2022 秋季学期（答案）

1　（12 分）填空题

（1）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}6 & \frac{1}{2} & -2\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & -3 & -8\end{pmatrix}$ 则其范数 $\|A\|_1=$ <u>13</u>，$\|A\|_\infty=$ <u>11</u>，谱半径 $=$ <u>$2+3\sqrt{3}$</u>；若利用 Householder 变换求该矩阵的 QR 分解，则 $Q=\underline{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.8 & -0.6\\ 0 & -0.6 & -0.8\end{pmatrix}}$，$R=\underline{\begin{pmatrix}6 & 0.5 & -2\\ 0 & 5 & 7.2\\ 0 & 0 & 4.6\end{pmatrix}}$。

（2）将线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2,x_3} z=2x_1+x_2-4x_3\\
\text{subject to: }& -x_1+x_2+x_3=4,\\
& -2x_1+x_2-x_3\le 6,\\
& x_1\le 0, x_2\ge 0, x_3\text{无约束。}
\end{aligned}
$$

化为**标准形式**。

解答：$z=-z', -x_1$替代$x_1, x_3=x_4-x_5, x_6$为松弛变量，标准形式为：

$$
\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2,x_4,x_5} z=2x_1+x_2-4x_4+4x_5+0x_6\\
\text{subject to: }& -x_1+x_2+x_4-x_5=4,\\
& 2x_1+x_2-x_4+x_5+x_6=6,\\
& x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_4\ge 0, x_5\ge 0
\end{aligned}
$$

2　（13 分）

在线性空间 $\mathbf{P}_1[x] = span\{1, x\}$ 中，求 $f(x) = \sin x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的：

（1）一次最佳平方逼近多项式（设权函数为 1）；（2）一次最佳一致逼近多项式。

解答：$(1)\frac{8}{\pi} - \frac{24}{\pi^2} + (\frac{96}{\pi^3} - \frac{24}{\pi^2})x \approx 0.1148 + 0.6644x$;
$(2)\frac{\sqrt{1-(\frac{2}{\pi})^2}}{2} - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}x \approx 0.1053 + 0.6366x$

3　（10 分）

给定线性方程组 $Ax = b$，其中 A 可逆，D 为 A 的对角元构成的对角阵，在 Jacobi 迭代法中引入迭代参数 $\omega > 0$，即：

$$x_{k+1} = x_k - \omega D^{-1}(Ax_k - b)$$

称之为 Jacobi 松弛法（简称 JOR 方法），证明：若此时 Jacobi 迭代法收敛且 $0 < \omega < 1$，则 JOR 方法收敛。

证明： Jacobi 迭代法的迭代矩阵为 $M_1 = I - D^{-1}A$，JOR 方法的迭代矩阵为 $M_2 = I - \omega D^{-1}A$，则 $\rho(M_1) < 1 \Rightarrow \rho(D^{-1}A) < 2 \Rightarrow \rho(M_2) < 1$。

4　（15 分）

（1）构造一个次数不高于三次的多项式 $H(x) \in \mathcal{P}_3[x]$，使之满足

$$H(x_i) = f(x_i), H'(x_i) = f'(x_i), i = 0, 1$$

其中 $a \le x_0 \le x_1 \le b$。

（2）给定节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的函数 $f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 及一阶导数值 $f'(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$，设 $H(x) \in \mathcal{P}_{2n+1}[x]$ 为相应的 Hermite 插值多项式，即 $H(x)$ 满足 $H(x_i) = f(x_i), H'(x_i) = f'(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$ 且 $f(x)$ 充分光滑，

证明：此时插值误差 $R(x) = f(x) - H(x)$ 满足

$$R(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi(x))}{(2n+2)!}[w_{n+1}(x)]^2,$$

其中 $w_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),\xi(x)\in(x_0,x_n)$。(注:<u>不可利用差商与导数的关系式</u>)

解答:(1)Lagrange 插值形式:

$$\begin{aligned}H_3(x)=&(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2f(x_0)+(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2f(x_1)\\&+(x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2f'(x_0)+(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2f'(x_1)\end{aligned}$$

