22 秋线性代数 B1 期末答案与评分标准

史老师班教学小组

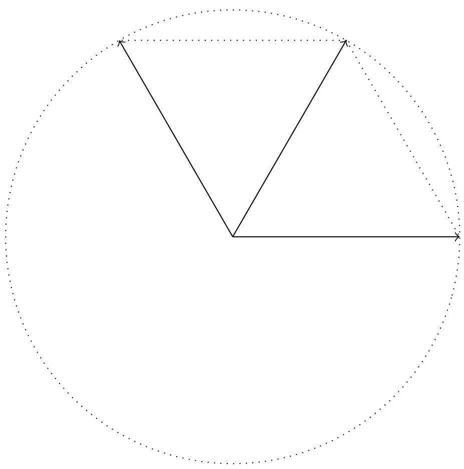
2023/3/4

这次均分 61，做得不理想的题目包括判断题和最后一道证明题。确实，判断题比较有难度，而且不光是计算上的难度，更多是思考上的。而且结果判断正确只能拿到两分，这也是分数偏低的原因。无论如何，一学期的教学工作来到尾声，感谢大家的支持，希望各位能在日后的学习中用上哪怕一点点线性代数的知识，到时再回首，也许会对线性代数这门课有不一样的领悟。

下面是对考试题的一些评注。

1. 第一题严格按照答案来判，答案只要有错误 0 分。但如果是向量没有转置这种错误则没有扣分。
2. 第二题第一问，正是最小二乘法，大家以后大概率会遇到的。本质上是说，一般 $Ax = b$ 可能无解，但是我们可以寻找近似解（拟合就是在干这事）。本题结论告诉你 $A^TAx = A^Tb$ 一定有解，而且这时很容易发现 $A^TAx = A^Tb$ 的解可以使得 Ax 与 b 距离取到最小值。
3. 第二题第二问，有部分同学在论证中说"正交阵相加不是正交阵"，请注意这个命题是错的！比如如下的例子：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$



4. 第三题第一小问线性性质只要验证了数乘可以放进去或者可以拆开任意一个都给了该得分点的满分。另外，有些同学把内积的结果写出来变成对应元素和来说明的给了 2 分（此说明需要空间 V 和 R4 同构）。第三题第二问如果 e_2 的矩阵中有一个符号错误会给一分，未单位化的第二个基向量如果算正确也给了一分。
5. 第四题请一定区分特征向量的坐标和特征向量自身。并且还请明确特征子空间的概念，很多同学特征子空间只写了一个，事实上特征子空间是一个特征值对应一个，不同特征值的特征子空间不能混为一谈。

后面是本次考试的试题和答案。

■A 卷　　□B 卷

课程名称	线性代数 (B1)	课程编号	MATH1009
考试时间	2023 年 2 月 28 日下午	考试形式	闭卷

姓 名 ________ 学 号 ________ 学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、【30 分】填空题.

(1) 若 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1, & \boldsymbol{a}_2, & \boldsymbol{a}_3, & \boldsymbol{a}_4\end{pmatrix}=4$, $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1, & \boldsymbol{a}_2, & \boldsymbol{a}_3, & \boldsymbol{a}_5\end{pmatrix}=3$,
则 $\mathrm{rank}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1, & \boldsymbol{a}_2, & \boldsymbol{a}_3, & \boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5\end{pmatrix}=$ 4

(2) 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 4 阶正交阵，且 $a_{11}=-1$, 则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=(1,0,0,0)^T$ 的解为 $(-1,0,0,0)^T$

(3) 设若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2 & a & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$ 相似，则 $a=$ 0

(4) 若 $\boldsymbol{a}_1=(1,2,0)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1,0,1)^T$ 是可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 2 的特征向量，且 $\boldsymbol{b}=(-1,2,-2)^T$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=$ $(-\frac{1}{2},1,-1)^T$

(5) 设 $\mathbb{R}_2[x]$ 中某个内积在基 $\boldsymbol{a}_1=x,\ \boldsymbol{a}_2=-1,\ \boldsymbol{a}_3=x^2$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
则该内积在另外一组基 $\boldsymbol{b}_1=x-1,\ \boldsymbol{b}_2=x+1,\ \boldsymbol{b}_3=x^2-2x-1$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 7\end{pmatrix}$.

(6) 实二次型 $\boldsymbol{Q}(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3$ 的正惯性指数为 2

二、【20 分】判断下面的说法是否正确，并简要说明理由或者举出反例.

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵，则对任意 m 维非零实列向量 $\boldsymbol{b}$，线性方程组 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ 一定有解。

结论 — 2分

论述 — 3分.

