1 分离变量法

在上一章中，我们已经清楚了解如何将非齐次定解问题化为齐次定解问题，在这一章及下一章中我们将使用分离变量法处理齐次定解问题。分离变量一般适用范围：方程齐次，边界条件齐次。

1.1 分离变量

1.1.1 弦振动方程分离变量

我们首先看弦振动方程的分离变量法。我们以两端固定的例子（即书上的例子）为例：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, 0\le x\le l, 0\le t<+\infty \\ u(0,x)=\varphi(x), u_t(0,x)=\psi(x), 0\le x\le l \\ u(t,0)=0, u(t,l)=0, 0\le t<+\infty. \end{cases}$$

解. 求出所有形如$T(t)X(x)$ 的非零解，做线性叠加，求出线性叠加的系数。首先分离变量，我们假设

$$u(t,x)=T(t)X(x).$$

带入泛定方程可得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

上式左边为t的函数，右边为x的函数，因而肯定为常值，设为$-\lambda$。从而我们得到以下固有值问题：

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, 0\le x\le l \\ X(0)=0, X(l)=0. \end{cases}$$

(由边界条件$T(t)X(0)=0$，从而仅当$X(0)=0$ 的时候有非零解。）以及

$$T''(t)+\lambda a^2T=0.$$

分情况讨论：

(1) $\lambda<0$时，不妨设$\lambda=-k^2$,$(k>0)$，则

$$X''-k^2X=0.$$

$X=C_1e^{kx}+C_2e^{-kx}$。带入边界条件

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ C_1e^{kl}+C_2e^{-kl}=0. \end{cases}$$

二阶矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{kl} & e^{-kl} \end{pmatrix}.$$

的行列式$=e^{-kl}-e^{kl}\ne 0$。因而方程组只有零解，即$C_1=C_2=0$。这种情况舍去。

(2) $\lambda = 0$时，$X = C_1 x + C_2$。带入边界条件

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 l + C_2 = 0. \end{cases}$$

解之，$C_1 = C_2 = 0$。这种情况舍去。

(3) $\lambda > 0$时，$X = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$。带入边界条件

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos(\sqrt{\lambda}l) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases}$$

解之，得到$C_1 = 0$ 以及当

$$\sqrt{\lambda}l = n\pi, n = 1, 2, 3 \cdots$$

时，有非零解。我们不妨将所有使得固有值问题有非零解的λ 的取值称为固有值，对应的函数称为固有函数。例如

$$\text{固有值：}\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \text{对应固有函数：}X_n = \sin(\frac{n\pi x}{l}), n = 1, 2, 3 \cdots.$$

固定λ_n，则可以得到对应T_n的常微分方程：

$$T_n'' = -\lambda_n a^2 T_n = -\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n.$$

解得

$$T_n(t) = A_n \cos(\frac{n\pi at}{l}) + B_n \sin(\frac{n\pi at}{l}), n = 1, 2 \cdots.$$

整理得原定解问题的解为

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos(\frac{n\pi at}{l}) + B_n \sin(\frac{n\pi at}{l})\right) \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

最后一步，对初始条件做傅里叶展开，通过系数对应确定A_n和B_n的取值。对$\varphi(x)$ 做傅里叶展开

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

其中

$$c_n = \frac{\langle \varphi, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin(\frac{n\pi s}{l}) ds.$$

这里$\langle f, g \rangle = \int_0^l f(s) g(s) ds$。同理对$\psi(x)$ 做傅里叶展开

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

其中

$$d_n = \frac{\langle \psi, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(s) \sin(\frac{n\pi s}{l}) ds.$$

令$t=0$并对照，我们可以得到：

$$\begin{cases} A_n = c_n \\ \frac{n\pi a}{l} B_n = d_n. \end{cases}$$

解之，

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds \\ B_n = \frac{l}{n\pi a}\frac{2}{l}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds. \end{cases}$$

定解问题的解为

$$u(t,x) = \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds\cos(\frac{n\pi at}{l})\right. \\ \qquad \left. + \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{n\pi s}{l})ds\sin(\frac{n\pi at}{l})\right)\sin(\frac{n\pi x}{l}). \end{array}$$

在解中，我们称$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$为固有频率，与初始条件的选取无关。称$\omega_1 = \frac{\pi a}{l}$为基频，其余为倍频。回忆$a=\sqrt{T/\rho}$，我们有

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{T/\rho}.$$

基频

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{T/\rho}.$$

可以看出：想要让频率变高，我们需要降低密度，降低弦长，增大张力；反之如果想要让频率变低，我们需要增加密度，增加弦长，降低张力。一般来说，基频越高声音越尖锐，反之越低沉。

”大提琴声音低沉小提琴响亮这是跟琴弦的震动频率和琴箱相联系的 弦越细震动频率越大，声音就越高，你没发现小提琴的弦比大提琴的细很多吗，另外琴箱大的声音也会低沉一些。“

”随这年龄的增长人的声带会变粗，说话时声带的振幅会随着年龄的增长而减小，从而使声音变粗。声带长厚了，所以发音就浑浊了。就像琴弦，越细的声音越清脆，越粗的越低沉浑厚。“

”男女说话的声音音调不一样，就是由于男人与女人声带的长短粗细有差别。“

我们还是用上一章的例子：

例子1. 一根长为l的理想弦，一端固定$x=0$处，另一端$x=l$在竖直方向自由运动，无外力作用，初始位置为$\varphi(x)$，初始速度$\psi(x)$。写出定解问题并求解。

解. 定解问题为：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x), 0 \le x \le l \\ u(t,0) = 0, u_x(t,l) = 0, 0 \le t < +\infty. \end{cases}$$

首先分离变量，我们假设

$$u(t,x) = T(t)X(x).$$

带入泛定方程可得

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

上式左边为t的函数，右边为x的函数，因而肯定为常值，设为$-\lambda$。从而我们得到以下固有值问题：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, 0 \le x \le l \\ X(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$$

以及

$$T''(t) + \lambda a^2 T = 0.$$

分情况讨论：

(1) $\lambda < 0$时，$X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$。带入边界条件得到$C_1 = C_2 = 0$。舍去。