或 Newton 插值形式:

$$\begin{aligned}&H_3(x)=f(x_0)+f[x_0,x_0](x-x_0)+f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2\\&+f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)\\&f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\begin{cases}\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0} & x_0\neq x_n,\\ \frac{f^n(x_0)}{n!} & x_0=x_n\end{cases}\end{aligned}$$

(2)由于 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 为 $R(x)$ 的根,可以设 $R(x)=k(x)\prod_{i=0}^n(x-x_i)$,引入

$$\varphi(t)=f(t)-H(t)-k(x)\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)$$

则 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 n+2 个零点(不要忘了 x),由于 f 充分光滑,有 Rolle 定理,$\varphi'(t)$ 在相邻的两个零点之间至少有一个零点,即 $\varphi'(t)$ 至少有 n+1 个不同于 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的零点,也即 $\varphi'(t)$ 至少有 2n+2 个不同的零点,反复利用 Rolle 定理可得:$\varphi^{2n+2}(t)$ 至少有一个零点 ξ,于是:

$$\varphi^{(2n+2)}(t)=f^{(2n+2)}(t)-k(x)(2n+2)!$$

令 $t=\xi$,有:$k(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}$,于是原结论得证。

5　(10 分)

考虑用 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 求非线性函数 f(x) 的单重根 s。其中 $\varphi(x)=x-a(x)f(x)+b(x)f^2(x)$。试确定一组 $a(x)$ 和 $b(x)$ 使得该迭代公式在根 s 附近至少是三阶收敛的。

分析: 仍采用课本上分析 Newton 迭代格式时采用的 Taylor 展开的方法。

解答：

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}-s &= \varphi(x_k)-\varphi(s) \\
&= (x_k-s)\varphi'(s)+\frac{(x_k-s)^2}{2!}\varphi''(s)+\frac{(x_k-s)^3}{3!}\varphi'''(s)+...
\end{aligned}
$$

由于要求至少三阶收敛，可以得到关系式：

$$
\begin{cases}\varphi'(s) & =0\\ \varphi''(s) & =0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a(s)f'(s) & =1\\ -(2a'(s)f'(s)+a(s)f''(s))+2b(s)f'(s)^2 & =0\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}a(x) & =\frac{1}{f'(x)}\\ b(x) & =-\frac{f''(x)}{f'(x)^3}\end{cases} \text{（注意这只是一组容易得到的解）}
$$

6　（15 分）

（1）用 LU 分解求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=-1\\ 2x_1+4x_2+6x_3=0\\ 3x_1+5x_2-2x_3=10\end{cases}$ ，其中 L 是单位下三角矩阵，U 是上三角矩阵。

（2）设 $A=(a_{ij}\in R^{n\times n}$ 是严格对角占优矩阵, 即 A 满足

$$
|a_{kk}|>\sum j=1,j\neq k^n|a_{jk}|,k=1,2,\cdots,n,
$$

证明：对 $Ax=b$ 用 Gauss 顺序消元法得到的上三角阵方程组与用 Gauss 列主元消元法得到的上三角阵方程组是完全相同的。

分析：本题的关键是注意到对 A 进行一步 Gauss 消去后剩下待处理的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵仍为严格列对角占优，这自然也保证了每步 Gauss 消去需要寻找的“列主元”就是对角线上的元素，于是归纳法保证了原结论成立，另外有一个去年考试很多同学犯的错误是只证明了对 A 的第一列进行一步 Gauss 消去后第二列仍满足严格对角占优，并没有点出剩下待处理的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵是严格列对角占优（虽然它们之间只差了一个“依此类推”），这样归纳法实际上是进行不下去的。

证明：首先证明一个引理：若 A 严格列对角占优，则对 A 进行一步 Gauss 消去后剩下待处理的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵仍为严格列对角占优。

