第 3 章　变分法与最小作用量原理

虚位移是数学分析中的变分，分析力学的基本原理与变分法有直接联系。

变分法是数学分析中的核心内容，是强有力的理论工具。在量子力学、量子场论等后续课程，以及其它自然和工程学科中，都有变分法的应用。

一、　泛函与变分

1.　泛函的概念

普通的函数是从数到数的映射，

$$\begin{array}{llll} \varphi: & \mathrm{R} & \to & \mathbf{R} \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \to & y = \varphi(x_1, x_x, \cdots, x_n) \end{array}$$

自变量为一个或多个复数。

泛函是普通函数概念的推广，自变量是函数，或者函数的集合，

$$\Phi: \{\text{函数}\} \to \mathbf{R}$$

泛函的自变量称为**宗量**。即给定一条或多条函数曲线（多变量函数为曲面）$y = f(x)$，泛函将其对应到唯一的数值$\Phi[f] \in \mathbf{R}$。

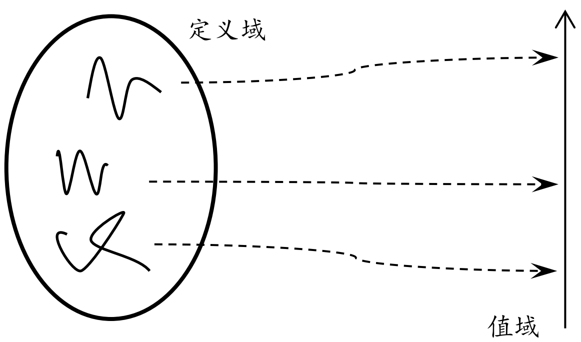


图 1 泛函的定义域和值域

例　$g(x) \overset{\text{def}}{=} x^2 + 2x$是函数；而

$$\begin{array}{llll} \Phi: & \mathrm{C}_{(-\infty,+\infty)} & \to & \mathbf{R} \\ & f & \to & \Phi[f] \overset{\text{def}}{=} f(1) \end{array}$$

是泛函，例如

$$\Phi[\sin] = \sin 1 \approx 0.84, \qquad \Phi[\exp] = \mathrm{e}^1 \approx 2.718, \qquad \Phi[g] = 3.$$

例　定义泛函

$$\begin{aligned} \Phi: \quad C_{[0,2]} &\to \mathbf{R} \\ f &\to \Phi[f] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^2 f(x)dx \end{aligned}$$

如果有两条曲线

$$\varphi_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-x}, \qquad \varphi_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-x^2} x \sin x,$$

那么

$$\Phi[\varphi_1] = 1 - e^{-2} \approx 0.864665, \qquad \Phi[\varphi_2] \approx 0.337979.$$

例　下面的泛函有两个宗量，

$$\Phi[f, g] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx$$

例 复合函数可以看作泛函

$$\Phi[f] \stackrel{\text{def}}{=} F\big(x, f(x)\big)$$

x是泛函定义式中的参数。

泛函可类比于多变量函数，

$$y = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \sim \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

$$\Phi[f] \sim \big\{f(z)\big|z \in f\text{的定义域}\big\}.$$

这里的$f(z)$相当于前面多变量函数的自变量x_i，$f \leftrightarrow x, z \leftrightarrow i$；泛函$\Phi[f]$是以无穷多个变量$f(x_1), f(x_2), \cdots$作为自变量的函数。

2. 泛函的连续性

对于泛函$\Phi[f]$，给定函数$f(x)$，如果能够满足

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当$|g(x) - f(x)| < \delta, |g'(x) - f'(x)| < \delta, \cdots, \left|g^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)\right| < \delta$时，有$|\Phi[g] - \Phi[f]| < \varepsilon$,

则称泛函$\Phi[f]$在f处<u>n阶接近</u>的**连续**。

3. 变分

类比于多变量函数$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其自变量的微分为

$$dx_j = x_j' - x_j$$

泛函$\Phi[f]$的自变量为$\{f(x) | x \in 定义域\}$，**宗量的变分**定义为函数形状的无穷小变化,

$$\delta f = f' - f, \qquad \delta f(x) = f'(x) - f(x) = \epsilon\eta(x)$$

其中ϵ是无穷小量，$\eta(x)$是连续有界函数。

保留到线性主部，多变量函数的微分定义为

$$d\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \cdots, x_n + dx_n) - \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

而泛函的变分则是

$$\delta\Phi[f] \stackrel{\text{def}}{=} \Phi[f + \delta f] - \Phi[f] \equiv \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \epsilon.$$

例　$\Phi[f] \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0), \delta\Phi[f] = (f + \delta f)(x_0) - f(x_0) = \delta f(x_0).$

例　$\delta \sin x = 0, \delta x = 0.$

例　位移

$$\vec{r}_i[q_1, q_2, \cdots, q_s] \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r}_i\big(t, q_1(t), q_2(t), \cdots, q_s(t)\big)$$

虚位移

$$\delta\vec{r}_i = \vec{r}_i\big(t, q(t) + \delta q(t)\big) - \vec{r}_i\big(t, q(t)\big) = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha(t)$$

例　$\Phi[f, g] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx$，

$$\begin{aligned}\delta\Phi[f, g] &= \Phi[f + \delta f, g + \delta g] - \Phi[f, g] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(f + \delta f)(x)(g + \delta g)(x)e^{-x^2}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\{\delta f(x)g(x) + f(x)\delta g(x)\}e^{-x^2}dx\end{aligned}$$

4. LAGRANGE 变分基本引理

函数集

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\eta \middle| \eta \in \mathrm{C}^{(2)}_{[x_1, x_2]}, \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0\right\}$$

若连续函数已知$G(x) \in \mathrm{C}_{[x_1, x_2]}$满足

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x)\eta(x)dx = 0, \qquad \forall \eta \in A$$

则必有

$$G(x) = 0, \qquad \forall x \in [x_1, x_2]$$

证明：反设$\exists a \in (x_1, x_2), G(a) = \alpha \neq 0$，不妨设$G(a) > 0$。由于$G(x)$连续，存在$a$点的邻域$[a - d, a + d] \subseteq [x_1, x_2]$，在$[a - d, a + d]$上$G(x) \geq \frac{\alpha}{2} > 0$。现在构造$\eta(x)$为

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a-d, a+d]; \\ -\big(x-(a-d)\big)^3\big(x-(a+d)\big)^3 > 0, & x \in [a-d, a+d], \end{cases}$$

则

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x)\eta(x)dx = \int_{a-d}^{a+d} G(x)\eta(x)dx \geq \frac{\alpha}{2}\int_{a-d}^{a+d} \eta(x)dx > 0$$

与$\int_{x_1}^{x_2} G(x)\eta(x)dx = 0$矛盾，所以$\forall a \in (x_1, x_2), G(a) = 0$。再由函数的连续性，在端点上同样有$G(x_1) = G(x_2) = 0$。

注：定理中$\eta(x)$所需满足的条件可以更改为“连续”或者“1 阶导数连续”，“3 阶导数连续”等等。

5. 泛函的导数

多变量函数的偏导数定义为

$$\frac{\partial \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_j} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\varphi\big(x_1, \cdots, x_j + \Delta x_j, \cdots, x_n\big) - \varphi\big(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n\big)}{\Delta x_j}$$

或者写成微分形式，

$$d\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}dx_n = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx_j$$

类似的，泛函的导数定义为

$$\delta\Phi[f] \equiv \int \frac{\delta\Phi}{\delta f}(x)\delta f(x)dx$$

通常习惯把$\frac{\delta\Phi}{\delta f}(x)$写成$\frac{\delta\Phi}{\delta f(x)}$。

例　$\Phi[f] \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0)$，$\delta\Phi[f] = \Phi[f + \delta f] - \Phi[f] = \delta f(x_0)$，

$$\left.\begin{array}{c}\delta\Phi[f]=\displaystyle\int\frac{\delta\Phi}{\delta f(x)}\delta f(x)dx=\int\frac{\delta f(x_0)}{\delta f(x)}\delta f(x)dx\\ \delta f(x_0)=\displaystyle\int\delta(x-x_0)\delta f(x)dx\end{array}\right\}\Rightarrow\int\left\{\frac{\delta f(x_0)}{\delta f(x)}-\delta(x-x_0)\right\}\delta f(x)dx=0$$

这里$\delta f(x)\sim\epsilon\eta(x)$，由 Lagrange 引理，

$$\frac{\delta f(x_0)}{\delta f(x)}-\delta(x-x_0)\Rightarrow\boxed{\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)}=\delta(x-y)}$$

例　$\Phi[f]\stackrel{\text{def}}{=}f'(a)$，

$$\delta\Phi=\delta f'(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\delta f'(x)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(x-a)\delta f(x)dx\Rightarrow\frac{\delta f'(x)}{\delta f(y)}=\frac{d}{dx}\delta(x-y)$$

例　$\Phi[f,g]=\int_0^\infty e^{-x}f(x)g(x)dx$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Phi}{\delta f(x)}&=\int_0^\infty e^{-y}\left\{\frac{\delta f(y)}{\delta f(x)}g(y)+f(y)\frac{\delta g(y)}{\delta f(x)}\right\}dy=\int_0^\infty e^{-y}\{\delta(y-x)g(y)+f(y)\cdot 0\}dy\\&=e^{-x}g(x)\theta(x)\end{aligned}$$

$$\frac{\delta\Phi}{\delta g(x)}=e^{-x}f(x)\theta(x)$$

其中$\theta(x)$是阶跃函数（Heaviside function）。

例　$\Phi[f]\stackrel{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\{f(x^2+1)+2f(x)\}dx$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Phi}{\delta f(y)}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\delta f(x^2+1)}{\delta f(y)}+2\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)}\right\}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\{\delta(x^2+1-y)+2\delta(x-y)\}dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\theta(y-1)}{2\sqrt{y-1}}\delta\left(x-\sqrt{y-1}\right)+\frac{\theta(y-1)}{2\sqrt{y-1}}\delta\left(x+\sqrt{y-1}\right)+2\delta(x-y)\right\}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{y-1}}\theta(y-1)+2\end{aligned}$$

上面用了狄拉克δ函数的性质

$$\delta\big(\varphi(x)\big)=\sum_{x_0\ni\varphi(x_0)=0}\frac{1}{|\varphi'(x_0)|}\delta(x-x_0)$$

另一种计算方法（用变分）：

$$\begin{aligned}\delta\Phi&=\int_{-\infty}^{+\infty}\{\delta f(x^2+1)+2\delta f(x)\}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta f(x^2+1)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}2\delta f(x)dx\\&=\int_1^{+\infty}\delta f(y)d\left(+\sqrt{y-1}\right)+\int_{+\infty}^{1}\delta f(y)d\left(-\sqrt{y-1}\right)+\int_{-\infty}^{+\infty}2\delta f(x)dx\quad(y\stackrel{\text{def}}{=}x^2+1)\end{aligned}$$

$$= 2\int_1^{+\infty}\delta f(y)d\left(\sqrt{y-1}\right) + \int_{-\infty}^{+\infty}2\delta f(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y-1}}\delta f(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty}2\delta f(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\theta(x-1)+2\right)\delta f(x)dx$$