正确 ① $r(A^TA) \le r(A^TA, A^Tb) = r(A^T(A,b)) \le r(A^T) = r(A^TA)$

$\Rightarrow$ 不等式全取等 $\Rightarrow r(A^TA) = r(A^TA, A^Tb) \Rightarrow$ 有解

②(更直观) $\mathrm{Im}(A^TA) \subseteq \mathrm{Im}(A^T)$. 但 $r(A^TA) = r(A^T)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(A^TA) = \mathrm{Im}(A^T)$

$\Rightarrow$ 有解.

(2) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，满足 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$。

错误

$\Rightarrow AB^T - A^TB = I$.

但两边取trace: $tr(AB^T - A^TB) = 0$

$tr(I) = n$ 二者不等

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 为实方阵，且 $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) < 0$，则 A 必有特征值为负实数。

正确

$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ 值一分

必须出现"复根指共轭成对出现"才能拿满.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 为实方阵，则 $\mathbf{det}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) > 0$。

正确 验证 $I + A^TA$ 正定即可.

出现 $\det(I + A^TA) = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)$, λ 为 A^TA 特征值 可得一分

三、【12 分】考虑线性空间 $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{2\times 2}$, 即由 2 阶实方阵构成的实线性空间。

对于 $\mathbf{V}$ 中任意两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 定义

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})$$

(1) 证明: 如上定义的法则给出了 $\mathbf{V}$ 的一个内积。(6 分))

(2) 通过 Schmidt 正交化方法将 $\mathbf{V}$ 的向量组 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 改造成相对于（1）中所定义内积的标准正交向量组 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2$。(6 分))

(1) 对称性 1分

线性性 2分

正定性 3分

(2) $e_1=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}$ —— 2分

$e_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt5} & \frac{3}{2\sqrt5}\\ \frac{-3}{2\sqrt5} & \frac{1}{2\sqrt5}\end{pmatrix}$ —— 4分

四、【14 分】设 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，$\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性变换，且

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{a}_1)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \mathscr{A}(\boldsymbol{a}_2)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathscr{A}(\boldsymbol{a}_3)=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

(1) 求出线性变换 $\mathscr{A}$ 的全部特征值和对应的特征子空间。~~(8 分)~~ 7分

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$. $\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵。~~(6 分)~~ 7分

(1) 自然基 or $\{a_i\}$

$\mathscr{A}$的矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ —— 2分

特征值 $\lambda=-1,-1,2$ —— 2分

特征子空间 $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right\}$ $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ —— 3分

* 只求出在$\{a_i\}$下的坐标扣2分.

* 只写特征根没写特征子空间，或子空间没写对的没扣分.

(2) 过渡阵 $T=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\3&-1&0\end{pmatrix}$ —— 3分

公式 $A'=T^{-1}AT$ —— 1分

结果 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-2&-2\\12&-6&-3\\-16&4&1\end{pmatrix}$ —— 3分

五、【14 分】

设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+tx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求参数 t 的值。(3 分))

(2) 利用正交替换化该二次型为标准形，并给出具体的正交替换。(9 分)

(3) 判断方程 $Q(x_1,x_2,x_3)=1$ 代表的二次曲面的类型。(2 分))

(1) $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&t\end{pmatrix}$

$t=3$

(2)
$$\left.\begin{array}{ll}\lambda_1=4 & v_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\\ \lambda_2=9 & v_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\\ \lambda_3=0 & v_3=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$ 1个点1分 共6分.

$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}\\0&1/\sqrt{3}&2/\sqrt{6}\end{pmatrix}\longrightarrow 1$分

$Q(x_1,x_2,x_3)\overset{X=PY}{=\!=}4y_1^2+9y_2^2\longrightarrow 1$分

全对 $\longrightarrow 1$分.

(3) 椭圆柱面. $\longrightarrow 2$分.

* 只说柱面可得 1分

六、【10 分】设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定矩阵

证明:

$$\det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B} \le \left(\frac{1}{n}\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})\right)^n$$

只需证 AB 的特征值为正即可 ← 未证出这一点至多2分

A正定 $\Rightarrow \exists$ 可逆 P s.t. $A = P^TP$

$$\Rightarrow AB = P^TPB \underset{\text{相似}}{\overset{①}{\sim}} PBP^T \underset{\text{相合}}{\overset{②}{\sim}} B$$

$(P^T)^{-1} \square P^T$

② $\Rightarrow$ $P\cdot B\cdot P^T$ 正定 $\Rightarrow$ 特征值为正

① $\Rightarrow$ AB与 $P\cdot B\cdot P^T$ 特征值相同 $\Rightarrow$ AB特征值均为正

$$\Rightarrow \det(AB) = \lambda_1\cdots\lambda_n \leqslant \left(\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n}\mathrm{tr}(AB)\right)^n$$