2020级6系《信号与系统》期中考试试题 2022.4.13

姓名______ 学号______ 成绩______

一、对下列连续或离散时间 LTI 系统的 $h(t)$ 或 $h[n]$ 和 $x(t)$ 或 $x[n]$，分别试求： **(共 20 分)**

a) $h(t)=[\sin\pi t]u(t-1)$， $x(t)=u(t)-u(t-2)$

b) $h[n]=\delta[n]+a^n u[n-1]$， $x[n]=u[n+2]-u[n-3]$

1. 概画出 $h(t)$ 或 $h[n]$ 和 $x(t)$ 或 $x[n]$ 的波形或序列图形；(8 分)

2. 该连续或离散时间系统的输出 $y(t)$ 或 $y[n]$，并概画出它们的波形或序列图形；(8 分)

3. 写出该连续或离散时间 LTI 系统的单位阶跃响应 $s(t)$ 或 $s[n]$。(4 分)

二、对下列连续或离散时间系统，写出关系并判断性质。**(共 20 分)**

1. 由图 2.1 和图 2.2 所示的连续和离散时间系统，试写出它们的输入输出信号变换关系 (8 分)
（右图离散时间系统中基本单元分别为以 2 为单位的抽取及内插零）

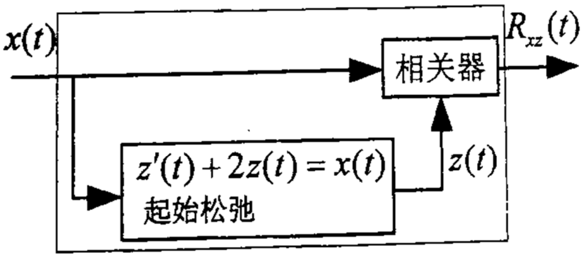


图 2.1

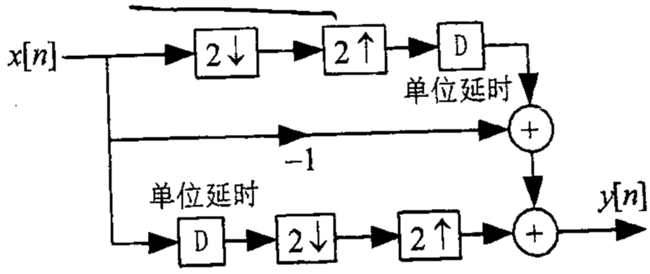


图 2.2

2. 在 1. 小题的基础上判断系统的四个性质，即 **a) 线性， b) 时不变性，c) 因果性，d) 稳定性 e) 记忆性 f) 可逆性**。不要求严格证明，但需说明作出判断的主要理由。 (12 分)

三、**试求下列小题：** **(每小题 10 分，共 20 分)**

1. 已知周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的图形如下，请问该信号是能量信号还是功率信号，如果是能量信号，求出信号的能量，如果是功率信号，求出其功率。

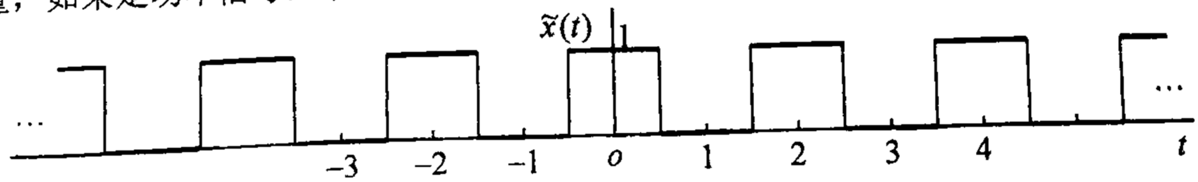
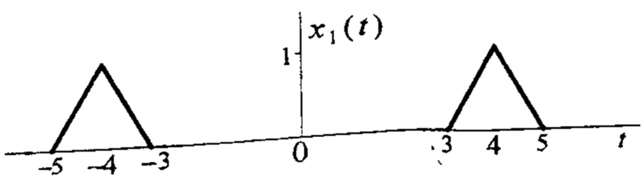
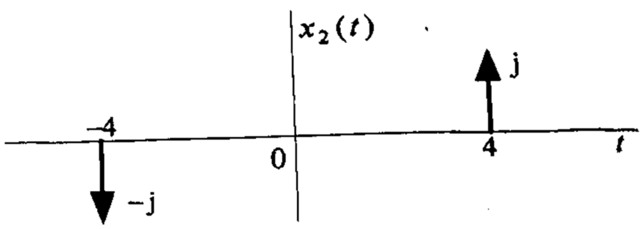