6. 变分的运算规则

与微分法则类似，可以证明，

$$\delta(c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2) = c_1\delta\Phi_1 + c_2\delta\Phi_2 \text{（线性）}$$

$$\delta(\Phi_1\Phi_2) = \delta\Phi_1\cdot\Phi_2 + \Phi_1\cdot\delta\Phi_2 \left(\text{Leibniz 法则}\right)$$

$$\delta\left(F(\Phi_1,\cdots,\Phi_n)\right) = \frac{\partial F}{\partial\Phi_j}\delta\Phi_j \text{（链式法则）}$$

$$\delta\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right) = \frac{\delta\Phi_1\cdot\Phi_2 - \Phi_1\delta\Phi_2}{\Phi_2^2}, \qquad \delta(\Phi^n) = n\Phi^{n-1}\delta\Phi$$

7. 变分可以与微分、积分交换次序

按定义，

$$\begin{aligned}\delta\frac{d}{dx}f(x) &\equiv \delta\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\right\}\\ &\equiv \left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(f+\delta f)(x+\varepsilon)-(f+\delta f)(x)}{\varepsilon}\right\} - \left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\right\}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\delta f(x+\varepsilon)-\delta f(x)}{\varepsilon} = \frac{d}{dx}\delta f(x)\end{aligned}$$

$$\left[\frac{d}{dx},\delta\right] = 0$$

因此对虚位移，$\delta\frac{d}{dt}\vec{r}_i(t) = \frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i(t)$，在分析力学中称为**等时变分**或**简单变分**。

对于积分，

$$\begin{aligned}\delta\int_a^b F(x,f,f')dx &\equiv \int_a^b F(x,f+\delta f,f'+\delta f')dx - \int_a^b F(x,f,f')dx\\ &= \int_a^b\{F(x,f+\delta f,f'+\delta f') - F(x,f,f')\}dx = \int_a^b \delta F(x,f,f')dx\end{aligned}$$

$$\left[\int_a^b dx,\delta\right] = 0$$

8. 泛函的高阶变分

与高阶微分的计算规则相同。

以二阶变分为例，

$\Phi[f,g] \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b F(f,g,x)dx$，

$$\delta\Phi = \int_a^b \left\{\frac{\partial F}{\partial f}\delta f(x) + \frac{\partial F}{\partial g}\delta g(x)\right\}dx,$$

$$\begin{aligned}\delta^2\Phi = \delta(\delta\Phi) = \delta\int_a^b \left\{\frac{\partial F}{\partial f}\delta f(x) + \frac{\partial F}{\partial g}\delta g(x)\right\}dx = \int_a^b \left\{\left(\delta\frac{\partial F}{\partial f}\right)\delta f(x) + \left(\delta\frac{\partial F}{\partial g}\right)\delta g(x)\right\}dx \\ = \int_a^b \left\{\frac{\partial^2 F}{\partial f\partial f}\big(\delta f(x)\big)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial f\partial g}\delta f(x)\delta g(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial g\partial g}\big(\delta g(x)\big)^2\right\}dx\end{aligned}$$

9. 泛函的积分

路径积分$\int \Phi[f][\mathfrak{D}f]$（注意这不是泛函导数的逆问题反变分）

将积分变量的定义区间$n+1$等分，变成对$y_1 = f(x_1), \cdots, y_n = f(x_n)$普通多变量函数积分，最后取极限$n \to +\infty$。

例如量子力学中的传播子为

$$K(q_b,t_b;q_a,t_a) = \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} L(t,q,\dot{q})dt\right\}[\mathfrak{D}q]$$

波动 惠更斯原理, Feynman 路径积分，Lattice QCD，连续随机过程，经济学中的定价理论

10. 可动边界的变分

如果不仅曲线形状发生了变化，积分边界也又变动，即泛函的宗量包括了函数和作为积分边界的实参量，

$$\Phi[f,x_1,x_2] = \int_{x_1}^{x_2} F\big(x,f(x),f'(x)\big)dx$$

这时的变分

$$\begin{aligned}&\delta\Phi[f,x_1,x_2] = \Phi[f+\delta f, x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2] - \Phi[f,x_1,x_2] \\ &= \int_{x_1+\Delta x_1}^{x_2+\Delta x_2} F\big(x,(f+\delta f)(x),(f'+\delta f')(x)\big)dx - \int_{x_1}^{x_2} F\big(x,f(x),f'(x)\big)dx \\ &= F\big(x_2,f(x_2),f'(x_2)\big)\Delta x_2 - F\big(x_1,f(x_1),f'(x_1)\big)\Delta x_1 + \int_{x_1}^{x_2}\delta F\big(x,f(x),f'(x)\big)dx\end{aligned}$$

$$= (F\Delta x)|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx$$

11. 全变分

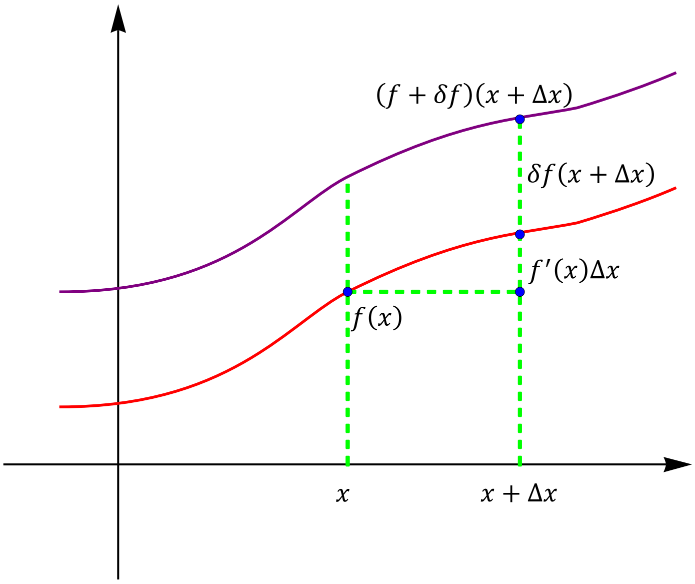


图 2 泛函宗量的全变分

如图所示，考虑自变量的微小变化

$$x \to \tilde{x} = x + \Delta x(x)$$

其中Δx可微函数，

$$\Delta x = \Delta x(x), \qquad x \in [x_1, x_2]$$

函数形状也发生变化，

$$f \to \tilde{f} = f + \delta f$$

两种变化同时发生，定义泛函宗量的全变分为

$$\Delta f(x) \overset{\text{def}}{=} (f+\delta f)(x+\Delta x) - f(x)$$

$$(f+\delta f)(x+\Delta x) - f(x) = f(x+\Delta x) + \delta f(x+\Delta x) - f(x)$$

保留到线性项，有

$$\boxed{\Delta f(x) = \delta f(x) + f'(x)\Delta x}$$

以及函数的全变分

$$\Delta F=F\left(\tilde{x},\tilde{f}(x),\tilde{f}'(x)\right)-F\big(x,f(x),f'(x)\big)$$

$$\boxed{\Delta F\big(x,f(x),f'(x)\big)=\delta F(x,f,f')+\frac{dF(x.f,f')}{dx}\Delta x}$$

而这时积分型泛函

$$\Phi[f,x_1,x_2]=\int_{x_1}^{x_2}F\big(x,f(x),f'(x)\big)dx$$

的变化称为**全变分**，有两部分贡献：一是曲线形状发生变化带来的改变；二是由于积分哑元的变化$x\to x+\Delta x(x)$，引起积分边界改变

$$x_1\to\tilde{x}_1=x_1+\Delta x(x_1),\qquad x_2\to\tilde{x}_2=x_2+\Delta x(x_2)$$

所致。可见全变分是一种可动边界变分。

记

$$\Delta x_1\overset{\text{def}}{=}\Delta x(x_1),\qquad \Delta x_2\overset{\text{def}}{=}\Delta x(x_2)$$

积分型泛函的全变分记为

$$\begin{aligned}\Delta\Phi&\overset{\text{def}}{=}\Phi\big[\tilde{f},x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2\big]-\Phi[f,x_1,x_2]\\&=\int_{\tilde{x}=\tilde{x}_1}^{\tilde{x}=\tilde{x}_2}F\left(\tilde{x},\tilde{f}(\tilde{x}),\frac{d\tilde{f}(\tilde{x})}{d\tilde{x}}\right)d\tilde{x}-\int_{x=x_1}^{x=x_2}F\left(x,f(x),\frac{df(x)}{dx}\right)dx\end{aligned}$$

把第一项的积分哑元仍记成x，

$$\begin{aligned}\Delta\Phi&=\int_{x=x_1+\Delta x_1}^{x=x_2+\Delta x_2}F\big(x,(f+\delta f)(x),(f'+\delta f')(x)\big)dx-\int_{x=x_1}^{x=x_2}F\big(x,f(x),f'(x)\big)dx\\&=(F\Delta x)\big|_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\delta F dx\end{aligned}$$

推论 1 全变分与积分不能交换顺序。

利用

$$\begin{aligned}\Delta\int_{x_1}^{x_2}Fdx&=\int_{x_1}^{x_2}\delta Fdx+F\Delta x\big|_{x_1}^{x_2}=\int_{x_1}^{x_2}\delta Fdx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}(F\Delta x)dx\\&=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\delta F+\frac{dF}{dx}\Delta x+F\frac{d(\Delta x)}{dx}\right\}dx=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\Delta F+F\frac{d(\Delta x)}{dx}\right\}dx\end{aligned}$$

知

$$\boxed{\Delta\int_{x_1}^{x_2}Fdx=\int_{x_1}^{x_2}\Delta Fdx+\int_{x_1}^{x_2}Fd(\Delta x)}$$

$$\left[\Delta, \int_{x_1}^{x_2} dx\right] F = \int_{x_1}^{x_2} d(\Delta x) F$$

推论 2　　全变分和求导也不能交换顺序。

对宗量

$$\frac{d}{dx}\big(\Delta f(x)\big) = \frac{d}{dx}\{\delta f(x) + f'(x)\Delta x\} = \underline{\delta f'(x) + f''(x)\Delta x} + f'(x)\frac{d(\Delta x)}{dx}$$
$$= \Delta\frac{d}{dx}f(x) + f'(x)\frac{d(\Delta x)}{dx}$$

同样可得对泛函宗量的函数有

$$\frac{d}{dx}\Delta F(x, f, f') = \frac{d}{dx}\left(\delta F + \frac{dF}{dx}\Delta x\right) = \underline{\delta\frac{dF}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dx}\right)\Delta x} + \frac{dF}{dx}\frac{d(\Delta x)}{dx}$$
$$= \Delta\frac{d}{dx}F(x, f, f') + \frac{dF}{dx}\frac{d(\Delta x)}{dx}$$

$$\left[\frac{d}{dx}, \Delta\right] F = \frac{d(\Delta x)}{dx}\frac{d}{dx}F$$

二、　泛函的极值

1.　泛函的极值

泛函$\Phi[f]$取平稳值的条件为$\frac{\delta\Phi}{\delta f} = 0$，或等价地$\delta\Phi = 0$. 满足$\delta\Phi[f] = 0$的曲线$y = f(x)$称为极值函数或**致极曲线**（the extremal function, the minimizer）。

泛函取极值的条件除了$\delta\Phi = 0$外，还必须满足$\delta^2\Phi < 0$（取极大值）或$\delta^2\Phi > 0$（取极小值）。

2.　不动边界的泛函极值

在数学史上，对最速降线问题（the brachistochrone problem）的分析导致了变分法（calculus of variation）的发明。

(1)　最速降线

例　（J. Bernoulli, 1696 年）垂直平面上有两个固定的点A, B，两点之间用曲线$y = f(x)$连接. 一个质点被束缚在曲线上，初速为 0，在重力作用下无摩擦下降。什么样的曲线形状可以使质点从A到B所花的时间最少？