设 $A = A^{(0)} = (a_{ij}^{(0)})_{i,j=1}^{n}$，一步 Gauss 消去后得到的矩阵为 $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{n}$，则我们需要证明 $\forall i = 2,3,\cdots,n$，有 $|a_{jj}^{(1)}| > \sum_{i=2,i\neq j}^{n} |a_{ij}((1)|$，事实上，

$$
\begin{aligned}
&|a_{jj}^{(1)}| > \sum_{i=2,i\neq j}^{n} |a_{ij}^{(1)}| \\
\Leftrightarrow &|a_{jj}^{(0)} - a_{1j}^{(0)}\frac{a_{j1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}| > \sum_{i=2,i\neq j}^{n} |a_{ij}^{(0)} - a_{1j}^{(0)}\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}| \\
\Leftarrow &|a_{jj}^{(0)}| - |a_{1j}^{(0)}\frac{a_{j1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}| > \sum_{i=2,i\neq j}^{n} (|a_{ij}^{(0)}| + |a_{1j}^{(0)}\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}|) \\
\Leftrightarrow &|a_{jj}^{(0)}| > \sum_{i=2,i\neq j}^{n} |a_{ij}^{(0)}| + \sum_{i=1,i\neq j} |a_{1j}^{(0)}\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}| \\
\Leftarrow &|a_{jj}^{(0)}| > \sum_{i=1,i\neq j}^{n} |a_{ij}^{(0)}|
\end{aligned}
$$

于是由归纳法可以保证原结论成立（考试时不要这样省略）。

7 （15 分）

设 $f(x)$ 充分可微，设有数值积分公式

$$\int_{-2}^{2} \omega(x)f(x)dx = Af(x_0) + Bf(x_1)$$

其中 $\omega(x) = (4-x^2)^{-0.5}$。

（1）试确定常数 A, B, x_0, x_1 使其达到<u>最高阶</u> 的代数精度；给出此时的代数精度。

（2）试求第一问中数值积分公式的截断误差。

解答：（1）计算可得 $\omega(x)$ 下的正交多项式为：

$$
\begin{aligned}
&g_0(x) = 1 \\
&g_1(x) = x - \frac{\int_{-2}^{2} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx}{\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx} = x \\
&g_2(x) = (x - \frac{\int_{-2}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx}{\int_{-2}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx})x - \frac{\int_{-2}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx}{\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx} = x^2 - 2
\end{aligned}
$$

于是 $x_0 = -\sqrt{2}, x_1 = \sqrt{2}, A = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \frac{x-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} dx = \frac{\pi}{2}, B = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \frac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} dx = \frac{\pi}{2}$，验证可得：此时代数精度为 3。（考试时最好验证一下）

（2）由 Gauss 公式的积分余项可得：$E = \frac{f^{(4)}(\epsilon)}{4!} \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} (x^2-2)^2 dx = \frac{\pi}{12} f^{(4)}(\epsilon), \epsilon \in (-2, 2)$

8 （10 分）

设二元函数 $f(x, y)$ 在 $a \le x \le b, -\infty < y < \infty$ 上连续，且对 y 满足 Lipschitz 条件，即 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$，设常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(a) = y_0. \end{cases} \quad a \le x \le b$$

的精确解为 $y(x) \in C^2[a, b]$，且满足 $|y''(x)| \le M, \forall x \in [a, b]$（这里的 $M > 0$ 为常数）。对区间 $[a, b]$ 作等距划分，记步长为 $h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + ih, i = 0, 1, \cdots, n, n \ge 2$ 为正整数。考虑用向前 Euler 公式解此初值问题，记 y_i 为 $x_i (i = 1, \cdots, n)$ 处的数值解。

（1）写出向前 Euler 公式；

（2）若不考虑计算机舍入误差，试证明：

$$|y(x_n) - y_n| \le \frac{hM}{2L}(e^{L(b-a)} - 1).$$

解答：（1）$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

(2) 设 $e_n = |y(x_n) - y_n|$，则 $e_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
e_n &= \left|y(x_{n-1}) + hf(x_{n-1}, y(x_{n-1})) + \frac{h^2}{2} f''(\epsilon) - y_{n-1} - hf(x_{n-1}, y_{n-1})\right| \\
&\leq (1 + hL)e_{n-1} + \frac{h^2 M}{2} \\
&\leq \cdots \\
&\leq (1 + hL)^n e_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^2 M}{2}(1 + hL)^i \\
&= \frac{hM}{2L}((1 + hL)^n - 1) \\
&\leq \frac{hM}{2L}(e^{nhL} - 1) \\
&= \frac{hM}{2L}(e^{L(b-a)} - 1)
\end{aligned}
$$