(2) $\lambda = 0$时，$X = C_1 x + C_2$。带入边界条件得到$C_1 = C_2 = 0$。舍去。

(3) $\lambda > 0$时，$X = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$。带入边界条件带入边界条件

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ -C_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l) + C_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases}$$

得到$C_1 = 0$ 以及

$$\sqrt{\lambda}l = n\pi - \frac{\pi}{2}, n = 1, 2, 3\cdots.$$

固有值和固有函数为：

$$\text{固有值:}\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2 \text{对应固有函数:}X_n = \sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

固定λ_n，则可以得到对应T_n的常微分方程：

$$T_n'' = -\lambda_n a^2 T_n = -\left(\frac{(2n-1)\pi a}{2l}\right)^2 T_n.$$

解得

$$T_n(t) = A_n \cos(\frac{(2n-1)\pi at}{2l}) + B_n \sin(\frac{(2n-1)\pi at}{2l}), n = 0, 1, 2\cdots.$$

整理得原定解问题的解为

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos(\frac{(2n-1)\pi at}{2l}) + B_n \sin(\frac{(2n-1)\pi at}{2l})\right)\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

最后一步，确定A_n和B_n的取值。对$\varphi(x)$做展开

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

其中

$$c_n = \frac{\langle\varphi, X_n\rangle}{\langle X_n, X_n\rangle} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\frac{(2n-1)\pi s}{2l})ds.$$

同理对$\psi(x)$做展开

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}).$$

其中

$$d_n = \frac{\langle\psi, X_n\rangle}{\langle X_n, X_n\rangle} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{(2n-1)\pi s}{2l})ds.$$

令$t=0$并对照，我们可以得到：

$$\begin{cases} A_n = c_n \\ B_n = \frac{2l}{(2n+1)\pi a} d_n. \end{cases}$$

定解问题的解为

$$\tilde{u}(t,x) = \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\frac{(2n-1)\pi s}{2l})ds\cos(\frac{(2n-1)\pi at}{2l}) \\ \quad + \frac{4}{(2n-1)\pi a}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{(2n-1)\pi s}{2l})ds\sin(\frac{(2n-1)\pi at}{2l})\Big)\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}). \end{array}$$

1.1.2 热方程的分离变量

在这一节中，我们讨论一维热方程的分离变量。

例子2. 一根长为l的由理想介质组成的细杆(两端点分别为$0,l$)，全身绝热，内部无热源，初始温度为x。写出定解问题并求解。

解. 定解问题为：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = x, , 0 \le x \le l \\ u_x(t,0) = 0, u_x(t,l) = 0, 0 \le t < +\infty. \end{cases}$$

首先分离变量，我们假设

$$u(t,x) = T(t)X(x).$$

带入泛定方程可得

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

上式左边为t的函数，右边为x的函数，因而肯定为常值，设为$-\lambda$。从而我们得到X的常微分方程和边界条件：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, 0 \le x \le l \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$$

分情况讨论：

(1) $\lambda < 0$时，$X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$。带入边界条件得到$C_1 = C_2 = 0$。舍去。

(2) $\lambda = 0$时，$X = C_1 x + C_2$。带入边界条件得到$C_1 = 0$，C_2可以不等于0。固有值$\lambda_0 = 0$，对应固有函数$X_0 = 1$，$T_0 = A_0$。

(3) $\lambda > 0$时，记$X = C_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$。带入边界条件得到$C_2 = 0$ 以及

$$\sqrt{\lambda}l = n\pi, n = 1, 2, 3\cdots.$$

$$\text{固有值:}\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \text{对应固有函数:}X_n = \cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

固定λ_n，则可以得到对应T_n的常微分方程：

$$T_n' = -\lambda_n a^2 T_n.$$

解得

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}t}, n = 1, 2\cdots.$$

整理得原定解问题的解为

$$u(t,x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

最后一步，确定A_n的取值。对初始条件做展开

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

其中

$$c_n = \frac{\langle x, X_n\rangle}{\langle X_n, X_n\rangle} = \frac{2}{l}\int_0^l s\cos(\frac{n\pi s}{l})ds = \frac{2l((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}, \quad n = 1,2,3,\cdots,$$

$$c_0 = \frac{\langle x, X_0\rangle}{\langle X_0, X_0\rangle} = \frac{l}{2}$$

令$t=0$并对照，我们可以得到：

$$A_n = c_n, n = 0,1,2\cdots.$$

定解问题的解为

$$u(t,x) = \frac{l}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l((-1)^n-1)}{n^2\pi^2} e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \cos(\frac{n\pi x}{l}).$$

注意到当n为偶数时，对应项为0，从而

$$u(t,x) = \frac{l}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4l}{(2n+1)^2\pi^2} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t} \cos(\frac{(2n+1)\pi x}{l}).$$

1.1.3 泊松方程的分离变量

例子3. 有一块$[0,1]\times[0,1]$的正方形金属片，内部无热源，表面绝热且处于热平衡状态，已知$x=0$,$y=0,y=1$温度分别为$0,\varphi(x),\psi(x)$。$x=1$与温度为0的介质接触，热交换系数和热传导系数为1。试用分离变量法求出它内部的温度分布。

解. 写出定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy} = 0, 0\le x,y\le 1 \\ u(0,y) = 0, u(1,y)+u_x(1,y) = 0, 0\le y\le 1 \\ u(x,0) = \varphi, u(x,1) = \psi, 0\le x\le 1. \end{cases}$$

分离变量，假设

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

带入泛定方程可得

$$-\frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X}.$$

上式肯定为常值，设为$-\lambda$。从而我们得到X 的固有值问题：

$$\begin{cases} X''+\lambda X = 0, 0\le x\le 1 \\ X(0) = 0, X'(1)+X(1) = 0. \end{cases}$$

以及

$$Y'' - \lambda Y = 0.$$

分情况讨论：

(1) $\lambda < 0$时，$X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$。带入边界条件得到$C_1 = C_2 = 0$。舍去。