解　以水平方向为x轴，向下方向为y轴，A点为原点，曲线形状为

$$y = y(x), \qquad x \in [x_A, x_B]$$

不妨设$x_B > 0, y_B > 0$。

由机械能守恒可得质点速度v,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

通过无穷小距离ds所需的时间为

$$dt = \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx$$

从A到B所花的总时间为

$$t_{AB}[f] = \int_{t=t_A}^{t=t_B} dt = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+f'^2}{2gf}}dx$$

取极值的必要条件是变分为零,

$$\delta t_{AB} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\delta t_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \delta\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx \\
&= \int_{x_A}^{x_B} \left\{\left(\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\right)\delta y(x) + \left(\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\right)\delta y'(x)\right\}dx \\
&= \left\{\left(\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\right)\delta y\right\}\Bigg|_{x=x_A}^{x=x_B} + \int_{x_A}^{x_B}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\right)\right\}\delta y(x)dx
\end{aligned}$$

边界点函数值固定，

$$y(x_A) = y_A \Longrightarrow \delta y(x_A) = 0$$

$$y(x_B) = y_B \Longrightarrow \delta y(x_B) = 0$$

取极值时，

$$\delta t_{AB} = \int_{x_A}^{x_B}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\right)\right\}\delta y(x)dx = 0$$

考虑二阶连续函数

$$y(x) \in \mathrm{C}_{[x_A, x_B]}^{(2)}$$

由拉格朗日变分基本引理，

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\right) = 0$$

整理后得

$$\frac{y''}{1+y'^2} + \frac{1}{2y} = 0$$

可变形为

$$\frac{2y'dy'}{1+y'^2} = -\frac{dy}{y}$$

积分,

$$\ln(1+y'^2) = c - \ln y \Longrightarrow (1+y'^2)y = c_1 \geq 0$$

再写成

$$dy\sqrt{\frac{y/c_1}{1-y/c_1}} = \pm dx$$

引进参数θ，作三角代换，

$$y/c_1 = \sin^2\frac{\theta}{2} \Longrightarrow y = \frac{c_1}{2}(1-\cos\theta)$$

$$dx = \pm\frac{c_1}{2}\tan\theta\sin\theta\, d\theta \Longrightarrow dx = \pm\frac{c_1}{2}\tan^2\theta\, d(\sin\theta) \Longrightarrow x = c_2 \pm \frac{c_1}{2}(-\theta+\sin\theta)$$

考虑边界条件

$$\left.\begin{aligned} y_A = 0 \Longrightarrow \theta_A = 0 \\ x_A = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow c_2 = 0$$

以及

$$x_B > 0, y_B > 0 \Longrightarrow x = \frac{c_1}{2}(-\theta+\sin\theta)$$

记

$$a=\frac{c_1}{2}>0$$

曲线方程可以改写成

$$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$$

是摆线。

(2) 不动边界的积分型泛函驻值

对积分型泛函

$$\Phi[f]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,f,f')dx$$

满足边界条件

$$f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2$$

的驻值条件为

$$\begin{aligned}0=\delta\Phi=\int_{x_1}^{x_2}\delta F(x,f,f')dx&=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial f}\delta f(x)+\frac{\partial F}{\partial f'}\delta f'(x)\right\}dx\\&=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial f}\delta f(x)+\frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d}{dx}\delta f(x)\right\}dx\\&=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial f}\delta f(x)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\delta f(x)\right)-\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\delta f(x)\right\}dx\\&=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial f}-\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\right\}\delta f(x)dx+\frac{\partial F}{\partial f'}\delta f(x)\Big|_{x=x_1}^{x=x_2}\\&=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial f}-\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\right\}\delta f(x)dx\end{aligned}$$

取$\delta f(x)=\epsilon\eta(x)$，利用变分基本引理，$f\in C_{[x_1,x_2]}^{(2)}$的解必须满足欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}=0$$

或

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial f'}-\frac{\partial^2 F}{\partial f\partial f'}f'-\frac{\partial^2 F}{\partial f'\partial f'}f''=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}f'-F\right)=0$$

如果没有指定边界处的函数值，则$\delta f(x_1),\delta f(x_2)\neq 0$，应视为独立的变分，得自然边界条件

$$\left.\frac{\partial F}{\partial f'}\right|_{x=x_1}=0,\qquad \left.\frac{\partial F}{\partial f'}\right|_{x=x_2}=0$$

(3) EULER 方程的首次积分

①$F=F(f,f')$，“广义能量”$f'\frac{\partial F}{\partial f'}-F=\text{constant}$

②$F=F(x,f')$，“广义动量”$\frac{\partial F}{\partial f'}=\text{constant}$

③$F=F(x,f)$，得代数方程$\frac{\partial F}{\partial f}=0.$

例　最速降线的另一种解法

设$y=\varphi(x)$，$t_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{\frac{(1+\varphi'^2)}{\varphi}}dx$，$F(\varphi,\varphi')=\sqrt{\frac{(1+\varphi'^2)}{\varphi}}$，有“广义能量积分”，……

(4) 多宗量泛函的固定边界驻值

$$\Phi[f_1,f_2,\cdots,f_N]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,f_1,\cdots,f_N,f_1',\cdots,f_N')dx\,,\qquad f_\alpha(x_1)=y_{\alpha1},f_\alpha(x_2)=y_{\alpha2}$$

Euler 方程为

$$\frac{\partial F}{\partial f_\alpha}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f_\alpha'}=0,\qquad \alpha=1,2,\cdots,N.$$

不指定边值时，自然边界条件为

$$\left.\frac{\partial F}{\partial f_\alpha'}\right|_{x=x_1,x_2}=0$$

(5) 多重积分型泛函的固定边界驻值

$$\Phi[f]=\int_D F\left(x_1,\cdots,x_n,f,\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)dx_1\cdots dx_n\,,\qquad \text{边界值}f(\partial D)\text{已指定。}$$

Euler 方程

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\bar{\partial}_{x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial(\partial_i f)}\right)=0$$

注意左边第二项$\bar{\partial}_{x_i}$是对整个括号中式子求全导数（“全”偏导数），

$$\bar{\partial}_{x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial(\partial_i f)}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 F}{\partial(\partial_i f)\partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial(\partial_i f)\partial f}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial(\partial_i f)\partial\left(\partial_j f\right)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

若不指定边值，边值可变，可得自然边界条件

$$\left.\frac{\partial F}{\partial(\partial_i f)}\right|_{(x_1,\cdots,x_n)\in\partial D} = 0$$

(6) 含高阶导数泛函的固定边界驻值

以 2 阶为例计算。……

一般的含n阶导数的泛函

$$\Phi[f] = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, f, f', \cdots, f^{(n)}\right)dx, \qquad f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \cdots, f^{(n)}(x_1) = y_{n1}, f^{(n)}(x_2) = y_{n2}$$

Euler 方程为

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial f^{(n)}}\right) = 0$$

自然边界条件

$$\text{当}x = x_1, x_2\text{时，}\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial f'} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial f^{(2)}}\right) + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\dfrac{\partial F}{\partial f^{(n)}}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial f^{(2)}} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial f^{(3)}}\right) + \cdots + (-1)^{n-2}\dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\dfrac{\partial F}{\partial f^{(n)}}\right) = 0 \\ \cdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial f^{(n)}} = 0 \end{cases}$$

3. 泛函的条件极值

(1) 悬链线（自习）

J.Bernoulli,1690.

不可伸长的柔性链，线密度为ρ，长度为l，两端挂在 A、B 两个固定点上。求绳子的形状。

解 AB 线段所在的垂直平面内，以水平方向为x轴，垂直向上为y轴，建立直角坐标系。平衡时，链的形状$y = y(x)$使得势能取极小。

$$V[y] = \int_A^B \rho g y ds = \rho g \int_A^B y\sqrt{1 + y'^2}dx$$

绳长不变，得约束条件

$$0=\Psi[y]=\int_A^B ds-l=\int_A^B\sqrt{1+y'^2}dx-l$$

由于有约束，$\delta y(x)$不独立。引进拉氏乘子，得

$$\delta V+\lambda\delta\Psi=0$$

$$\delta V+\lambda\delta f=0\Rightarrow\sqrt{1+y'^2}-\frac{d}{dx}\frac{yy'+\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0$$

可以直接求解方程，也可以利用“广义能量积分”，

$$V+\lambda\Psi=\int_A^B(\rho gy+\lambda)\sqrt{1+y'^2}dx\overset{\text{def}}{=}\int_A^B F(y,y')dx$$

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=(\rho gy+\lambda)\left\{y'\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}-\sqrt{1+y'^2}\right\}=(\rho gy+\lambda)\frac{-1}{\sqrt{1+y'^2}}=c$$

$$\Rightarrow y'=\pm\sqrt{\left(\frac{\rho gy+\lambda}{c}\right)^2-1}\Rightarrow\frac{c_1dy}{\pm\sqrt{(y+\lambda_1)^2-c_1^2}}=dx$$

$$\Rightarrow c_1\ln\left(y+\lambda_1+\sqrt{(y+\lambda_1)^2-c_1^2}\right)=x+d$$

$$\Rightarrow y=a\cosh\left(\frac{x-x_0}{a}\right)+y_0$$

3 个待定常数（2 个积分常数，1 个来自拉氏乘子）由代数方程

$$y(x_A)=y_A,\qquad y(x_B)=y_B,$$

$$l=\int_A^B\sqrt{1+y'^2}dx=\int_A^B\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x-x_0}{a}\right)}dx=\int_A^B\cosh\frac{2(x-x_0)}{a}dx=\frac{a}{2}\sinh\frac{2(x-x_0)}{a}\bigg|_{x=x_A}^{x=x_B}$$

确定。

注：将坐标原点平移，总可以把悬链线方程写成$y=a\cosh\frac{x}{a}$。

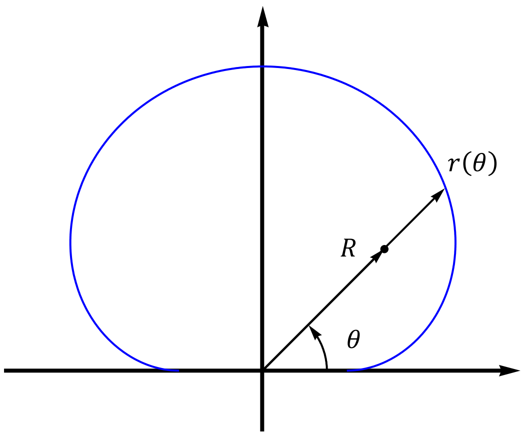
一些教材上没有严格地按条件极值来处理。

此问题也可以用牛顿力学来解。设张力为$T(x)$，水平方向力的平衡：$d\left(\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}T\right)=0\Rightarrow T=\alpha\sqrt{1+y'^2}$；垂直方向力的平衡：$d\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}T\right)=\rho g\sqrt{1+y'^2}dx$。把第一式代入第二式，$y''=\frac{\rho g}{\alpha}\sqrt{1+y'^2}\Rightarrow y'=\sinh(ax+b)$，$y=\frac{1}{a}\cosh(ax+b)+c$; $T=\frac{\rho g}{a}\cosh(ax+b)$，$T_x=\frac{\rho g}{a}$，$T_y=\frac{\rho g}{a}y'=\frac{\rho g}{a}\sinh(ax+b)$.

