历年数分B1部分考题解析

1. 设 $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 令

$$g(x,y) = \int_0^x (f(t+y) - f(t))\,\mathrm{d}t,$$

试证 $g(x,y) = g(y,x)$.

证明

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \int_0^x (f(t+y)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t))\,\mathrm{d}t = \int_y^{x+y} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x f(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_y^0 f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{x+y} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x f(t))\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^y f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{x+y} f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x f(t))\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

因此 $g(x,y) = g(y,x)$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

试证至少存在两点 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

证明 本题的证明充分利用对连续函数$f(x)$, 若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x)$ 在(a,b) 上不变号当且仅当 $f(x) \equiv 0$这个结论. 因此 $f(x)$ 在(a,b) 上至少有一个零点.
若 $x_0 \in (a,b)$ 是 $f(x)$ 唯一的零点, 则 $f(x)$ 在 x_0 两侧变号, 不妨设
当 $a < x < x_0$ 时, $f(x) > 0$, $\implies (x - x_0)f(x) < 0$;
当 $x_0 < x < b$ 时, $f(x) < 0$, $\implies (x - x_0)f(x) < 0$;
推出 $(x - x_0)f(x)$ 在 (a,b) 上不变号. 但是由条件 $\int_a^b (x - x_0)f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 矛盾.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导函数. 求证:

$$\max_{a \le x \le b} |f(x)| \le \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证明 因 $|f(x)|, f(x)$ 连续, 所以分别在$[a,b]$ 上取到最大值和最小值, 记

$$|f(x_1)| = \max_{a\le x\le b}|f(x)|,\ f(x_2) = \min_{a\le x\le b} f(x) \quad (x_1, x_2 \in [a,b])$$

显然 $f(x_2) \le \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 因此

$$\begin{aligned}\max_{a\le x\le b}|f(x)| = |f(x_1)| &= \left|\int_{x_2}^{x_1} f'(x)\,\mathrm{d}x + f(x_2)\right| \le \left|\int_{x_2}^{x_1} f'(x)\,\mathrm{d}x\right| + |f(x_2)| \\ &\le \left|\int_{x_2}^{x_1} |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right| + |f(x_2)| \\ &\le \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数.且$f(0)=0$, 求证:

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

等号成立当且仅当 $f(x) \equiv cx$, 其中 c 是常数.

证明 因为 $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, 利用Cauchy 不等式得

$$|f(x)|^2 = \left(\int_0^x 1\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \le \int_0^x 1^2\,\mathrm{d}t\int_0^x |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t = x\int_0^x |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

等号成立当且仅当 $f'(x) = c\cdot 1$, 因 $f(0)=0$, 所以当且仅当 $f(x)=cx$.
两边积分并利用分部积分法得

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(\int_0^x |f'(x)|^2\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\int_0^x |f'(x)|^2\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x^2 \\ &= \frac{1}{2}x^2\left(\int_0^x |f'(x)|^2\,\mathrm{d}t\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}\left(\int_0^x |f'(x)|^2\,\mathrm{d}t\right) \\ &\le \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $f(x)=cx$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且满足

$$|f(x)| \le \mathrm{e}^{kx} + k\int_0^x |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

其中 k 是常数, 求证：$|f(x)| \leq (kx+1)\mathrm{e}^{kx}$.

证明 令 $g(x) = \int_0^x |f(x)|\,\mathrm{d}x$, 则 $g(x)$ 可导:

$$g'(x) = |f(x)| \leq \mathrm{e}^{kx} + k\int_0^x |f(x)|\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{kx} + kg(x)$$

$$\Longrightarrow (g'(x) - kg(x))\mathrm{e}^{-kx} \leq 1, \Longrightarrow \big(g(x)\mathrm{e}^{-kx} - x\big)' \leq 0$$

因此函数 $g(x)\mathrm{e}^{-kx} - x$ 在$[0,+\infty)$ 上单调减, 即

$$g(x)\mathrm{e}^{-kx} - x \leq g(x)\mathrm{e}^{-kx} - x\Big|_{x=0} = 0,$$

推出 $g(x) \leq x\mathrm{e}^{kx}$, 也就有

$$|f(x)| \leq \mathrm{e}^{kx} + k\int_0^x |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{e}^{kx} + kx\mathrm{e}^{kx} = (kx+1)\mathrm{e}^{kx}.$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负、连续可微, $f(0)=f(1)=0$, 且 $|f'(x)| \leq 1$, 求证

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4}.$$

并问上述不等式是否可能成为等式, 为什么?

