中国科学技术大学数学科学学院

2016 ～ 2017学年 第 1 学期期末考试试卷

■A卷　　□B卷

课程名称 ＿＿计算方法(B)＿＿　课程编号 ＿＿001511＿＿

考试时间 ＿＿2017年1月12日＿＿　考试形式 ＿＿闭卷＿＿

姓 名 ＿＿＿＿＿＿　学 号 ＿＿＿＿＿＿　学 院 ＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	总计
得分								
评卷人								

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 本试卷共 7 道试题， 满分 100 分，考试时间 120 分钟。
3. 计算结果保留4位小数。

一、 (30分)填空

(1) (9分) 用规范的幂法求矩阵A的特征值。若A的按模最大特征值只有一个，则序列表现为

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

若A的按模最大特征值是互为反号的两个实数，则序列表现为

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) (6分) 解非线性方程$f(x)=0$的Newton迭代格式为＿＿＿＿＿＿＿＿

若已知方程的根是3重根，则格式应该改为＿＿＿＿＿＿＿＿，

才能保证格式具有2阶收敛速度。

(3) (3分) 6个点的数值积分公式至多可以到＿＿＿＿阶代数精度。

(4) (6分) 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$，则$\|A\|_1=$＿＿＿＿，$\|A\|_\infty=$＿＿＿＿

(5) (6分) 已知$f(1)=0.12, f(2)=0.25, f(3)=0.20$，则用Simpson公式得到的函数$f(x)$在$[1,3]$上的数值积分为＿＿＿＿，差商$f[1,2,3]=$＿＿＿＿

二、（10分）用Courant分解求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3=13 \\ 3x_1+2x_2-x_3=-12 \\ 3x_1-4x_2+5x_3=-54 \end{cases}$$

提示：$A=LU$，其中U为单位上三角阵，L为下三角阵，称为A的Courant分解。

三、（12分）按下列数据，用最小二乘法做出$f(x)=a+bx^2$形式的拟合函数。

x_i	−1	0	0.5	2	2.5
y_i	0.60	0.71	0.75	0.8	1.0

四、（12分）确定下面求积分公式中的待定参数A,使其代数精度尽可能高，写出公式并指出该求积公式所具有的代数精度：

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(0)+f(h)) + Ah^2(f'(0)-f'(h))$$

五、（12分）给定线性方程组$Ax=b$，其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$。若使用迭代公式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha(b-Ax^{(k)}),\alpha\in\mathbb{R}$$

求解方程。

1. 写出迭代公式的迭代矩阵；
2. 求出α的取值范围，使得迭代收敛，并指出α取何值时迭代收敛速度最快。

六、（12分）函数$f(x)$足够光滑，以点$2.0, 4.0, 6.0, 8.0$为节点构造的Lagrange插值多项式为$l_1(x)$；以$4.0, 6.0, 8.0, 10.0$为插值节点的插值多项式为$l_2(x)$，若$l_1(7.0) = 0.325$，$l_2(7.0) = 0.315$，

1. 用事后估计方法，估计$l_1(7.0)$处的误差；
2. $l(x)$是以$2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 10.0$为节点的插值多项式，试计算$l(7.0)$的值。给出计算公式，并证明。

七、（12分）对常微分方程$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = b \end{cases}$， 在等距节点下构造如下的线性多步格式

$$y_{n+1} + (\alpha - 1)y_n - \alpha y_{n-1} = \frac{h}{4}[(\alpha + 3)f_{n+1} + (3\alpha + 1)f_{n-1}]$$

假定节点间距为h

1. 证明$\alpha \neq -1$时格式是二阶精度的（即格式的局部截断误差为$O(h^3)$），当$\alpha = -1$时格式是三阶精度的。
2. 当$\alpha = -1$时，说明格式是几步几阶显式还是隐式格式。