(2) 水银滴的表面形状

一滴水银静止于水平桌面上，求它的表面形状。

设水银的密度为ρ，体积为V_0；水银与空气之间的表面张力系数为σ，水银与桌面间的表面张力系数为σ_1，桌面与空气之间的表面张力系数为σ_0。



由对称性，水银的表面旋转对称。取坐标原点为桌面上水银滴的中心点，桌面为x-y平面，则水银的表面可以用广义坐标$r = r(\theta)$描述，其中r是表面上的点 P 到原点的距离，θ是 P 点与原点的连线对桌面的夹角，$\theta \in [0, \pi/2]$。

水银的形状满足体积为V_0的约束条件，

$$V[r] = \iiint R^2 dR d(\sin\theta) d\varphi$$
$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r(\theta)} \cos\theta R^2 dR d\theta$$
$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\theta\, d\theta$$

按虚功原理，水银的形状应该使得势能最低。势能分为重力势能和表面能两部分，

$$E = V_g + V_s$$

重力势能为

$$V_g[r] = \iiint R\sin\theta\, \rho g R^2 dR d(\sin\theta) d\varphi$$
$$= 2\pi\rho g \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r(\theta)} R^3 \sin\theta \cos\theta\, dR d\theta = \frac{1}{4}\pi\rho g \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 \sin(2\theta) d\theta$$

总表面能为液气表面积S_1和液固表面积S_2的表面能之和，

$$V_s[r] = \sigma S_1 + (\sigma_1 - \sigma_0) S_2$$
$$= \sigma \int 2\pi r\cos\theta \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2} + (\sigma_1 - \sigma_0)\pi\big(r(0)\big)^2$$
$$= 2\pi\sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{r'^2 + r^2} \cos\theta\, d\theta + (\sigma_1 - \sigma_0)\pi\big(r(0)\big)^2$$

由虚功原理，液面形状满足

$$\delta\Phi = 0$$

$$\Phi \overset{\text{def}}{=} V_g[r] + V_s[r] + \lambda(V[r] - V_0)$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left\{\frac{1}{4}\pi\rho g r^4 \sin(2\theta) + \left(2\pi\sigma r\sqrt{r'^2 + r^2} + \frac{2\pi}{3}\lambda r^3\right)\cos\theta\right\} + (\sigma_1 - \sigma_0)\pi\big(r(0)\big)^2 - \lambda V_0$$

其中λ是 Lagrange 乘子，为待定常数。记拉格朗日函数

$$F(\theta,r,r')\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{4}\pi\rho g r^4\sin(2\theta)+\left(2\pi\sigma r\sqrt{r'^2+r^2}+\frac{2\pi}{3}\lambda r^3\right)\cos\theta$$

计算变分，

$$\delta\Phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left\{\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{d}{d\theta}\frac{\partial F}{\partial r'}\right\}\delta r+\left.\left(\frac{\partial F}{\partial r'}\delta r\right)\right|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}+2\pi(\sigma_1-\sigma_0)r(0)\delta r(0)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left\{\pi\rho g\sin(2\theta)\,r^3+\left(2\pi\sigma\sqrt{r'^2+r^2}+2\pi\sigma\frac{r^2}{\sqrt{r'^2+r^2}}+2\pi\lambda r^2\right)\cos\theta\right.$$

$$\left.-2\pi\sigma\frac{d}{d\theta}\frac{rr'\cos\theta}{\sqrt{r'^2+r^2}}\right\}\delta r+2\pi\sigma\left.\left(\frac{rr'\cos\theta}{\sqrt{r'^2+r^2}}\delta r\right)\right|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}+2\pi(\sigma_1-\sigma_0)r(0)\delta r(0)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left\{\rho g\sin(2\theta)\,r^3+\left(2\sigma\sqrt{r'^2+r^2}+2\sigma\frac{r^2}{\sqrt{r'^2+r^2}}+2\lambda r^2\right)\cos\theta-2\sigma\frac{d}{d\theta}\frac{rr'\cos\theta}{\sqrt{r'^2+r^2}}\right\}\pi\delta r$$

$$+\left\{-\sigma\frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0)+r^2(0)}}+(\sigma_1-\sigma_0)\right\}2\pi r(0)\delta r(0)$$

又因为

$$\frac{d}{d\theta}\frac{rr'\cos\theta}{\sqrt{r'^2+r^2}}=\left\{\frac{r''r+r'^2}{\sqrt{r'^2+r^2}}+r'r\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2r'r''+2r'r}{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}\cos\theta-\frac{rr'}{\sqrt{r'^2+r^2}}\sin\theta$$

$$=\left\{\frac{r''r+r'^2}{\sqrt{r'^2+r^2}}-\frac{r'^2r''r+r'^2r^2}{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}\cos\theta-\frac{rr'}{\sqrt{r'^2+r^2}}\sin\theta=\frac{r''r^3+r'^4}{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\theta-\frac{rr'}{\sqrt{r'^2+r^2}}\sin\theta$$

得

$$\delta\Phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left\{\rho g\sin(2\theta)\,r^3+2\lambda r^2\cos\theta+2\sigma\cos\theta\left(\sqrt{r'^2+r^2}+\frac{r^2}{\sqrt{r'^2+r^2}}-\frac{r''r^3+r'^4}{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right.$$

$$\left.+2\sigma\frac{rr'}{\sqrt{r'^2+r^2}}\sin\theta\right\}\pi\delta r+\left\{-\sigma\frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0)+r^2(0)}}+(\sigma_1-\sigma_0)\right\}2\pi r(0)\delta r(0)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left\{\rho g\sin(2\theta)\,r^3+2\lambda r^2\cos\theta+\frac{2\sigma\cos\theta}{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}(2r^4+3r'^2r^2-r''r^3)\right.$$

$$\left.+2\sigma\frac{rr'}{\sqrt{r'^2+r^2}}\sin\theta\right\}\pi\delta r+\left\{-\sigma\frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0)+r^2(0)}}+(\sigma_1-\sigma_0)\right\}2\pi r(0)\delta r(0)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left\{\rho g\sin(2\theta)\,r^2+2\lambda r\cos\theta+\frac{2\sigma\cos\theta}{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}(2r^3+3r'^2r-r''r^2)+2\sigma\frac{r'}{\sqrt{r'^2+r^2}}\sin\theta\right\}\pi r\delta r$$

$$+\left\{-\sigma\frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0)+r^2(0)}}+(\sigma_1-\sigma_0)\right\}2\pi r(0)\delta r(0)$$

得微分方程

$$\left\{\rho g\sin(2\theta)\,r^2+2\lambda r\cos\theta+2\sigma\frac{\cos\theta}{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}(2r^3+3r'^2r-r''r^2)+2\sigma\frac{r'\sin\theta}{\sqrt{r'^2+r^2}}\right\}\pi r=0$$

和自然边界条件

$$\left\{-\sigma\frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0)+r^2(0)}}+(\sigma_1-\sigma_0)\right\}r(0)=0$$

微分方程成立的一个可能是$r(\theta)=0$，但这不是物理解，而是是泛函$V[r]$的极值。所以能量最低状态满足方程

$$\frac{1}{2}\rho g\sin(2\theta)\,r^2+\lambda r\cos\theta+\sigma r\cos\theta\frac{2r^2+3r'^2-r''r}{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}+\sigma\frac{r'\sin\theta}{\sqrt{r'^2+r^2}}=0$$

$r(0)=0$的边界条件不对应能量极小，此时液滴和桌面接触只有一个点，压强无穷大。所以边界条件是

$$-\sigma\frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0)+r^2(0)}}+(\sigma_1-\sigma_0)=0$$

这里

$$\frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0)+r^2(0)}}=\cos(\pi-\varphi)$$

$$\cos\varphi=\frac{\sigma_0-\sigma_1}{\sigma}$$

φ为浸润角。在材料力学中，此边界条件称为 Young 氏方程式，Young 是通过分析三相边界点处，表面张力的平衡条件得到的[1]。

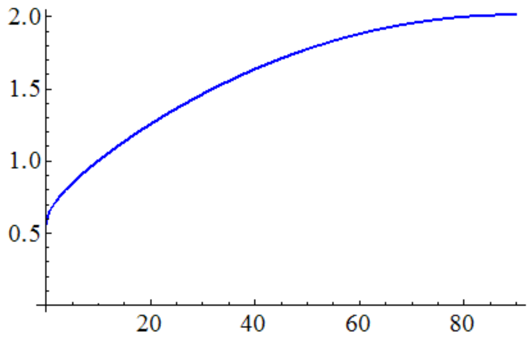
在微分方程中令$\theta=\pi/2$，可得

$$\frac{r'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{r'^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+r^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}}=0\Rightarrow r'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

上表面正中间的点切面和水平面夹角为 0。

求解微分方程后，代入约束条件$V[r]=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^3\cos\theta\,d\theta=V_0$，可确定参数$\lambda$。

[1]T. Young, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1805,95,65. 用表面“张力”解释会导致矛盾；用表面能解释是自洽的。



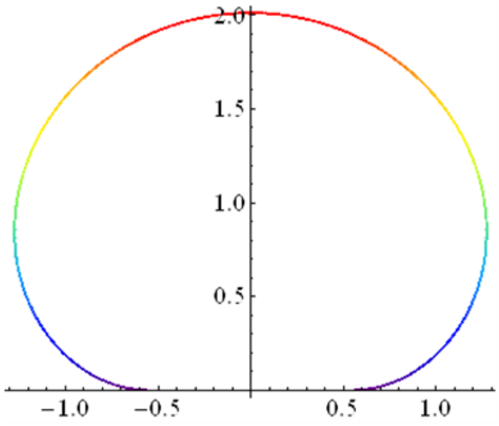


图 1 用 RUNGE-KUTTA 法做数值计算，求出的水银滴在水平玻璃上的形状。计算中取$\boldsymbol{\rho = 13.6\times 10^3, g = 9.8, \sigma = 0.49}$，水银与玻璃的接触角为**180°**，水银的质量为 0.1 克。左图中横轴$\boldsymbol{\theta}$的单位是度，竖轴$\boldsymbol{r(\theta)}$的单位是毫米；右图是水银滴的形状，单位是毫米。

这个微分方程可以用数值解法，结果见上图。

也可以用级数解法：

由于水银与玻璃的接触角为π，即$\frac{r'(0)}{\sqrt{r'^2(0)+r^2(0)}} = 1 \Rightarrow r'(0) = +\infty$，有奇异性，不能简单地展开为 Taylor 级数，

$$r(\theta) \neq r(0) + r'(0)\theta + \cdots$$

为了分析$r(\theta)$在$\theta \approx 0$附近地渐近行为，将微分方程

$$\rho g \sin(2\theta)\, r^2 + 2\lambda \cos\theta\, r + 2\sigma \frac{\cos\theta}{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}[2r^2 + 3r'^2 - r''r]r + 2\sigma \frac{r'\sin\theta}{\sqrt{r'^2+r^2}} = 0$$

的左边只保留到领头项（leading term），

$$\text{左边} = o(1) + 2\lambda r + 2\sigma \frac{1}{r'^3}[3r'^2 - r''r]r + o(1) = 2r\left\{\lambda + \sigma \frac{1}{r'^3}[-r''r]\right\} = \text{右边} = 0$$

设$\theta \approx 0$时，

$$r(\theta) \approx c_0 + c_1\theta^\alpha + o(\theta^\alpha), \qquad \alpha \in [0,1)$$

$$r'(\theta) \approx c_1\alpha\theta^{\alpha-1}, \qquad r''(\theta) \approx c_1\alpha(\alpha-1)\theta^{\alpha-2}$$