(2) $\lambda = 0$时，$X = C_1 x + C_2$。带入边界条件得到$C_1 = C_2 = 0$，舍去。

(3) $\lambda > 0$时，记$X = C_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$。带入边界条件$x = 0$得到$C_1 = 0$ 以及

$$\sin(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

如果假设$k = \sqrt{\lambda}$，则我们需要求出

$$k = -\tan(k)$$

的所有正根$k_n, n \geq 1$，这活就交给计算机了。假设我们已经知道了k_n，则对应固有值$\lambda_n = k_n^2$，固有函数$X_n = \sin(k_n x)$，带入Y 的常微分方程，得

$$Y_n'' - k_n^2 Y_n = 0.$$

解得

$$Y_n = A_n e^{k_n y} + B_n e^{-k_n y}.$$

从而定解问题的解为

$$u(x, y) = \sum_{n\geq 1}(A_n e^{k_n y} + B_n e^{-k_n y})\sin(k_n x).$$

为了对φ 和ψ 做傅里叶展开，我们计算

$$\begin{aligned}
\langle X_n, X_n\rangle &= \int_0^1 \sin^2(k_n s)ds = \int_0^1 \frac{1-\cos(2k_n s)}{2}ds \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sin(2k_n s)}{4k_n}\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sin(2k_n)}{4k_n} = \frac{1}{2} - \frac{2\tan(k_n)}{4k_n(1+\tan^2(k_n))} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2k_n}{4k_n(1+k_n^2)} = \frac{2+k_n^2}{2(1+k_n^2)}.
\end{aligned}$$

从而

$$\varphi = \sum_{n\geq 1}\frac{2(1+k_n^2)}{2+k_n^2}\int_0^1 \varphi(s)\sin(k_n s)ds\sin(k_n x).$$

$$\psi = \sum_{n\geq 1}\frac{2(1+k_n^2)}{2+k_n^2}\int_0^1 \psi(s)\sin(k_n s)ds\sin(k_n x).$$

对照得

$$\begin{cases}
A_n + B_n = \frac{2(1+k_n^2)}{2+k_n^2}\int_0^1 \varphi(s)\sin(k_n s)ds \\
A_n e^{k_n} + B_n e^{-k_n} = \frac{2(1+k_n^2)}{2+k_n^2}\int_0^1 \psi(s)\sin(k_n s)ds.
\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_n = \frac{2(1+k_n^2)}{(2+k_n^2)(e^{-k_n}-e^{k_n})}\left(e^{-k_n}\int_0^1\varphi(s)\sin(k_ns)ds-\int_0^1\psi(s)\sin(k_ns)ds\right) \\ B_n = \frac{2(1+k_n^2)}{(2+k_n^2)(e^{k_n}-e^{-k_n})}\left(e^{k_n}\int_0^1\varphi(s)\sin(k_ns)ds-\int_0^1\psi(s)\sin(k_ns)ds\right). \end{cases}$$

最后结果就不写了，太长了。所有这些都可以交给计算机处理。

例子4 (平面极坐标分离变量)**.** 有个理想金属圆盘，厚度忽略不计，半径为R，没有热源，圆周上的温度为$\varphi=\varphi(\theta)$，上下面绝热。已知金属圆盘处于热平衡，求内部温度分布。

解. 平面拉普拉斯算子在极坐标$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 下可以表示为

$$\Delta_2=\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta^2}$$

我们首先写出定解问题，既然是圆盘，我们用极坐标$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

$$\begin{cases} \Delta_2 u=\frac{\partial u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta^2}=0, 0\le r\le R, 0\le\theta\le 2\pi \\ u(1,\theta)=\varphi(\theta), \theta\in[0,2\pi) \end{cases}$$

分离变量，设$u=R\Theta, R=R(r), \Theta=\Theta(\theta)$，则有

$$-\frac{r^2R''+rR'}{R}=\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

设$\frac{\Theta''}{\Theta}=-\lambda$，得到固有值问题

$$\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0, 0\le\theta\le 2\pi \\ \Theta(0)=\Theta(2\pi), \Theta'(0)=\Theta'(2\pi). \end{cases}$$

解得固有值及对应固有函数：$\lambda_0=0, \Theta_0=1$，$\lambda_n=n^2, \Theta_{n,1}=\cos(n\theta), \Theta_{n,2}=\sin(n\theta), n=1,2,3\cdots$. 解方程

$$r^2R''+rR'-n^2R=0,$$

这种类型的常微分方程叫欧拉方程，有固定的解法，做变量替换$r=e^t$，得(这里的导数是对t求导)

$$\frac{d^2R}{dt^2}-n^2R=0.$$

解之，得

$$R_0=C_{0,1}t+C_{0,2}=C_{0,1}\ln r+C_{0,2}, R_n=C_{n,1}e^{nt}+C_{n,2}e^{-nt}=C_{n,1}r^n+C_{n,2}r^{-n}, n=1,2,3\cdots.$$

注意到$|R(0)|<\infty$ 得

$$R_0=C_0, R_n=C_nr^n, n=1,2,3\cdots.$$

从而

$$u=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta))r^n.$$

我们求出系数

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)ds$$

$$A_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\cos(ns)ds$$
$$B_n = \frac{1}{R^n\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\sin(ns)ds.$$

从而

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r^n}{R^n\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\cos(ns)ds\cos(n\theta) + \frac{r^n}{R^n\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\sin(ns)ds\sin(n\theta)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos(n(s-\theta))\right)ds \end{aligned}$$

我们求和式$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos(n(s-\theta))$，其为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}e^{n(s-\theta)i} = \frac{r/Re^{(s-\theta)i}}{1-r/Re^{(s-\theta)i}} = \frac{r/Re^{(s-\theta)i}(1-r/Re^{(\theta-s)i})}{(1-r/Re^{(s-\theta)i})(1-r/Re^{(\theta-s)i})} = \frac{r/Re^{(s-\theta)i}-(r/R)^2}{1-2r/R\cos(\theta-s)+(r/R)^2}$$

的实部。即

$$\frac{r/R\cos(s-\theta)-(r/R)^2}{1-2r/R\cos(\theta-s)+(r/R)^2} = \frac{rR\cos(s-\theta)-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-s)+r^2}.$$

从而

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\left(1+2\frac{rR\cos(s-\theta)-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-s)+r^2}\right)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-s)+r^2}ds.$$

上诉公式称为泊松公式。

例子5 (多自变量分离变量). 有一块$[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$的长方体金属块，内部无热源且处于热平衡状态，已知有一面温度为1，其余均为0。试用分离变量法求出它内部的温度分布。