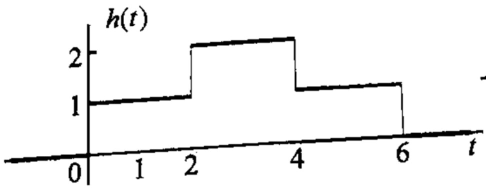
图 3.1

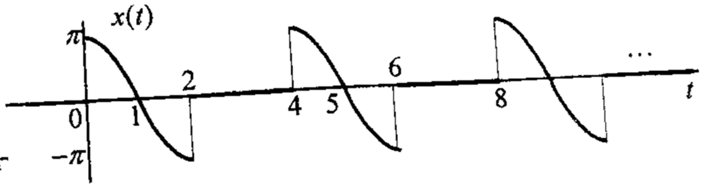
2. 对于下图所示的连续时间信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，试求它们的互相关函数 $R_{x_1x_2}(t)$，并概画出其波形。





四、某连续时间 LTI 系统单位冲激响应 $h(t)$ 和输入 $x(t)$ 如下图所示，$x(t)$ 中的每一段曲线均为**半个周期的余弦曲线**，且 $x(t)=0;t<0$。试求其输出 $y(t)$，并概画出它的波形。（10 分）





五、由如下方程和非零起始条件表征的离散时间因果系统：（15 分）

$$\begin{cases} y[n]-1.5y[n-1]+0.5y[n-2]=x[n]+\sum_{k=1}^{\infty}x[n-k] \\ y[-1]=3,\quad y[-2]=1 \end{cases}$$

1. 试用差分方程的**递推算法**，计算该系统在输入 $x[n]=\delta[n]$ 时的零输入响应 $y_{zi}[n]$ 和零状态响应 $y_{zs}[n]$，至少分别计算出前 4 个序列值。（10 分）
2. 对于用同样方程表示的离散时间**因果 LTI 系统**，试用**最少数目的**三种离散时间基本单元（离散时间数乘器、相加器和单位延时）实现该系统的直接实现结构。（5 分）

六、由如下微分方程和起始条件表征的连续时间因果系统，试分别求：（15 分）

$$y''(t)+2y'(t)+y(t)=x'(t)\ ;\quad y(0_-)=1\ ,\ y'(0_-)=2$$

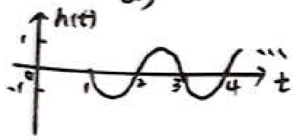
1) $x(t)=e^{-3t}u(t)$ 时的系统输出 $y(t)$，$t\ge 0$。并指出其零输入响应和零状态响应。（10 分）

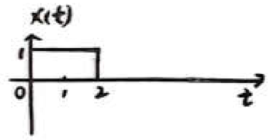
2) 对于用同样方程表示的连续时间**因果 LTI 系统**，试用**最少数目的**三种连续时间基本单元（连续时间数乘器、相加器和积分器）实现该系统的直接实现结构。（5 分）

一、

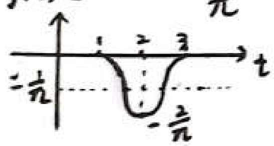
a)

1)



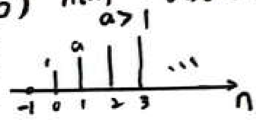


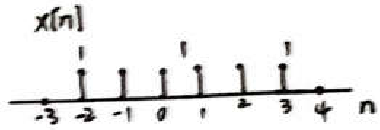
2) $y(t) = -\frac{1+\cos\pi t}{\pi}[u(t-1)-u(t-3)]$



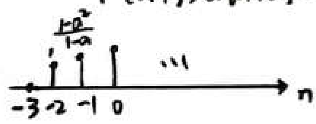
3) $s(t) = -\frac{1+\cos\pi t}{\pi}u(t-1)$