代入上式得指标方程（indicial equation）

$$\left\{\lambda - \frac{\sigma c_0 c_1 \alpha(\alpha-1)\theta^{\alpha-2}}{c_1^3\alpha^3\theta^{3\alpha-3}}\right\} = \left\{\lambda - \frac{\sigma c_0(\alpha-1)\theta^{-2\alpha+1}}{c_1^2\alpha^2}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = -\frac{2\sigma c_0}{c_1^2} < 0.$$

考虑到左右镜像对称，令

$$r(\theta) = c_0 + c_1\sqrt{\theta(\pi-\theta)} + \frac{1}{2!}c_2\theta(\pi-\theta) + \frac{1}{3!}c_3[\theta(\pi-\theta)]^{3/2} + \frac{1}{4!}c_4[\theta(\pi-\theta)]^2 + \cdots$$

代入微分方程，并将微分方程左边按$\sqrt{\theta(\pi-\theta)}$的级数展开，得

$$\lambda \to -\frac{2\sigma c_0}{\pi c_1^2}, c_2 \to \frac{4c_1^2}{3c_0}, c_3 \to \frac{g\rho c_1^3}{4\sigma} + \frac{23c_1^3}{12c_0^2} + \frac{3c_1}{\pi^2} - \frac{3c_0^2}{\pi^2 c_1}, c_4 \to \frac{13g\rho c_1^4}{5\sigma c_0} + \frac{103c_1^4}{45c_0^3} + \frac{16c_1^2}{\pi^2 c_0} - \frac{48c_0}{5\pi^2}, \cdots$$

保留到c_9项，再由

$$r''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{g\rho r^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sigma} + \frac{\lambda r^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sigma} + r\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad \frac{2\pi}{3}\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\cos\theta\, d\theta = 0.0001$$

解出c_0，c_1，得

$$r(\theta) = 0.562551 + 0.422487\sqrt{(\pi-\theta)\theta} + 0.211530(\pi-\theta)\theta + 0.0604328\big((\pi-\theta)\theta\big)^{3/2}$$

$$+0.0173699(\pi-\theta)^2\theta^2 - 0.00202953\big((\pi-\theta)\theta\big)^{5/2} - 0.000561428(\pi-\theta)^3\theta^3$$

$$-0.00164894\big((\pi-\theta)\theta\big)^{7/2} + 0.000268766(\pi-\theta)^4\theta^4 - 0.000320324\big((\pi-\theta)\theta\big)^{9/2}(\text{毫米})$$

与精确结果比较，误差<0.06%。将级数保留更多项，可以得到更准确的公式。

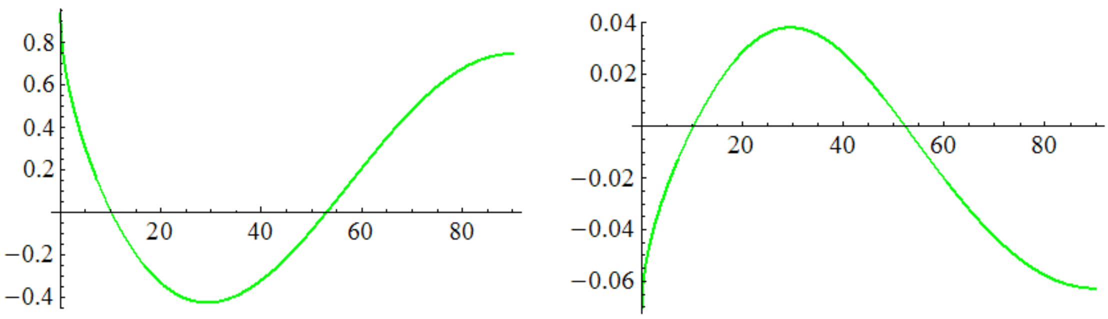


图 2 级数解与精确解的比较。横轴单位是度；竖轴为级数解法$\boldsymbol{r(\theta)}$的相对误差，单位为 1%。左图是保留到$\boldsymbol{c_5}$的相对误差，右图是保留到$\boldsymbol{c_9}$的相对误差。

(3) 等周问题

求泛函极值

$$\Phi[f]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,f,f')dx$$

满足边界条件$f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$，以及约束条件

$$\Psi[f]=\int_{x_1}^{x_2}G(x,f,f')dx=a$$

引进 Lagrange 乘子，化为无条件极值问题，

$$\delta\{\Phi+\lambda(\Psi-a)\}=0$$

记$H=F+\lambda G$，得 Euler 方程

$$\frac{\partial H}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial f'}\right)=0$$

这是一个二阶微分方程，两个积分常数和λ可以由边界条件以及约束条件确定。

注意：（1）这里 Euler 方程不仅给出了$\Phi[f]$的极值点，还给出了$\Psi[f]$的极值点，必须剔除。上面的例子就是这样。（2）固定$\Psi[f]$求$\Phi[f]$极大值，与固定$\Phi[f]$求$\Psi[f]$的极小值，这两个问题对偶。

(4) 不独立宗量的泛函极值

$$\Phi[f,g]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,f,g,f',g')dx$$

而且有约束$G\big(x,f(x),g(x)\big)=0$。

引入 Lagrange 乘子$H=F+\lambda(x)G$成为无条件极值问题，得 Euler 方程

$$\frac{\partial H}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial f'}\right)=0,\qquad \frac{\partial H}{\partial g}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial g'}\right)=0$$

或者

$$\frac{\partial F}{\partial f}+\lambda(x)\frac{\partial G}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial g}+\lambda(x)\frac{\partial G}{\partial g}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial g'}\right)=0$$

再结合约束条件$G\big(x,f(x),g(x)\big)=0$可以求解。

4. 可动边界的泛函极值

(1) 可动边界的变分

考虑积分型泛函

$$
\Phi[f,x_1,x_2] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_1}^{x_2} F(x,f,f')dx
$$

其中的积分边界可变。变分为

$$
\begin{aligned}
&\delta\Phi[f,x_1,x_2] = \Phi[f+\delta f, x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2] - \Phi[f,x_1,x_2] \\
&= \int_{x_1+\Delta x_1}^{x_2+\Delta x_2} F(x,f+\delta f,f'+\delta f')dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x,f,f')dx = (F\Delta x)|_{x_1}^{x_2} + \delta\int_{x_1}^{x_2} F(x,f,f')dx \\
&= \left(F\Delta x + \frac{\partial F}{\partial f'}\delta f\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\delta f(x)\right\}dx
\end{aligned}
$$

极值条件为

$$
\left(F\Delta x + \frac{\partial F}{\partial f'}\delta f\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} = 0, \qquad \int_{x_1}^{x_2}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\delta f(x)\right\}dx = 0
$$

可以把边界条件用全变分的符号写成

$$
\left\{-\left(\frac{\partial F}{\partial f'}f' - F\right)\Delta x + \frac{\partial F}{\partial f'}\Delta f\right\}\Bigg|_{x_1}^{x_2} = 0
$$

如果端点和边界值完全自由，有横截条件

$$
\left(\frac{\partial F}{\partial f'}f' - F\right)\Bigg|_{x_1,x_2} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial f'}\Bigg|_{x_1,x_2} = 0
$$

(2) 有约束的可动边界问题

问题：

两个圆环挂在一个竖直平面内，固定不动。把一根绳子的两端分别拴在两个圆环上，并可以自由滑动。求绳子形状所满足的微分方程和方程的边界条件。（**作业**）

求泛函

$$
\Phi[f] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,f,f')dx
$$

的驻值条件，其中端点满足

$$
f(x_1) = \varphi_1(x_1), \qquad f(x_2) = \varphi_2(x_2)
$$

可以理解为$x_i = x_i[f]$是泛函。

对可动边界的积分型泛函变分，可以用全变分符号写成

$$
\delta\Phi \to \Delta\Phi = \Delta\int_{x_1}^{x_2} F(x,f,f')dx = \left\{\left(F - f'\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\Delta x + \frac{\partial F}{\partial f'}\Delta f\right\}\Bigg|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right\}\delta f(x)dx
$$

当边界点需要满足约束方程时，Δx_i与$\Delta f(x_i)$不独立。

考虑端点x_1，对边界的约束方程

$$f(x_1)=\varphi_1(x_1)$$

作全变分得

$$\Delta f(x_1)=\Delta\varphi_1(x_1)=\varphi_1'(x_1)\Delta x_1$$

同样

$$\Delta f(x_2)=\varphi_2'(x_2)\Delta x_2$$

于是

$$\Delta\Phi=\left\{\left(F-f'\frac{\partial F}{\partial f'}+\frac{\partial F}{\partial f'}\varphi_2'(x)\right)\Delta x\right\}\bigg|_{x=x_2}-\left\{\left(F-f'\frac{\partial F}{\partial f'}+\frac{\partial F}{\partial f'}\varphi_1'(x)\right)\Delta x\right\}\bigg|_{x=x_1}$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right\}\delta f(x)dx$$

泛函取驻值时，有

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)=0(\text{Euler 方程})$$

$$\left\{F+(\varphi_1'-f')\frac{\partial F}{\partial f'}\right\}\bigg|_{x=x_1}=0,\qquad\left\{F+(\varphi_2'-f')\frac{\partial F}{\partial f'}\right\}\bigg|_{x=x_2}=0(\text{横截条件})$$

含有高阶导数（$F=F(x,f,f',f'')$），或者边界条件为隐函数的情形，可作类似推导。

(3) 有角点的致极曲线

对积分型泛函，分区间积分有

$$\delta\int_{x_1}^{x_2}F(x,f,f')dx=\delta\int_{x_1}^{a}Fdx+\delta\int_{a}^{x_2}Fdx$$
$$=-\left\{\left(F-f'\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\Delta x+\frac{\partial F}{\partial f'}\Delta f\right\}\bigg|_{a-}^{a+}+\int_{x_1}^{a}\left\{\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right\}\delta f(x)dx+\int_{a}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right\}\delta f(x)dx$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial f'}\bigg|_{a-}^{a+}=0\\[2ex]\left(F-f'\dfrac{\partial F}{\partial f'}\right)\bigg|_{a-}^{a+}=0\end{cases}$$

无论$f(x)$在$x=a$是否连续，Weierstrass-Erdmann 角点条件角点条件都成立。

5. 微分方程与泛函极值

前面我们求解问题的方法，都是把泛函极值问题转化为微分方程。其实求泛函极值，在很多情况下要比求解微分方程方便。

下面的定理把微分方程转化为泛函极值问题：

设$\hat{A}$是正定的对称线性算符（或正定的厄米算符，对于复函数空间），即

$$\left(\hat{A}f, g\right) = \left(\hat{A}g, f\right), \qquad \left(\hat{A}f, f\right) = \begin{cases} > 0, & f(x) \not\equiv 0; \\ = 0, & f(x) \equiv 0, \end{cases}$$

则①方程$\hat{A}f = \varphi$如果有解$f(x)$，则此解唯一；②$\hat{A}f = \varphi \Leftrightarrow f$使得泛函 $\Phi[f] \stackrel{\text{def}}{=} \left(\hat{A}f, f\right) - 2(f, \varphi)$取极小值。