解. 首先写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, 0\le x,y,z\le 1 \\ u(1,y,z)=1, u(0,y,z)=u(x,0,z)=u(x,1,z)=u(x,y,0)=u(x,y,1)=0. \end{cases}$$

分离变量$u=XYZ$，其中$X=X(x), Y=Y(y), Z=Z(z)$。则有

$$-\frac{XY''+YX''}{XY} = \frac{Z''}{Z}.$$

不妨设$\frac{Z''}{Z}=-\lambda$，则有固有值问题

$$\begin{cases} Z''+\lambda Z = 0, 0\le z\le l \\ Z(0)=Z(1)=0. \end{cases}$$

计算得，固有值及固有函数为

$$\lambda_n = n^2\pi^2, Z_n = \sin(n\pi z), n = 1,2,3\cdots.$$

固定λ_n，我们有
$$-\frac{X''-n^2\pi^2X}{X}=\frac{Y''}{Y}.$$
不妨设$\frac{Y''}{Y}=-\mu$，则有固有值问题
$$\begin{cases} Y''+\mu Y=0, 0\le z\le l \\ Y(0)=Y(1)=0. \end{cases}$$
计算得，固有值及固有函数为
$$\mu_m=m^2\pi^2, Y_m=\sin(m\pi y), m=1,2,3\cdots.$$
解微分方程$X''_{m,n}-(n^2\pi^2+m^2\pi^2)X_{m,n}=0$，得到$X_{m,n}=A_{m,n}\cos(\sqrt{n^2+m^2}\pi x)+B_{m,n}\sin(\sqrt{n^2+m^2}\pi x)$。即
$$u=\sum_{n,m\ge 1}\left(A_{m,n}e^{\sqrt{n^2+m^2}\pi x}+B_{m,n}e^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi x}\right)\sin(m\pi y)\sin(n\pi z).$$
分别令$x=0,1$ 得
$$\begin{cases} A_{m,n}+B_{m,n}=0 \\ A_{m,n}e^{\sqrt{n^2+m^2}\pi}+B_{m,n}e^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi}=\frac{\langle 1, Y_mZ_n\rangle}{\langle Y_mZ_n, Y_mZ_n\rangle}. \end{cases}$$
注意到当m,n之一为偶数的时候，$\langle 1, Y_mZ_n\rangle=0$，此时我们取$B_{m,n}=0$。当$m,n$都是奇数时，则有
$$B_{m,n}=\frac{16}{mn\pi^2(e^{\sqrt{n^2+m^2}\pi}-e^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi})}.$$
从而
$$u(x,y,z)=-\sum_{m,n\ge 1, m,n\text{为奇数}}\frac{16(e^{\sqrt{n^2+m^2}\pi x}-e^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi x})}{mn\pi^2(e^{\sqrt{n^2+m^2}\pi}-e^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi})}\sin(m\pi y)\sin(n\pi z)$$
思考. 有一块$[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ 的长方体金属块，无内部有热源，热平衡，六个面满足边界条件(*I,II,III*类)，写出定解问题并用叠加原理和冲量原理将其分解为若干分离变量问题，不用求解。

1.2 固有值问题

1.2.1 一般分离变量

我们对一般齐次定解问题做分离变量并给出解题流程。
$$\begin{cases} \mathcal{L}_tu+\mathcal{L}_xu=0, t\in\mathcal{I}, a\le x\le b. \\ \text{边界条件} \\ \text{关于t的定解条件，一般是初始条件.} \end{cases}$$
其中
$$\mathcal{L}_t=a_0(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+a_1(t)\frac{\partial}{\partial t}+a_2(t)$$
$$\mathcal{L}_x=b_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b_1(x)\frac{\partial}{\partial t}+b_2(x).$$

分离变量$u(t,x)=T(t)X(x)$，得到

$$-\frac{\mathcal{L}_t T}{T}=\frac{\mathcal{L}_x X}{X}.$$

设$\frac{\mathcal{L}_x X}{X}=-\lambda$，我们有固有值问题

$$\begin{cases}\mathcal{L}_x X+\lambda X=0\\ \text{边界条件}\end{cases}$$

解出固有值λ_n、对应固有函数X_n、对应T_n，得到

$$u=\sum C_n X_n T_n.$$

带入定解条件求出u。

1.2.2 固有值问题的SL理论

本节我们考察Sturm-Liouville(SL)型固有值问题：

$$\begin{cases}[k(x)X']'-q(x)X+\lambda\rho(x)X=0, a\le x\le b\\ \text{边界条件}\end{cases}$$

其中边界条件取法：

I类. 要求$k(a)>0$ 同理b 点；

II类. 要求$k(a)>0$ 同理b 点；

III类. 要求$k(a)>0$ 同理b 点；$\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}=0,\alpha,\beta>0$，$a$:$\alpha u(a)-\beta u_x(a)=0$；$b$: $\alpha u(b)+\beta u_x(b)=0$；

自然边界条件. 要求$k(a)=0$ 同理b 点，最多一阶零点；可以取$|X(a)|<\infty$；

周期边界条件. $k(a)=k(b)>0$ 时，可以取到周期边界条件$X(a)=X(b), X'(a)=X'(b)$，与上面类型不同，周期边界条件必须两个端点同时取。

对于上节提到的固有值问题

$$\begin{cases}b_0(x)X''+b_1(x)X'+b_2(x)+\lambda X=0, a\le x\le b\\ \text{边界条件}\end{cases}$$

我们总能化为SL型固有值问题，此时

$$k(x)=\exp(\int_0^s\frac{b_1(s)}{b_0(s)}ds), q(x)=-\frac{b_2(x)}{b_0(x)}k(x), \rho(x)=\frac{k(x)}{b_0(x)}.$$

回到SL固有值问题，我们约定(实际固有值问题并不一定满足)

(1) $k(x),q(x),\rho(x)$为$[a,b]$上连续函数；

(2) 限制在(a,b)上，$k(x)>0,\rho(x)>0,q(x)\ge 0$，端点为至多为$k(x),\rho(x)$ 的一级零点;

