) &= \mathrm{P}\,(W \le x | X \le \beta)\beta + \mathrm{P}\,(W \le x | X > \beta)(1-\beta) \\ &= \mathrm{P}\,(Z \le x | X \le \beta)\beta + \mathrm{P}\,(Y \le x | X > \beta)(1-\beta) \\ &= \frac{x \wedge \beta}{\beta}\beta + \frac{(x-\beta)_+}{1-\beta}(1-\beta) = x, \end{aligned}$$

即 $W \sim U(0,1)$. ∎

【题 5】(18 分)

设 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-x-y}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 问 X 与 Y 是否独立?

(2) 求 $W = X + Y$ 和 $Z = X + 2Y$ 的联合概率密度函数, 并指出 W 服从什么分布.

(3) 给定 $W = w$, 求 Z 的条件概率密度，并指出该密度函数对应的分布.

【题 6】 (16 分)

设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个独立同分布的随机变量序列, 共同的分布函数为 $F(x)$, 对应的概率密度函数为 $f(x)$. 记

$$N = \min\{n : X_n > X_0, n \geq 1\}.$$

(1) 求 N 的分布律.

(2) 证明 X_N 的概率密度函数为

$$g(x) = -f(x)\ln[1 - F(x)], \quad x \in \Re.$$

【题 6】(16 分)

设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个独立同分布的随机变量序列，共同的分布函数为 $F(x)$，对应的概率密度函数为 $f(x)$. 记

$$N = \min\{n : X_n > X_0, n \geq 1\}.$$

(1) 求 N 的分布律.

(2) 证明 X_N 的概率密度函数为

$$g(x) = -f(x) \ln[1 - F(x)], \quad x \in \Re.$$