例 泛函

$$\Phi[y] = \int_a^b \{p(x)y' - q(x)y^2\} dx$$

满足归一化条件

$$\int_a^b w(x)y^2 dx = 1$$

的极值满足 Sturm-Liouville 方程

$$\frac{d}{dx}(py') + qy + \lambda wy = 0$$

不是所有微分方程都有对应的拉氏量（Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz）。

6. 泛函驻值的数值解法

(1) RITZ 法

仍以水银滴为例，设

$$r(\theta) = c_0 + c_1\sqrt{(\pi - \theta)\theta} + \frac{c_2}{2!}(\pi - \theta)\theta + \cdots + \frac{1}{9!}c_9[(\pi - \theta)\theta]^{9/2}$$

于是势能$E=E(c_0,c_1,\cdots,c_9)$，体积$V=V(c_0,c_1,\cdots,c_9)$，成为普通函数的极值问题，可求得（1 克水银的形状）

$$r(\theta)=2.2002+0.56660\sqrt{(\pi-\theta)\theta}+2.9444(\pi-\theta)\theta-6.2809\big((\pi-\theta)\theta\big)^{3/2}$$
$$+6.8421(\pi-\theta)^2\theta^2-3.6038\big((\pi-\theta)\theta\big)^{5/2}+0.59563(\pi-\theta)^3\theta^3$$
$$+0.064256\big((\pi-\theta)\theta\big)^{7/2}-0.0081378(\pi-\theta)^4\theta^4-0.0015615\big((\pi-\theta)\theta\big)^{9/2}$$

这种解法称为 Ritz 法：选取一组合适的坐标函数$l_i(x)$，将泛函的宗量展开为

$$f(x)\approx c_1l_1(x)+c_2l_2(x)+\cdots+c_nl_n(x)$$

把泛函极值问题，转化为普通函数的极值问题。

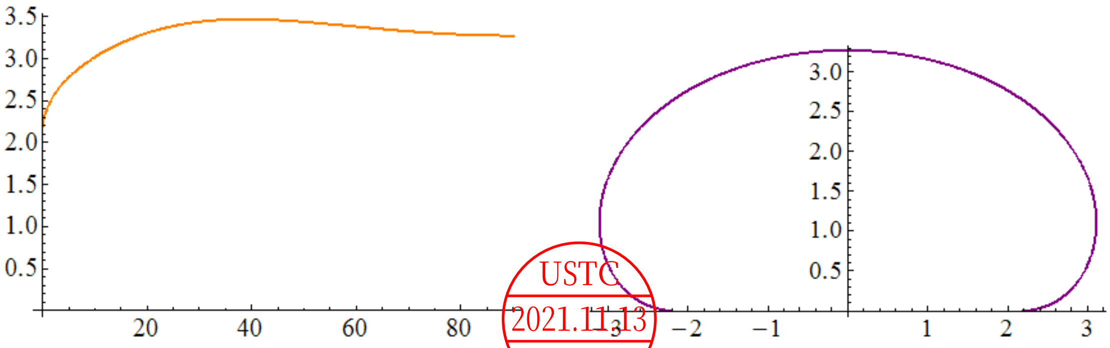


图 3 1 克水银在水平玻璃面上的形状

(2) Euler 有限差分法、有限元法

对固定边界问题

$$\Phi[f]=\int_a^b F(x,f(x),f'(x))dx$$

$$f(a)=y_a,f(b)=y_b$$

可以用 Euler 有限差分法，把区间$[a,b]$分成$n+1$等份，端点函数值固定不变，其余等分点上的值设为$y_1,y_2,\cdots,y_n$，而导数则表示为

$$f'(x_i)=\frac{(y_{i+1}-y_i)}{(b-a)/(n+1)}$$

把泛函表示成差分形式，

$$\Phi[f]=\frac{b-a}{n+1}\sum_{i=0}^{n}F(x_i,y_i,f'(x_i))$$

成为普通函数的极值问题，取极值的条件是$\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}=0$。

如果利用多项式插值得到$f(x)$在非节点上的值，会比 Euler 法收敛快，此为**有限元法**。对平面，通常划分为三角形的网格；对更高维的空间，剖分为单纯形（simplex）。

三、 HAMILTON 原理

1. 保守系统的 HAMILTON 原理

由前面的讨论，可见保守力场时的 Lagrange 方程和 Euler 方程的形式完全相同，所以拉氏方程也可以用泛函的固定边界极值得到，定义 Hamilton 作用量为

$$\mathrm{S}[q]=\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,\dot{q})dt$$

其中边界条件为$q_\alpha(t_1)=q_{\alpha1},q_\alpha(t_2)=q_{\alpha2}$。Hamilton 变分即固定边界的简单变分：$t_1,t_2$固定，$\delta q_\alpha(t_1)=\delta q_\alpha(t_2)=0$。则真实的物理路径使得作用量满足

$$\delta\mathrm{S}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right\}dt+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\bigg|_{t=t_1}^{t=t_2}=0$$

2. 拉氏函数的不确定性

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(L(t,q,\dot{q})+\frac{df(t,q)}{dt}\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,\dot{q})dt+f\big(t_2,q(t_2)\big)-f\big(t_1,q(t_1)\big)$$

多出的边界项，按哈密顿原理的约定取固定边界变分，变分为零。

3. 同时有保守力和非保守力系统的 HAMILTON 原理

将拉氏方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha$$

两边乘上δq_α，并对t积分，

$$\delta S=-\int_{t_1}^{t_2}Q_\alpha\delta q_\alpha dt$$

4. 坐标满足完整约束时的 Hamilton 原理

广义坐标不独立，$f_\sigma(t,q)=0$，拉氏方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\lambda_\sigma\frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha}$$

它可由

$$S[q]=\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,\dot{q})dt$$

在约束条件下的驻值条件得到，

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\{L+\lambda_\sigma f_\sigma\}dt=0$$

5. 非完整约束时的 Hamilton 原理

$$c_{\sigma\alpha}\delta q_\alpha=0$$

$$\delta S+\int_{t_1}^{t_2}\lambda_\sigma c_{\sigma\alpha}\delta q_\alpha dt=0$$

注：Goldstein 3ed p46（J. Ray, Amer. J. Phys. 34(406-8), 1966.）直接将完整系统的 Hamilton 原理用在非完整系统上，

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\{L+\lambda_\sigma f_\sigma\}dt=0$$

$$\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)+\lambda_\sigma\left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\right)-\dot{\lambda}_\sigma\frac{\partial f_\sigma}{\partial\dot{q}_\alpha}\right]\delta q_\alpha+f_\sigma\delta\lambda_\sigma\right\}dt=0$$

$$\Rightarrow f_\sigma=0,\qquad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\lambda_\sigma\left[\frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\right]-\dot{\lambda}_\sigma\frac{\partial f_\sigma}{\partial\dot{q}_\alpha}$$

即使对线性非完整约束，这方程也不一定正确。

考虑力学中的线性非完整约束，按 Hölder 规则，

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha=0$$

因此仅当前述方程中的项

$$\lambda_\sigma\left[\frac{\partial f_\sigma}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\right]=0$$

才能得到正确的运动方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=-\dot{\lambda}_\sigma\frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

而

$$\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\equiv 0 \Leftrightarrow f(t,q,\dot{q})=\frac{d\varphi(t,q)}{dt}$$

即这个约束可积，

$$\varphi(t,q)=c$$

是完整约束；也就是说 Goldstein 用在非完整系统上的变分原理，只对完整约束系统才是无条件正确的。

例 可以利用斜坡冰橇的例子加以验证，两种方法给出的运动方程矛盾。

$$L=\frac{1}{2}M\vec{v}^2+\frac{1}{2}I\vec{\omega}^2-V=\frac{1}{2}M(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-Mgy\sin\alpha$$

$$\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta=0,\qquad \sin\theta\,\delta x-\cos\theta\,\delta y=0$$

物理运动满足（$\mu(t)$是拉氏乘子）拉格朗日方程

$$\begin{cases} m\ddot{x}=\mu\sin\theta \\ m\ddot{y}+Mg\sin\alpha=-\mu\cos\theta \\ I\ddot{\theta}=0 \end{cases}$$

如果按照 Goldstein 等或者数学教材（例如柯朗、希尔伯特）中的方法，取扩展拉氏函数

$$L=\frac{1}{2}M(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-Mgy\sin\alpha+\lambda(\dot{x}\sin\theta-\dot{y}\cos\theta)$$

得到的欧拉方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-\dot{\lambda}\sin\theta-\lambda\dot{\theta}\cos\theta \\ m\ddot{y}+Mg\sin\alpha=\dot{\lambda}\cos\theta-\lambda\dot{\theta}\sin\theta \\ I\ddot{\theta}=\lambda(\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta) \end{cases}$$

前两个方程的右边第二项

$$\left(-\lambda\dot{\theta}\cos\theta,-\lambda\dot{\theta}\sin\theta\right)$$

是平行于冰刀方向的约束力；最后一个方程的右边

$$\lambda(t)(\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta)$$

是约束力的力矩，这都应该为零。可见扩展拉氏函数得出的解是非物理的。

6. HAMILTON 原理作为力学第一原理

优点：

（1）简洁，包含了全部动力学

（2）参数不变性 homegeneity：作用量

$$\mathrm{S}[q]=\int_{t_1}^{t_2} L(t,q,\dot{q})dt$$

不依赖于广义坐标的选取。方便加入协变性要求。

（3）方便推广到其它非力学物理系统，如电动力学，弹性力学，场论等

（4）局部与整体 Euler, Maupertuis 神创论

Landau 和 Arnold 的教材的处理方式。

例 参数不变性

我们一直以时间为参数，建立理论模型和运动方程。但实际上完全可以把时间看作广义坐标，

$$q_0 \overset{\text{def}}{=} t$$

引进形式参数λ以描述系统在广义坐标空间的轨迹，

$$q_a=q_a(\lambda),\qquad a=0,1,\cdots,n.$$

作用量无需变更，

$$S=\int_{t=t_1}^{t=t_2} L\left(t,q,\frac{dq}{dt}\right)dt=\int_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=\lambda_2} L\left(q_0,q,\frac{dq/d\lambda}{dq_0/d\lambda}\right)\frac{dq_0}{d\lambda}d\lambda$$

即在新变量下，

$$S[q(\lambda)]=\int_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda=\lambda_2}\tilde{L}(q,\dot{q})d\lambda$$

$$\tilde{L}\overset{\text{def}}{=} L\left(q_0,q,\frac{dq/d\lambda}{dq_0/d\lambda}\right)\frac{dq_0}{d\lambda}$$

读者可自行写出拉格朗日方程，以验证与原描述$q_\alpha=q_\alpha(t)$完全等价。

7. HAMILTON 原理的极值性

在始末位置足够接近时，真实的物理路径使得 Hamilton 作用量取极小（所以称最小作用量原理）。证明可参考 A. Л. 马尔契夫《理论力学》p337。严格的证明需计算$\delta^2 S$。

一般来说，真实的物理路径使得作用量取极小或驻值，但不可能是极大。

例 质点在引力场中自由下落

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

$$S[x] = \int_0^T L dt = \int_0^T \left\{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx\right\} dt$$

真实运动

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2, \dot{x}(t) = gt$$

$$S_1 = \int_0^T \left\{\frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mg^2t^2\right\} dt = \frac{1}{3}mg^2T^3$$

匀速运动

$$x(t) = \frac{1}{2}gTt, \dot{x}(t) = \frac{1}{2}gT$$

$$S_2 = \int_0^T \left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}gT\right)^2 + mg\left(\frac{1}{2}gTt\right)\right\} dt = \frac{3}{8}mg^2T^3$$

$$S_2 > S_1$$

四、 广义经典力学

1. 运动方程

以 Hamilton 原理为第一原理。

设$L = L(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$，且固定$t_1, t_2$时刻的坐标和速度，可得 Euler-Lagrange 方程，