(3) 内积$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$。

定理. 基于以上假设，固有值和固有函数满足

(1) 非负性，所有固有值都是非负实数；存在零固有值得充要条件是$q(x)=0$且两端为非I,III类边界条件，记为$\lambda_0=0$（周期边界条件；两边为自然边界条件或II类边界条件），对应固有函数为$X_0=1$；

(2) 可数性，仅有可数个固有值且有如下形式：

$$(0=\lambda_0<\text{如果存在的话})\lambda_1<\lambda_2<\cdots.$$

如果不是周期边界条件，则每个固有值λ_n仅对应一个固有函数X_n(无视非零常数倍)；

(3) 正交性，如果$n\neq m$，则$\langle X_n,X_m\rangle=\int_a^b X_n(x)X_m(x)\rho(x)dx=0$；

(4) 完备性，在约定内积下，所有固有函数构成$\mathcal{L}_\rho([a,b])$（所有满足边界条件的函数全体，其实不满足边界条件一般也是可以的）的一组完备正交积，可以如同*Fourier* 展开一样操作

$$f(x)=\sum_n\frac{\langle f,X_n\rangle}{\langle X_n,X_n\rangle}X_n(x)=\sum_n\frac{\int_a^b f(s)X_n(s)\rho(s)ds}{\int_a^b X_n(s)X_n(s)\rho(s)ds}X_n(x).$$

我们注意到书上有更细致的描述，在此我们忽略证明。

证明(非负性证明)**.** 设λ 为固有值，对应固有函数为X。对

$$[k(x)X']'-q(x)X+\lambda\rho(x)X=0$$

乘上X 并从a 到b 积分，得到

$$\int_a^b X[k(x)X']'-q(x)XX+\lambda\rho(x)XXd(x)=0.$$

注意到

$$[k(x)X'X]'=X[k(x)X']'+k(x)X'^2.$$

我们有

$$\int_a^b[k(x)X'X]'-k(x)X'^2-q(x)XX+\lambda\rho(x)XXd(x)=0.$$

即：

$$\begin{aligned}\lambda\int_a^b\rho(x)XXd(x)&=\int_a^b-[k(x)X'X]'+k(x)X'^2+q(x)XXd(x)\\&=k(a)X(a)X'(a)-k(b)X(b)X'(b)+\int_a^b k(x)X'^2+q(x)X^2d(x).\end{aligned}$$

因为$k,q\geq0$，我们仅需说明

$$k(a)X(a)X'(a)-k(b)X(b)X'(b)\geq0.$$

为此需要按找边界条件的取法分类讨论。当取周期边界条件，$k(a)=k(b)$，$X(a)=X(b)$，$X'(a)=X'(b)$。显然成立。

当非周期边界条件的时候，分别说明$k(a)X(a)X'(a)\geq 0$ 和$-k(b)X(b)X'(b)\geq 0$。例如对于$x=a$ 端点：实际上，对于I 类（$X(a)=0$）；II 类（$X'(a)=0$）；自然边界条件（$k(a)=0$），显然成立。对于III 类：$\alpha X(a)-\beta X'(a)=0$，有

$$k(a)X(a)X'(a)=k(a)\frac{\alpha}{\beta}(X(a))^2\geq 0.$$

综上所述，我们完成了非负性的证明。

关于零固有值，如果零是固有值，设固有函数是X，则

$$\begin{aligned}0=\lambda\int_a^b\rho(x)XXd(x)&=\int_a^b-[k(x)X'X]'+k(x)X'^2+q(x)XXd(x)\\&=\big(k(a)X(a)X'(a)-k(b)X(b)X'(b)\big)+\Big(\int_a^b k(x)X'^2d(x)\Big)+\Big(\int_a^b q(x)X^2d(x)\Big).\end{aligned}$$

由前面讨论，上式右边三项都非负，要等式成立，则必然有

$$k(a)X(a)X'(a)-k(b)X(b)X'(b)=0;$$

$$\int_a^b k(x)X'^2d(x)=0;$$

$$\int_a^b q(x)X^2d(x)=0.$$

因为$X\neq 0$，所以$q(x)=0$。因为$k(x)|_{(a,b)}>0$，所以$X'=0$，即$X=$ 常数，固有函数取$X_0=1$。剩下的按照边界条件类型讨论，实际上，当某个端点：例如a 点取I 类边界条件时候，

$$X=X(a)=0.$$

取III 类边界条件的时候

$$0=\alpha X(a)-\beta X'(a)=\alpha X(a)$$

得到$0=X(a)=X$。这两类都没有非零固有函数，所以I,III类边界条件不可取。

反之，仅需把$\lambda=0,X=1$ 带入固有值问题验证即可。在此略过。

证明(正交性证明)**.** 设λ_n 和λ_m 为不同固有值，对应固有函数为X_n,X_m。则

$$[k(x)X_n']'-q(x)X_n+\lambda_n\rho(x)X_n=0$$

$$[k(x)X_m']'-q(x)X_m+\lambda_m\rho(x)X_m=0$$

分别乘上X_m 和X_n 做差并从a 到b 积分得

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b\rho X_nX_md(x)=\int_a^b[k(x)X_m']'X_n-[k(x)X_n']'X_md(x).$$

因为$\lambda_n-\lambda_m\neq 0$，仅需说明$\int_a^b[k(x)X_m']'X_n-[k(x)X_n']'X_md(x)=0$，为此注意到

$$[k(x)X_m'X_n]'=X_n[k(x)X_m']'+k(x)X_m'X_n',$$

$$[k(x)X_n'X_m]' = X_m[k(x)X_n']' + k(x)X_n'X_m'.$$

上面两式做差得

$$[k(x)X_m']'X_n - [k(x)X_n']'X_m = [k(x)X_m'X_n]' - [k(x)X_n'X_m]'.$$

即

$$\int_a^b [k(x)X_m']'X_n - [k(x)X_n']'X_m d(x) = \int_a^b [k(x)X_m'X_n]' - [k(x)X_n'X_m]'d(x)$$
$$= (k(x)X_m'X_n - k(x)X_n'X_m)|_a^b$$
$$= k(b)X_m'(b)X_n(b) - k(a)X_m'(a)X_n(a) - k(b)X_n'(b)X_m(b) + k(a)X_n'(a)X_m(a)$$