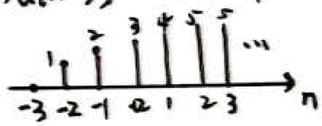
b) h[n] (分类讨论)





$$y[n] = \begin{cases} \frac{1-a^{n+3}}{1-a}u[n+2] - \frac{1-a^{n-2}}{1-a}u[n-3] & , a\neq 1 \\ (n+3)u[n+2]-(n-2)u[n-3] & , a=1 \end{cases}$$





$$s[n] = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n] & , a\neq 1 \\ (n+1)u[n] & , a=1 \end{cases}$$

三. 1) 功率信号 $P_x = \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{0.5} 1^2 dt = \frac{1}{2}$

2) $x_1(t) = u_{-2}(t-3) - u_{-2}(t-4) + u_{-2}(t-5) + u_{-2}(t+5) - 2u_{-2}(t+4) + u_{-2}(t+3)$

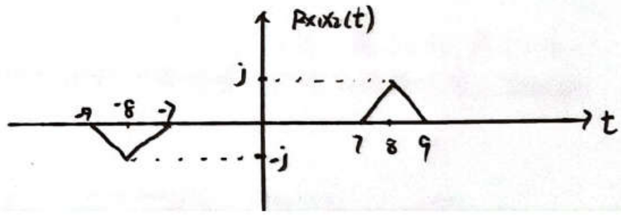
$x_2^*(-t) = j\delta(-t+4) - j\delta(-t-4) = -j\delta(t+4) + j\delta(t-4)$

$\Rightarrow R_{x_1x_2}(t) = j[-u_{-2}(t+9) + 2u_{-2}(t+8) - u_{-2}(t+7) + u_{-2}(t-7) - 2u_{-2}(t-8) + u_{-2}(t-9)]$

$x_1'(t) = u(t+5) - 2u(t+4) + u(t+3) + u(t-3) - 2u(t-4) + u(t-5)$

$\int x_2^*(-t) = -j[u(t+4) - u(t-4)]$

$\Rightarrow R_{x_1x_2}(t) = j[-(t+9)u(t+9) + 2(t+8)u(t+8) - \cdots]$



五.

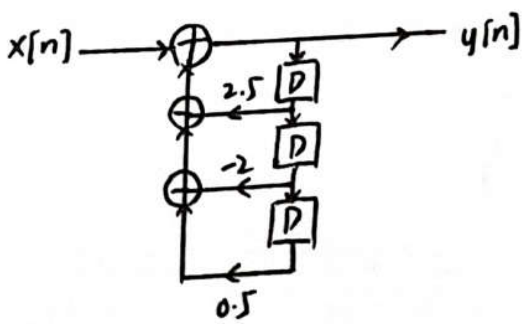
1) $\begin{cases} y_{zi}[n] = 1.5y_{zi}[n-1] - 0.5y_{zi}[n-2] \\ y_{zi}[-1] = 3,\ y_{zi}[-2] = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$

n	0	1	2	3
$y_{zi}[n]$	4	$4.5/\frac{9}{2}$	$4.75/\frac{19}{4}$	$4.875/\frac{39}{8}$

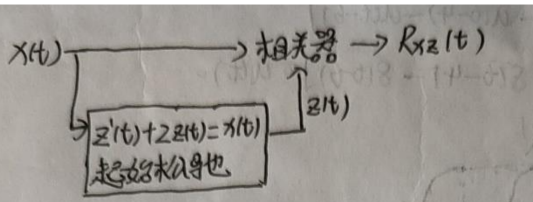
$\begin{cases} y_{zs}[n] = 1.5y_{zs}[n-1] - 0.5y_{zs}[n-2] + u[n] \\ y_{zs}[-1] = 0,\ y_{zs}[-2] = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$

n	0	1	2	3
$y_{zs}[n]$	1	$2.5/\frac{5}{2}$	$4.25/\frac{17}{4}$	$6.125/\frac{49}{8}$

2) $y[n] - 2.5y[n-1] + 2y[n-2] - \frac{1}{2}y[n-3] = x[n]$



二、解：(1)



关键点：① $R_{xz}=x(t)*[z^*(-t)]$

② $z(t)=x(t)*h(t)$ 以及 $h(t)$ 表达式

$$\begin{cases} h'(t)+2h(t)=0 \\ h(0)=1 \end{cases} \Rightarrow h(t)=e^{-2t}u(t)$$

则 $y(t)=R_{xz}(t)=x(t)*[z^*(-t)]$，$z(t)=x(t)*h(t)$

非线性、时变、非因果、不可逆、有记忆、不稳定.