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

（连续体系的广义经典力学，在弹性力学和某些非线性波动问题中有用。）

2. 广义能量积分

设$L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$，计算$\frac{dL}{dt}$，并利用 Euler-Lagrange 方程，可得

$$H = \ddot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha} - \dot{q}_\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L = \text{constant}$$

3. 更高阶的 EULER-LAGRANGE 方程

$$L = L\left(t, q, \dot{q}, \cdots, q^{(n)}\right)$$

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{(n)}} + \cdots - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

广义能量和广义动量为[2]

$$H = \left\{q_\alpha^{(n)} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{(n)}} - q_\alpha^{(n-1)} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{(n-1)}} + \cdots + (-1)^{n-1}\dot{q}_\alpha \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right\} - L,$$

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{(n)}}$$

五、 FERMAT 原理和 LAGRANGE 光学

1. 几何光学的 FERMAT 原理（变分法的先驱）

(1) Fermat 原理

费马提出几何光学三定律等价于：光线的真实路径是时间取极值的路径。

用变分法的语言来说，即光线的真实路径满足

$$t_{AB}[x, y, z] \stackrel{\text{def}}{=} \int_A^B \frac{ds}{v(x, y, z)}, \qquad \delta t_{AB} = 0\left(\text{其中} v = \frac{c}{n}, \text{边界固定}\right)$$

或者等价地

$$l_{AB}[x, y, z] \stackrel{\text{def}}{=} \int_A^B n(x, y, z) ds, \qquad \delta l_{AB} = 0.$$

例 用费马原理推导反射定律。

设光线为$y = f(x)$是连续函数。由于在界面上有角点 C，光程写成

---

2 Manuel DE Leon and Paulo R. Rodrigues, Generalized Classical Mechanics and Field Theory 1985.

$$l_{\mathrm{AB}}[f,x_C]=\int_{x_A}^{x_C}n_1\sqrt{1+f'^2}dx+\int_{x_C}^{x_B}n_1\sqrt{1+f'^2}dx$$

$$\delta f(x_A)=\delta f(x_B)=0$$

$$F\overset{\text{def}}{=}n_1\sqrt{1+f'^2}$$

$$\begin{aligned}
\delta l_{AB}&=-\left\{\frac{\partial F}{\partial f'}f'-F\right\}\Bigg|_{x_C-}^{x_C+}\Delta x_C+\left\{\frac{\partial F}{\partial f'}\Delta f\right\}\Bigg|_{x_C-}^{x_C+}+\int_{x_A}^{x_C}\left(-\frac{d}{dx}\frac{n_1f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)\delta f(x)dx\\
&\quad+\int_{x_C}^{x_B}\left(-\frac{d}{dx}\frac{n_1f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)\delta f(x)dx\\
&=\frac{n_1}{\sqrt{1+f'^2}}\Bigg|_{x=x_C-}^{x=x_C+}\Delta x_C-\left\{\frac{n_1f'}{\sqrt{1+f'^2}}\Delta f(x)\right\}\Bigg|_{x=x_C-}^{x=x_C+}+\int_{x_A}^{x_C}\left(-\frac{d}{dx}\frac{n_1f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)\delta f(x)dx\\
&\quad+\int_{x_C}^{x_B}\left(-\frac{d}{dx}\frac{n_1f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)\delta f(x)dx\\
&\xrightarrow{f(x_C)=0}=\frac{n_1}{\sqrt{1+f'^2}}\Bigg|_{x=x_C-}^{x=x_C+}\Delta x_C+\int_{x_A}^{x_C}\left(-\frac{d}{dx}\frac{n_1f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)\delta f(x)dx+\int_{x_C}^{x_B}\left(-\frac{d}{dx}\frac{n_1f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right)\delta f(x)dx\\
&\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}=0,x\in(x_A,x_C)\cup(x_C,x_B)\Rightarrow\begin{cases}y=k_1(x-x_C)+b, & x\in(x_A,x_C);\\ y=k_2(x-x_C)+b, & x\in(x_C,x_B).\end{cases}\\ &\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\Bigg|_{x=x_C-}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\Bigg|_{x=x_C+}\Rightarrow f'^2|_{x=x_C-}=f'^2|_{x=x_C+}\end{aligned}\right\}\\
&\Rightarrow k_1=-k_2
\end{aligned}$$

直线传播定律和（曲面）界面上的折射定律证明留作练习。

2. LAGRANGE 光学

设光线的路径为

$$\vec{r}=\vec{r}(\lambda),\qquad\lambda\in[\lambda_A,\lambda_B]$$

光程

$$l_{AB}[\vec{r}]\overset{\text{def}}{=}\int_{s=s_A}^{s=s_B}n(\vec{r})ds=\int_{\lambda=\lambda_A}^{\lambda=\lambda_B}n(\vec{r})\sqrt{\dot{\vec{r}}^2}d\lambda$$

真实路径是光程在可动边界条件

$$\vec{r}(\lambda=\lambda_A)=\vec{r}_A,\qquad\vec{r}(\lambda=\lambda_B)=\vec{r}_B$$

下的极值，

$$\Delta\lambda_A, \Delta\lambda_B \neq 0, \Delta\vec{r}(\lambda_A) = \Delta\vec{r}(\lambda_B) = \vec{0}$$

拉氏函数为

$$L(\lambda, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = n(\vec{r})|\dot{\vec{r}}|$$

横截条件

$$\left(L - \dot{r}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}\right)\bigg|_{\lambda=\lambda_A,\lambda_B} = 0$$

是恒等式。

欧拉方程为

$$\frac{d}{d\lambda}\left(n\frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}\right) - |\dot{\vec{r}}|\nabla n = \vec{0}$$

泛函和拉氏方程具有参数不变性，拉氏方程不能定解。需补充参数λ的定义，表达式$\vec{r}(\lambda)$才有确定的形式。可以令λ为弧长参数，

$$\lambda = s, \qquad (ds)^2 = (d\vec{r})^2$$

有约束方程

$$\dot{\vec{r}}^2 = 1$$

把约束方程代入欧拉方程，得程函方程

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n$$

由于

$$\dot{\vec{r}} \cdot \left\{\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) - \nabla n\right\} \equiv 0$$

3 个程函方程在任意s处线性相关；可以取其中 2 个方程，与约束方程联立求解$\vec{r}(s)$。

3. 等效拉氏量

几何光学的拉氏函数

$$L(\lambda, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = n(\vec{r})|\dot{\vec{r}}|$$

广义动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{n}{|\dot{\vec{r}}|}\dot{r}_i$$

拉氏函数对广义速度的海斯矩阵为

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r}_i \partial \dot{r}_j} = \frac{n}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3} \left\{ \dot{\vec{r}}^2 \delta_{ij} - \dot{r}_i \dot{r}_j \right\}$$

由于

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r}_i \partial \dot{r}_j} \dot{r}_i = 0$$

矩阵的各行线性相关，

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{r}_i \partial \dot{r}_j}\right) = 0$$

是奇异朗格朗日系统，具有拉格朗日意义上的约束。事实上，这一约束源于系统具有内部对称性——参数不变性。这使我们得到的拉格朗日方程组不独立；另一影响是在我们试图从拉格朗日力学过渡到哈密顿力学框架时，勒让德变换的条件不成立。

在 Yang-Mills 规范场中我们会遇到同类的问题，连续的内部对称，即规范不变性，使之成为奇异拉格朗日系统。需要作规范固定才能成功地进行正则量子化。

对光程变分

$$\delta l_{AB} = \delta \int_A^B \sqrt{n^2 \dot{\vec{r}}^2} d\lambda = \int_A^B \frac{1}{2\sqrt{n^2 \dot{\vec{r}}^2}} \delta\left\{n^2 \dot{\vec{r}}^2\right\} d\lambda$$

定义参数，令

$$d\lambda = nds$$

为光程，则

$$\sqrt{n^2 \dot{\vec{r}}^2} = \frac{nds}{d\lambda} = 1$$

$$\delta l_{AB} = \int_A^B \delta\left\{\frac{1}{2} n^2 \dot{\vec{r}}^2\right\} d\lambda$$

注意：不能在求变分前利用参数λ的定义化简，否则需要引进拉氏乘子。

现在等效拉氏量

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} n^2 \dot{\vec{r}}^2$$

此时有广义能量积分

$$\frac{1}{2}n^2\dot{\vec{r}}^2 = E = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n\left|\dot{\vec{r}}\right| = 1$$

六、 Voss 原理*

注意到作用量其实依赖于积分限，

$$S = S[q, t_1, t_2]$$

我们来考虑积分限变化时的情形，即计算作用量的全变分，

$$\begin{aligned}\Delta S &= \Delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = (L\Delta t + p_\alpha \delta q_\alpha)\big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\right\}\delta q_\alpha dt \\ &= (-H\Delta t + p_\alpha \Delta q_\alpha)\big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\right\}\delta q_\alpha dt\end{aligned}$$

哈密顿原理可以用全变分表述为：取 Voss 变分（边界条件），

$$\Delta t\big|_{t=t_1,t_2} = 0, \qquad \Delta q_\alpha\big|_{t=t_1,t_2} = 0$$

真实运动满足

$$\Delta S = 0$$

从哈密顿原理来看，这个结论其实是很明显的：

哈密顿作用量泛函具有参数不变性，包括$t \to t'(t)$变换，只要保持端点值不变，哈密顿原理中的简单变分δ可以改成全变分Δ。

七、 MAUPERTUIS 原理

1. HAMILTON 形式的 MAUPERTUIS 原理

我们限制到只考虑不含时的系统（自治系统 autonomous system），

$$L = L(q, \dot{q})$$

这时广义能量为常数，

$$H(q, \dot{q}) = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L(q, \dot{q}) = E$$

计算广义能量全变分的积分，

$$\left.\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\Delta H dt = \int_{t_1}^{t_2}\Delta(p_\alpha\dot{q}_\alpha)dt - \int_{t_1}^{t_2}\Delta L dt\\ \left[\int_{t_1}^{t_2}dt\,,\Delta\right] = -\int_{t_1}^{t_2}d(\Delta t)\\ \frac{\partial L}{\partial t} = 0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2}\Delta H dt = \Delta\int_{t_1}^{t_2}p_\alpha\dot{q}_\alpha dt - \int_{t_1}^{t_2}p_\alpha\dot{q}_\alpha d(\Delta t) - \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\Delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\Delta\dot{q}_\alpha\right\}dt\\ \left[\frac{d}{dt},\Delta\right]q_\alpha = \frac{d(\Delta t)}{dt}\frac{d}{dt}q_\alpha\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2}\Delta H dt = \Delta\int_{t_1}^{t_2}p_\alpha\dot{q}_\alpha dt - \int_{t_1}^{t_2}p_\alpha\dot{q}_\alpha d(\Delta t) - \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\Delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\frac{d\Delta q_\alpha}{dt} - \dot{q}_\alpha\frac{d(\Delta t)}{dt}\right)\right\}dt$$

$$= \Delta\int_{t_1}^{t_2}p_\alpha\dot{q}_\alpha dt - \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\Delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{d(\Delta q_\alpha)}{dt}\right\}dt$$

$$= \Delta\int_{t_1}^{t_2}p_\alpha\dot{q}_\alpha dt - \int_{t_1}^{t_2}d(p_\alpha\Delta q_\alpha) - \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right\}\Delta q_\alpha dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\Delta H dt = \Delta\int_{t_1}^{t_2}p_\alpha\dot{q}_\alpha dt - (p_\alpha\Delta q_\alpha)|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right\}\Delta q_\alpha dt$$