仅需说明上式$=0$，依然根据边界条件类型讨论。当取周期边界条件，$k(a)=k(b)$，$X(a)=X(b)$，$X'(a)=X'(b)$。显然成立。

当非周期边界条件的时候，分别说明$k(a)X_m'(a)X_n(a)-k(a)X_n'(a)X_m(a)=0$和$k(b)X_m'(b)X_n(b)-k(b)X_n'(b)X_m(b)=0$。例如对于$x=a$端点：实际上，对于$I$类（$X_n(a)=X_m(a)=0$）；$II$类（$X_n'(a)=X_m'(a)=0$）；自然边界条件（$k(a)=0$），显然成立。

对于III类：$\alpha X_n(a)-\beta X_n'(a)=0$，$\alpha X_m(a)-\beta X_M'(a)=0$，有

$$k(a)X_m'(a)X_n(a) = k(a)\frac{\alpha}{\beta}X_n(a)X_m(a).$$

同理

$$k(a)X_n'(a)X_m(a) = k(a)\frac{\alpha}{\beta}X_n(a)X_m(a).$$

也成立。

综上所述，我们完成了证明。

在这一章的一开始我们已经讲过分离变量的例子，在此我们举两个新的例子（也是下一章的内容）。

1). ν阶贝塞尔固有值问题

$$\begin{cases} [xy']' - \frac{\nu^2}{x}y + \lambda xy = 0, 0 \le x \le a \\ |y(0)| < \infty, \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0. \end{cases}$$

2). 勒让德固有值问题。

$$\begin{cases} [(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, -1 \le x \le 1 \\ |y(\pm 1)| < \infty. \end{cases}$$

1.2.3　一些固有值问题

例子6. 解固有值问题，

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, -l \le x \le l \\ y'(-l) = y'(l) = 0. \end{cases}$$

解. 这是标准的SL 固有值问题。边界条件均为II 类，$q=0$，因而$\lambda_0=0$，对应固有函数$y_0=1$，其余固有值均为正。解常微分方程得

$$y=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x),\lambda>0.$$

带入边界条件

$$\begin{cases} A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l)+B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l)=0 \\ -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l)+B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l)=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} A\sin(\sqrt{\lambda}l)=0 \\ B\cos(\sqrt{\lambda}l)=0 \end{cases}$$

既然$\sin(\sqrt{\lambda}l)$ 和$\cos(\sqrt{\lambda}l)$ 不可能同时为零。可以看出，要求这个方程组有非零解，则A,B 至少有一个$=0$。要求有非零解，故A,B 不全为零。

1). $A=0,B\neq 0$，$\cos(\sqrt{\lambda}l)=0$ 得到固有值和固有函数

$$\lambda_{1,n}=\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{l}\right)^2,y_{1,n}=\sin(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l}),n=1,2,3,\cdots.$$

2). $A\neq 0,B=0$，$\sin(\sqrt{\lambda}l)=0$ 得到固有值和固有函数

$$\lambda_{2,n}=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,y_{2,n}=\cos(\frac{n\pi x}{l}),n=1,2,3,\cdots.$$

虽然写法不一样，但和书上是一致的。

例子7. 解固有值问题，

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0,1\leq x\leq e \\ y(l)=y(e)=0. \end{cases}$$

解. 先把固有值问题化为标准SL固有值问题：

$$k(x)=\exp(\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}dx)=\exp(\int\frac{x}{x^2}ds)=x,$$

$$q(x)=-\frac{b_2(x)}{b_0(x)}k(x)=0,$$

$$\rho(x)=\frac{k(x)}{b_0(x)}=\frac{1}{x}.$$

固有值问题化为

$$\begin{cases} [xy']+\lambda\frac{y}{x}=0,1\leq x\leq e \\ y(1)=y(e)=0. \end{cases}$$

由此判断固有值大于零（因为边界条件都是I 类，所以没有0 固有值），因而只需要考虑$\lambda>0$ 的情形。

常微分方程是欧拉方程，变量替换，$x=e^t,0\leq t\leq 1$，有

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda y=0.$$

由于$\lambda > 0$，解得

$$y = A\cos(\sqrt{\lambda}t) + B\sin(\sqrt{\lambda}t) = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\ln x).$$

由边界条件

$$\begin{cases} A = 0 \\ A\cos(\sqrt{\lambda}) + B\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

得$\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$。固有值和固有函数为

$$\lambda_n = n^2\pi^2, y_n = \sin(n\pi\ln x), n = 1, 2, 3, \cdots.$$

例子8. 解固有值问题，

$$\begin{cases} y'' + 2ay' + \lambda y = 0, 0 \le x \le l \\ y(0) = y'(l) = 0 \end{cases}$$

解. 首先由SL 理论，零不是固有值，且固有值大于零。解方程$t^2+2at+\lambda = 0$，得$t = -a\pm\sqrt{a^2-\lambda}$。如果$\lambda < a$，解之，舍去。如果$\lambda = a$，解之，舍去。如果$\lambda > a$，$y = C_1e^{-ax}\cos(\sqrt{\lambda - a^2}x) + C_2e^{-ax}\sin(\sqrt{\lambda - a^2}x)$。代入边界条件，得$C_1 = 0$，$\cos(\sqrt{\lambda - a^2}l) = 0$。得

$$\sqrt{\lambda - a^2}l = n\pi - \frac{\pi}{2}, n = 1, 2, \cdots.$$

固有值$\lambda_n = a^2 + \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2$，固有函数$y_n = e^{-ax}\sin(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x)$.