证明 根据题意分别存在 ξ_1, ξ_2 使得

$$f(x) - f(0) = f'(\xi_1)x, \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq x,\ \ x \in [0,1];$$

$$f(1) - f(x) = f'(\xi_2)(1-x), \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1-x,\ \ x \in [0,1]$$

$$\Longrightarrow f(x) \leq g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

因此

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

若存在满足题目条件的$f(x)$ 使得上述等式成立, 则

$$\int_0^1 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = 0,$$

但 $f(x), g(x)$ 连续且 $g(x) - f(x) \geq 0$, 利用**非负连续函数的积分为零, 当且仅当函数恒等于零**的结论, 推出 $f(x) \equiv g(x)$, 但是 $g(x)$ 在 $x = \dfrac{1}{2}$ 不可导, 矛盾. 因此不存在满足条件的函数使得等式成立.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数, $f(0)=0,\ f(1)=1$, 且 $|f'(x)|\le 1$, 求证

$$\int_0^1 |f(x)+f'(x)|\,\mathrm{d}x \ge 1.$$

证明 令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{x-1}$, 则 $F'(x)=(f(x)+f'(x))\mathrm{e}^{x-1}$, 推出

$$\int_0^1 (f(x)+f'(x))\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x = F(1)-F(0)=1$$

在 $[0,1]$ 上, $\mathrm{e}^{x-1}\le 1$, 所以

$$1=\left|\int_0^1 (f(x)+f'(x))\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 |f(x)+f'(x)|\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 |f(x)+f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

8. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上非负单调递增的连续函数, $0<\alpha<\beta<1$, 求证

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \ge \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

且$\dfrac{1-\alpha}{\beta-\alpha}$ 不能换成更大的数.

证明 令

$$F(u)=\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{u-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\beta\le u\le 1)$$

当 $\beta\le u\le 1,\ \alpha\le x\le\beta$ 时,$f(u)-f(x)\ge 0$,

$$\Longrightarrow F'(u)=f(u)-\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta (f(u)-f(x))\,\mathrm{d}x \ge 0,$$

所以 $F(u)$ 在 $[\beta,1]$ 上单调递增,

$$F(1)\ge F(\beta)=\int_0^\beta f(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0,$$

由此推出要证明的不等式.
若存在 λ, 使得对任意$[0,1]$ 上非负单调递增连续函数 $f(x)$, 有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \ge \lambda\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 特取$[0,1]$ 上非负单调递增连续函数 $f_\varepsilon(x)$

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \alpha, \\ \dfrac{1}{\varepsilon}(x-\alpha) & \alpha < x < \alpha+\varepsilon, \\ 1, & \alpha+\varepsilon \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}(x-\alpha)\,\mathrm{d}x + \int_{\alpha+\varepsilon}^1 \mathrm{d}x = 1-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\lambda \int_\alpha^\beta f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\left(\beta-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

所以由不等式

$$\int_0^1 f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \ge \lambda \int_\alpha^\beta f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x$$

推出

$$\lambda \le \frac{1-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}{\beta-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}},$$

对任意的 $\varepsilon > 0$ 成立. 令 $\varepsilon \to 0^+$ 得

$$\lambda \le \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

9. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数, $f(x), f'(x), f''(x)$ 都大于零, 假设存在正数 a, b, 使得 $f''(x) \le af(x)+bf'(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立, 求证

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$.

(2) 存在常数 c 使得 $f'(x) \le cf(x)$.

证明 因 $f''(x) > 0$, 推出 $f'(x)$ 单调增非负, 所以极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$ 存在有限. 同理, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在有限.

$$\Longrightarrow f(x+1)-f(x) = f'(\xi) \ge f(x) > 0 \quad x \le \xi \le x+1,$$

令 $x \to -\infty$, 得 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$.

取 $c = \dfrac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$, 则 $c > b$ 且 $(b-c)c = -a$, 所以

$$f''(x)-cf'(x) \le af(x)+bf'(x)-cf'(x) = (b-c)(f'(x)-cf(x)),$$

$$\Longrightarrow \left((f'(x)-cf(x))\mathrm{e}^{(c-b)x}\right)' \le 0,$$

推得 $(f'(x)-cf(x))\mathrm{e}^{(c-b)x}$ 单调减. 又因为

$$\lim_{x\to-\infty}(f'(x)-cf(x))\mathrm{e}^{(c-b)x}=\lim_{x\to-\infty}(f'(x)-cf(x))\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{(c-b)x}=0$$

所以 $(f'(x)-cf(x))\mathrm{e}^{(c-b)x}\le 0$, 即 $f'(x)\le cf(x)$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $0\le f(x)\le 1$, 求证

$$2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\ge\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

并求使上式成为等式的连续函数.