证 ~~非线性~~：$y(t)=x(t)*[z^*(-t)]=x(t)*[x(-t)*h(-t)]^*$

则 $ax(t)\longrightarrow a^2y(t)$ 故非线性 同理时变、非因果、有记忆

当 $x(t)=1$ 时，$z(t)=\frac{1}{2}$ 则 $y(t)=\infty$ 故不稳定.

当 $x(t)=2$ 时，$y(t)=\infty$ 则不同输入产生相同输出，不可逆.

(2) 关键：先抽取再内插零并非没有影响 对于离散时间而言.

$x[n]\longrightarrow\boxed{\downarrow 2}\longrightarrow x_1[n]$ 则 $x_1[n]=x[2n]$，$-\infty<n<\infty$ 且 $n\in Z$.

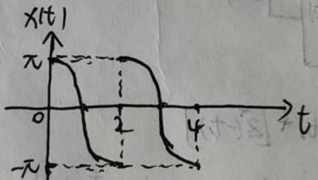
$x_1[n]\longrightarrow\boxed{\uparrow 2}\longrightarrow x_2[n]$ 则 $x_2[n]=\begin{cases} x_1[n/2], & n\text{为偶} \\ 0, & \text{else} \end{cases}=\begin{cases} x[n], & n\text{为偶} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

故 $y[n]=x[n-1]-x[n]$ 而非 $2x[n-1]-x[n]$

则系统线性、时不变、因果、稳定、可逆、有记忆

四解：$y(t)=x(t)*h(t)=x(t)*[u(t)+u(t-2)-u(t-4)-u(t-6)]$

$=x(t)*[\delta(t)+\delta(t-2)-\delta(t-4)-\delta(t-6)]*u(t)$

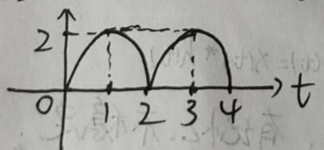


$x(t)*[\delta(t)+\delta(t-2)-\delta(t-4)-\delta(t-6)]$:

$=\pi\cos\frac{\pi}{2}t[u(t)-u(t-2)]+\pi\cos\frac{\pi}{2}(t-2)[u(t-2)-u(t-4)]$

则 $y(t)=2|\sin\frac{\pi}{2}t|[u(t)-u(t-4)]=2\sin\frac{\pi}{2}t[u(t)-u(t-2)]+2\sin\frac{\pi}{2}(t-2)[u(t-2)-u(t-4)]$

波形：



六解：(1) 零输入：$\begin{cases} y''(t)+2y'(t)+y(t)=0 \\ y'(0_-)=2,\ y(0_-)=1 \end{cases}$ $\lambda^2+2\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-1$

则 $y(t)=\underline{Ae^{-t}+Bte^{-t}}$

$y'(t)=-Ae^{-t}+Be^{-t}-Bte^{-t} \Rightarrow \begin{cases} B-A=2 \\ A=1 \end{cases}$ 则 $A=1,\ B=3$

$\underline{y_{zi}(t)=(e^{-t}+3te^{-t})u(t)}$

零状态：$\begin{cases} h_2''(t)+2h_2'(t)+h_2(t)=0 \\ h_2'(0)=1,\ h_2(0)=0 \end{cases} \Rightarrow h_2(t)=te^{-t}u(t)$ ，$h_1(t)=\delta'(t)$

则 $h(t)=h_1(t)*h_2(t)=(1-t)e^{-t}u(t)$

$y_{zs}(t)=x(t)*h(t)=[e^{-3t}u(t)]*[(1-t)e^{-t}u(t)]=\underline{(\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{3}{4}e^{-3t}-\frac{1}{2}te^{-t})u(t)}$

$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(\frac{7}{4}e^{-t}-\frac{3}{4}e^{-3t}+\frac{5}{2}te^{-t})u(t)$

(2)