注记. 实系数常微分方程$y'' + py' + qy = 0$ 的解法如下：首先求$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根，只可能以下几种情形

(1) 只有零根：$C_1x + C_2$；

(2) 一个零根$\lambda_1 = 0$，一个实根$\lambda_2 \neq 0$：$C_1 + C_2e^{\lambda_2 x}$；

(3) 两个非零不同实根λ_1, λ_2；$C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$：

(4) 两个相同非零实根$\lambda_1 = \lambda_2$：$C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x}$：

(5) 两个共轭复根$\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$，$a, b$为实数：$e^{ax}(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx))$。

注记. 欧拉方程$x^2y'' + axy' + by = 0$ 解法：设$x = e^t$，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{de^t} = e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{de^t}(e^{-t}\frac{dy}{dt}) = e^{-t}\frac{d}{dt}(e^{-t}\frac{dy}{dt}) = e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}).$$

带入原方程，注意到$x = e^t$，得

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0.$$

化为上个注记的情形。

1.3 非齐次定解问题的分离变量

分离变量需要很强的齐次条件，一般定解问题并不一定成立，虽然在在上一章中我们已经讲过非齐次定解问题如何齐次化，无非是叠加原理和冲量原理。但对于方程非齐次而边界条件齐次的定解问题，还是太复杂。我们还是从例子开始。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), 0 \leq x \leq l, t > 0 \\ u(t,0) = A(t), u(t,l) = B(t) \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x), 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

首先用叠加原理将问题分解。

$$(I) \qquad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), 0 \leq x \leq l, t > 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = 0, 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

$$(II) \qquad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 \leq x \leq l, t > 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x), 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

$$(III) \qquad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 \leq x \leq l, t > 0 \\ u(t,0) = A(t), u(t,l) = B(t) \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = 0, 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

原定解问题的解就是上述三个定解问题解的求和。其中，（II）是齐次定解问题，可以用分离变量法处理。（I）的方程非齐次，边界条件齐次，可以用齐次化原理处理。（III）的边界条件非齐次但方程齐次。在此我们处理（I）和（III）。

——

（I）的处理：我们需要找满足边界条件的特解，可以从固有函数的线性组合入手。固有值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, 0 \leq x \leq l \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases}$$

的固有函数为$X_n = \sin(\frac{n\pi x}{l}), n = 1, 2, 3, \cdots$。设我们的特解是$v = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$。则

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f.$$

即

$$v_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n\pi}{l})^2 T_n(t) X_n(x) + f(t,x).$$

将$f(t,x)$ 分解为

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x).$$

对照得

$$T_n''(t) = -a^2 (\frac{n\pi}{l})^2 T_n(t) + f_n(t).$$

用拉普拉斯变换解上述微分方程（$T_n(0)=T_n'(0)=0$）。

$$p^2\bar{T}_n=-(\frac{n\pi a}{l})^2\bar{T}_n+\bar{f}_n.$$

得

$$\bar{T}_n=\frac{1}{p^2+(\frac{n\pi a}{l})^2}\times\bar{f}_n.$$

所以

$$T_n=L^{-1}(\frac{1}{p^2+(\frac{n\pi a}{l})^2})*L^{-1}(\bar{f}_n)=\big(\frac{l}{n\pi a}\times\sin(\frac{n\pi at}{l}))\big)*f_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(t-\tau)\sin(\frac{n\pi a\tau}{l})d\tau.$$

从而

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(t-\tau)\sin(\frac{n\pi a\tau}{l})d\tau\sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

注意到$v(0,x)=v_t(0,x)=0$。因而v 就是定解问题（I）的解。

——

（III）的处理。首先把边界齐次化。我们要找$v=v(t,x)$ ，要求

$$v(0,x)=A(t),v(l,x)=B(t).$$

不妨设$v=xp(t)+q(t)$，则

$$q(t)=A(t),p(t)=\frac{B(t)-A(t)}{l}.$$

v 的选取并不唯一，怎么简单怎么来。用$\tilde{u}=u-v$，得到

$$\begin{cases}\tilde{u}_{tt}=a^2\tilde{u}_{xx}+v_{tt}-a^2v_xx,0\le x\le l,t>0\\ \tilde{u}(t,0)=0,\tilde{u}(t,l)=0\\ \tilde{u}(0,x)=-v(0,x),\tilde{u}_t(0,x)=-v_t(0,x),0\le x\le l.\end{cases}$$

化为情形（I）。

当边界条件出现周期函数的时候，我们可以要求v 满足泛定方程：例如

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx},0\le x\le l,t>0\\ u(t,0)=0,u(t,l)=\sin(\omega t),\sin(\frac{\omega l}{a})\ne 0\\ u(0,x)=0,u_t(0,x)=0,0\le x\le l.\end{cases}$$

我们可以要求$v=X(x)T(t)$，且

$$X(0)=0,X(l)=1,-\omega^2XT=a^2X''T.$$

即$T(t)=\sin(\omega t)$, $X''=-\frac{\omega^2}{a^2}X$. 得

$$X=\sin(\frac{\omega x}{a})/\sin(\frac{\omega l}{a}).$$

所以

$$v=X(x)T(t)=\frac{\sin(\frac{\omega x}{a})}{\sin(\frac{\omega l}{a})}\sin(\omega t)$$

例子9. 求解如下定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f, 0 \le x \le l, t > 0 \\ u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0 \\ u(0,x) = 0, 0 \le x \le l. \end{cases}$$

解. 我们需要找特殊的特解，满足边界条件，可以从固有函数的线性组合入手。固有值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, 0 \le x \le l \\ y'(0) = y'(l) = 0 \end{cases}$$

的固有函数为$X_0 = 1, X_n = \cos(\frac{n\pi x}{l}), n = 1,2,3,\cdots$。设我们的特解是$v = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$。则

$$v_t = a^2 v_{xx} + f.$$

即

$$v_t = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)X_n(x) = -a^2 \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{n\pi}{l})^2 T_n(t)X_n(x) + f(t,x).$$

将$f(t,x)$ 分解为

$$f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)X_n(x).$$

对照得

$$T_n'(t) = -a^2(\frac{n\pi}{l})^2 T_n(t) + f_n(t).$$

用拉普拉斯变换解上述微分方程（$\bar{T}_n = L[T_n], \bar{f}_n = L[f]$）。

$$p\bar{T}_n = -(\frac{n\pi a}{l})^2 \bar{T}_n + \bar{f}_n.$$

得

$$\bar{T}_n = \frac{1}{p + (\frac{n\pi a}{l})^2} \times \bar{f}_n.$$

所以

$$T_n = L^{-1}(\frac{1}{p + (\frac{n\pi a}{l})^2}) * L^{-1}(\bar{f}_n) = e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} * f_n(t) = \int_0^t f_n(t-\tau)e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 \tau} d\tau.$$