证明 令

$$F(u)=2\int_0^u xf(x)\,\mathrm{d}x-\left(\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\quad(0\le u\le 1),$$

$$\Longrightarrow F'(u)=2uf(u)-2f(u)\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x=2f(u)\int_0^u(1-f(x))\,\mathrm{d}x\ge 0$$

所以 $F(u)$ 单调增 $F(1)\ge F(0)=0$, 即推出不等式. 若有连续函数 $f(x)$ 使得等式成立, 则 $F(1)=0$, 因此 $F(u)=0\ \ (0\le u\le 1)$, 推出

$$F'(u)=2f(u)\int_0^u(1-f(x))\,\mathrm{d}x=0,$$

推出 $f(x)=0$ 或 $f(x)=1$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, $f(0)f(1)\ge 0$, 求证

$$\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x\le 2\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x$$

证明 设 $|f'(x)|$ 分别在x_1,x_2 取到最大、最小值:

$$M=|f'(x_1)|=\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|,\quad m=|f'(x_2)|=\min_{x\in[0,1]}|f'(x)|$$

因此有$M\ge\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 以及

$$\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x\ge\left|\int_{x_1}^{x_2}f''(x)\,\mathrm{d}x\right|=|f'(x_1)-f'(x_2)|\ge M-m.$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x - \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \ge M - m - \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \ge -m,$$

因此欲证不等式, 等价于证明

$$m \le 2\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

若$m=0$, 结论显然. 若 $m \ne 0$, 则 $f'(x)$ 在$[0,1]$ 上没有零点. 不妨设 $f'(x) > 0$ $(x\in[0,1])$, 推出 $f(x)$ 严格单调增, 并由于$f(x)$ 在端点同号, 所以$f(x)$ 在$[0,1]$ 上不变号. 不妨设 $f(x)>0$, 所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(0) + \int_0^1 (f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x \\ &\ge \int_0^1 (f(x)-f(0))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f'(\xi)x\,\mathrm{d}x \ge m\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}m\end{aligned}$$

12. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上取值为正的连续函数, 且对$\forall x,y\in\mathbb{R}$有

$$|f'(x)-f'(y)|^2 < |x-y|$$

求证 $|f'(x)|^3 < 3f(x) \quad (x\in\mathbb{R})$.

证明 若 $f'(x)=0$, 上式显然成立. 若 $f'(x)>0$, 则任取 $y<x$, 则

$$\begin{aligned}0 \le f(y) = f(x) - \int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t &= f(x) + \int_y^x (f'(x)-f'(t))\,\mathrm{d}t - (x-y)f'(x) \\ &\le f(x) + \int_y^x \sqrt{x-t}\,\mathrm{d}t - (x-y)f'(x) \\ &= f(x) - \frac{2}{3}(x-t)\Big|_y^x - (x-y)f'(x) \\ &= f(x) + \frac{2}{3}(x-y)^{3/2} - (x-y)f'(x)\end{aligned}$$

取 $y = x-(f'(x))^2 < x$, 代入得

$$f(x) + \frac{2}{3}(f'(x))^3 - (f'(x))^3 = f(x) - \frac{1}{3}(f'(x))^3,$$

即可得不等式. 若 $f'(x)<0$, 证法类似.

13. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上可微函数且有反函数. 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\displaystyle\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$.

解 先作换元变换 $x = f(y)$, 再用分部积分, 最后再用逆变换:

$$\begin{aligned}\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int y f'(y)\,\mathrm{d}y = \int y\,\mathrm{d}f(y)\\ &= yf(y) - \int f(y)\,\mathrm{d}y = yf(y) - F(y) + C\\ &= xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.\end{aligned}$$

14. 求积分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sin x + |\cos x|}\,\mathrm{d}x$

解 第一步利用对称性, 令 $u = \pi - x$:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sin x + |\cos x|}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - u)\sin u}{\sin u + |\cos u|}\,\mathrm{d}u$$

$$\Longrightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sin x + |\cos x|}\,\mathrm{d}x$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sin x + |\cos x|}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + |\cos x|}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{\sin x + |\cos x|}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

最后得 $I = \dfrac{\pi^2}{4}$.