从而

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t f_n(t-\tau)e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 \tau} d\tau \sin(\frac{n\pi x}{l}).$$

注意到$v(0,x) = v_t(0,x) = 0$。因而v 就是定解问题的解。

注记. 设f 是$[0,\infty)$ 上地实值或复值函数，拉普拉斯变换定义为

$$\bar{f} = L[f] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

设f, g 是$[0,\infty)$ 上地实值或复值函数，卷积定义为

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau.$$

拉普拉斯变换卷积性质

$$L[f*g]=L(f)L(g).$$

微分的拉普拉斯变换。

$$L(f^n)=p^nL[f]-p^{n-1}f(0+)+p^{n-2}f'(0+)+\cdots.$$

一些简单函数地拉普拉斯变换。

$$L[e^{\lambda t}]=\frac{1}{p-\lambda};$$
$$L[\frac{t^n}{n!}]=\frac{1}{p^{n+1}};$$
$$L[\sin(\omega t)]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$
$$L[\cos(\omega t)]=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

1.3.1 泊松方程的非齐次定解问题

对于泊松方程的非齐次定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=f, 1\le x\le e\\ u|_S=\varphi(x,y,z).\end{cases}$$

一般来说我们考虑的定解问题区域都是规则的，如方块，源，球等。我们一般用特解法，特别是当f 是多项式的时候，很容易用待定系数法求出一个特解v。然后令$w=u-v$，得到w 的齐次定解问题

$$\begin{cases}\Delta w=0, 1\le x\le e\\ w|_S=\varphi(x,y,z)-v(x,y,z).\end{cases}$$

以下是书上的例子：

例子10.

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=12(x^2-y^2), a^2\le x^2+y^2\le b^2\\ u|_{x^2+y^2=a^2}=1, \frac{\partial u}{\partial n}|_{x^2+y^2=b^2}=0.\end{cases}$$

解. 先找一个特解：$v=x^4-y^4$。设$w=u-v$ 得

$$\begin{cases}w_{xx}+w_{yy}=0, a^2\le x^2+y^2\le b^2\\ w|_{x^2+y^2=a^2}=1-v, \frac{\partial u}{\partial n}|_{x^2+y^2=b^2}=-\frac{\partial v}{\partial n}.\end{cases}$$

用极坐标$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 即$v=r^4\cos(2\theta)$，$n$ 为单位法向方向沿着r 往外。从而可以化为

$$\begin{cases}w_{xx}+w_{yy}=0, a^2\le x^2+y^2\le b^2\\ w|_{x^2+y^2=a^2}=1-a^4\cos(2\theta), \frac{\partial u}{\partial n}|_{x^2+y^2=b^2}=-4b^3\cos(2\theta).\end{cases}$$

极坐标下拉式方程得一般解为

$$u=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n})(C_n\cos(n\theta)+D_n\sin(n\theta)).$$

令$r = a$ 和b 得

$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln a + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n a^n + B_n a^{-n})(C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)) = 1 - a^4 \cos(2\theta). \\ B_0 b^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(nA_n b^{n-1} - nB_n b^{-n-1})(C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)) = -4b^3 \cos(2\theta). \end{cases}$$

我们仅需要考虑常数项和$\cos(2\theta)$ 项，其他项系数全部为0。对照得

$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln a = 1. \\ B_0 b^{-1} = 0. \\ C_2(A_2 a^2 + B_2 a^{-2}) = -a^4. \\ C_2(2A_2 a - 2B_2 a^{-3}) = -4b^3. \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} A_0 = 1. \\ B_0 = 0. \\ C_2 A_2 = -\frac{a^6 + +b^6}{a^4+b^4}. \\ C_2 B_2 = -\frac{a^4 b^4 (a^2 - 2b^2)}{a^4+b^4}. \end{cases}$$

所以

$$w = 1 - \frac{a^6 + +b^6}{a^4 + b^4} r^2 \cos(2\theta) - \frac{a^4 b^4 (a^2 - 2b^2)}{a^4 + b^4} r^{-2} \cos(2\theta).$$

所以

$$u = v + w = 1 + [r^4 - \frac{a^6 + +b^6}{a^4 + b^4} r^2 - \frac{a^4 b^4 (a^2 - 2b^2)}{a^4 + b^4} r^{-2}] \cos(2\theta).$$

——

注记. 本章重点：各种形式分离变量；固有值问题。

作业：3，5.(3)。作业：5(6)，8；2.(1)(2)(3)，10(2)(5)

3. 一条均匀的弦固定于$x = 0$ 及$x = l$，在开始的一瞬间，它的形状是一条以$(\frac{l}{2}, h)$ 为顶点的抛物线，初速度为零，且没有外力作用，求弦的位移函数。

5.(3)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2h u_t, (0 \le x \le l, t \ge 0, 0 < h < \frac{\pi a}{l}, h \text{ 为常数}), \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, \\ u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x). \end{cases}$$

5.(6) 环域内的狄利克莱问题：

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, (a \le r \le b), \\ u(a, \theta) = 1, u(b, \theta) = 0. \end{cases}$$

8. 一个半径为a 的半圆形平板，其圆周边界上的温度保持$u(a, \theta) = T\theta(\pi - \theta)$, 而直径边界上的温度为零度，板的上下侧面绝热，试求板内的温度分布。

1. 解下列固有值问题

(1).

$$\begin{cases} y'' - 2ay' + \lambda y = 0, 0 < x < 1, a = constant, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

(2).

$$\begin{cases} [r^2R']' + \lambda r^2 R = 0, 0 < r < a, \\ |R(0)| < \infty, R(a) = 0; [\text{ 提示：} y = rR] \end{cases}$$

(3).

$$\begin{cases} y^{(4)} + \lambda y = 0, 0 < x < l, \\ y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0. \end{cases}$$

10. 解下列非齐次固有值问题：

(2)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < 1, a = constant > 0, \\ u(t,0) = 0, u_x(t,l) = -\frac{q}{k} \\ u(0,x) = u_0. \end{cases}$$

并求$\lim_{t\to+\infty} u(t,x)$。

(5)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + g(t,x), 0 < x < 1, \\ u(t,0) = 0, u_x(t,l) = E \\ u(0,x) = Ex, u_t(0,x) = 0. \end{cases}$$