上式对任意变分成立，当然对子集成立。令变分满足

$$\Delta H = 0, \qquad \Delta q_\alpha|_{t=t_1,t_2} = 0$$

于是在此**等能变分**下有

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}p_\alpha\dot{q}_\alpha dt \equiv \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\Delta q_\alpha dt$$

上式是数学恒等式；而真实运动需满足拉氏方程，于是得哈密顿形式的 Maupertuis 原理

$$\boxed{\Delta W[q] = \Delta\int_{t_1}^{t_2}p_\alpha dq_\alpha = 0}$$

式中的泛函称为**约化作用量**（abbreviated action, reduced action）；Δ是等能变分。

2. MAUPERTUIS 原理的原形式

考虑稳定约束的力学系统

$$\frac{\partial\vec{r}_i(t,q)}{\partial t} = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,N$$

这时动能只含有广义速度的二次项（不适用于相对论），

$$T(q,\dot{q})=\frac{1}{2}M_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$$

$$L=T(q,\dot{q})-V(q)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}p_\alpha dq_\alpha=\int_{t_1}^{t_2}p_\alpha\dot{q}_\alpha dt=\int_{t_1}^{t_2}M_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta\dot{q}_\alpha dt=\int_{t_1}^{t_2}2Tdt$$

莫培督原理可以写成

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2}2Tdt=0,\qquad \Delta H=0,\qquad \Delta q_\alpha\big|_{t=t_1,t_2}=0$$

这是莫培督原理发表于 1744 年的最小作用量原理，早于 1834 年的哈密顿原理。

莫培督原理有多种形式。现在文献中所说的最小作用量原理，一般是指哈密顿原理。

3. JACOBI 形式的 MAUPERTUIS 原理

对机械能守恒

$$H(q,\dot{q})=T+V=E$$

的系统，可定义黎曼空间的弧长

$$2Tdt=ds$$

$$\begin{aligned}(ds)^2&=(2Tdt)^2=2T\cdot 2T(dt)^2\\&=2\big(E-V(q)\big)\frac{1}{2}M_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta(dt)^2\\&=2\big(E-V(q)\big)M_{\alpha\beta}(q)dq^\alpha dq^\beta\end{aligned}$$

只要取黎曼度规张量为

$$g_{\alpha\beta}(q)=2\big(E-V(q)\big)M_{\alpha\beta}(q)$$

莫培督原理成为

$$\Delta\int_{s_1}^{s_2}ds=\Delta(s_2-s_1)=0$$

即拉格朗日系统的真实轨迹，是黎曼空间的测地线。

4. 等效拉氏量

记自洽系统在黎曼空间的轨迹为

$$q=q(\lambda)$$

其中λ是形式参数。约化作用量可以写成

$$W[q]=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\sqrt{g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}}d\lambda$$

对应拉氏函数

$$L(q,\dot{q})=\sqrt{g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}}$$

这是一个奇异拉格朗日系统。

思考：此拉氏函数相应的广义能量是什么？

由于边界处的坐标q_{α}值不变，若约定边界处的形式参数为定值λ_A,λ_B，则约化作用量的等能全变分成为简单变分，

$$\begin{aligned}\Delta W&\equiv\delta\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\sqrt{g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}}d\lambda\\&=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\frac{1}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}}}\delta\left\{g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}\right\}d\lambda\end{aligned}$$

变分符号前的因子是个标量表达式，可以利用参数的定义来简化。取弧长参数

$$\sqrt{g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_{\alpha}\dot{q}_{\beta}}=1,\qquad d\lambda\stackrel{\text{def}}{=}ds$$

则

$$\Delta W=\delta\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}ds$$

因此有等价的拉氏量

$$L_{\text{eff}}\left(q,\frac{dq}{ds}\right)=\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(q)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$$

在光学、力学和广义相对论有应用。

思考：这个等效拉氏量对应的广义能量是什么？我们赋予形式参数什么几何意义来作“规范固定”？

5. 测地线方程

运动方程

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\nu}\frac{dq^\nu}{ds}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha}\frac{dq^\mu}{ds}\frac{dq^\nu}{ds}$$

$$g_{\alpha\nu}\frac{d^2q^\nu}{ds^2}+\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\gamma}\frac{dq^\nu}{ds}\frac{dq^\gamma}{ds}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha}\frac{dq^\mu}{ds}\frac{dq^\nu}{ds}=0$$

整理指标，

$$\frac{d^2q^\sigma}{ds^2}+g^{\sigma\alpha}\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\gamma}\frac{dq^\gamma}{ds}\frac{dq^\nu}{ds}-\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha}\frac{dq^\mu}{ds}\frac{dq^\nu}{ds}=0$$

$$\frac{d^2q^\sigma}{ds^2}+\left(g^{\sigma\alpha}\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\mu}-\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha}\right)\frac{dq^\mu}{ds}\frac{dq^\nu}{ds}=0$$

第二项是切矢量的二次型，其系数应该$\mu\leftrightarrow\nu$交换对称，系数的反对称部分没有贡献。利用 Christoffel 联络的定义

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\mu}+\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial q^\nu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha}\right)$$

可以把测地线方程（geodesic equation）写成

$$\frac{d^2q^\sigma}{ds^2}+\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\frac{dq^\mu}{ds}\frac{dq^\nu}{ds}=0$$

Hamilton 和 Jacobi 形式的莫培督原理不显含时间，都适合用来求轨道公式，但适用范围不同：前者仅要求拉氏函数不含时；后者仅适用拉氏函数为广义速度齐次二次函数的情形。

6. 例：推导粒子在有心力场中的轨道方程

取平面极坐标，得动能表达式

$$\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r+r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$T=\frac{1}{2}m\vec{v}^2=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

设广义能量为$H=T+V(r)=E$，有黎曼度规

$$(ds)^2=4T^2(dt)^2=4\big(E-V(r)\big)^2(dt)^2=2m\{E-V(r)\}\{(dr)^2+r^2(d\theta)^2\}$$

和等价拉氏量

$$L_{\mathrm{eff}}=\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(q)\frac{dq^\alpha}{ds}\frac{dq^\beta}{ds}=m\{E-V(r)\}\left\{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\right\}$$

θ是循环坐标，相应的广义动量守恒

$$\begin{aligned}J&=2mr^2\{E-V(r)\}\frac{d\theta}{ds}\\&=2mr^2\{E-V(r)\}\frac{d\theta}{\sqrt{2m\{E-V(r)\}\{(dr)^2+r^2(d\theta)^2\}}}\\&=\sqrt{2m\{E-V(r)\}}\frac{r^2}{\sqrt{r'^2+r^2}}\end{aligned}$$

其中$r'\stackrel{\text{def}}{=}dr/d\theta$。考虑在近心点处

$$r'=0,\qquad J=\sqrt{2m\{E-V(r)\}}r=mvr$$

这个守恒量的物理意义是角动量。

由守恒量解出

$$r'=\pm\sqrt{\frac{2m}{J^2}(E-V)r^2}$$

$$d\theta=\pm\frac{dr}{\sqrt{\frac{2m}{J^2}(E-V)r^4-r^2}}$$

积分可得轨道公式。

八、 连续介质力学

1. 一维连续体系

例 1 一维弹性棒的纵向振动

①运动学分析，建立坐标

$\psi=\psi(x,t)$表示自然状态下的x点目前的偏移，位置为$\psi(x,t)+x$（这是连续体的 Lagrange 描述）。

②微元分析，写出拉氏量。

设未变形时的线密度ρA，单位长度的弹性系数EA，其中E是杨氏模量，A是棒的截面积。

长度为Δx的微元，质量为$\rho A\Delta x$，弹性系数为$EA/\Delta x$，动能和势能分别为

$$\Delta T=\frac{1}{2}\rho A\Delta x\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2,\qquad \Delta V=\frac{1}{2}\frac{EA}{\Delta x}(\psi(x+\Delta x,t)-\psi(x,t))^2=\frac{1}{2}EA\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\Delta x$$

记动能密度、势能密度和拉格朗日密度分别为

$$\mathcal{T} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2, \qquad \mathcal{V} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}EA\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2$$

$$\mathcal{L}\left(\psi,\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{T}-\mathcal{V} = \frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}EA\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2$$

那么拉氏量为

$$L = \int_0^l \mathcal{L}dx$$

③用哈密顿原理求运动方程

$$S = \int_{t_0}^{t_1} Ldx = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mathcal{L}dtdx$$

$$0 = \iint dtdx\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\delta(\partial_t\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi)}\delta(\partial_x\psi)\right\}$$

$$= \left(\int_0^l \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\delta\psi\, dx\right)\Bigg|_{t=t_0}^{t=t_1} + \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi)}\delta\psi dt\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}$$

$$+ \iint dtdx\delta\psi\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{\bar\partial}{\bar\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)} - \frac{\bar\partial}{\bar\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi)}\right\}$$

$$= \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi)}\delta\psi dt\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} + \iint dtdx\delta\psi\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{\bar\partial}{\bar\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)} - \frac{\bar\partial}{\bar\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi)}\right\}$$

得 Lagrange 方程,

$$\frac{\bar\partial}{\bar\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} + \frac{\bar\partial}{\bar\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi'} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0,$$

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - E\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$$

以及自然边界条件

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi)}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} = 0$$

$$\left(EA\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0} = 0, \qquad \left(EA\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0} = 0$$

④色散关系

这是一个波动方程，以特解平面波

$$\psi(x,t)=\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

代入方程得（色散关系）

$$-\rho\omega^2+Ek^2=0,$$

$$\omega(k)=\sqrt{E/\rho}\,|k|$$

波的群速度和相速度分别为

$$v_p=\left|\frac{\omega}{k}\right|=\sqrt{E/\rho},\qquad v_g=|\frac{d\omega}{dk}|=\sqrt{E/\rho}$$

$$v_p=v_g$$

是常数，无色散。

通过变量代换也可求得波速。令

$$v_0\overset{\text{def}}{=}\sqrt{E/\rho},\qquad a(t,x)\overset{\text{def}}{=}x+v_0t,\qquad b(t,x)\overset{\text{def}}{=}x-v_0t$$

$$\psi=\psi(a,b),\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}=v_0\frac{\partial\psi}{\partial a}-v_0\frac{\partial\psi}{\partial b},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial a}+\frac{\partial\psi}{\partial b}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}EA\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right\}dtdx=\left\{\frac{1}{2}\rho A\left(v_0\frac{\partial\psi}{\partial a}-v_0\frac{\partial\psi}{\partial b}\right)^2-\frac{1}{2}EA\left(\frac{\partial\psi}{\partial a}+\frac{\partial\psi}{\partial b}\right)^2\right\}\frac{1}{2v_0}dadb$$
$$=-\frac{EA}{v_0}\frac{\partial\psi}{\partial a}\frac{\partial\psi}{\partial b}dadb$$

运动方程成为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial a\partial b}=0$$

积分两次，得解为

$$\psi=\xi(a)+\eta(b)=\xi(x+v_0t)+\eta(x-v_0t)$$

ξ,η是任意单变量可导函数。上式亮相分别是速度为$\pm v_0$的机械波。

⑤固定边界和自由边界

如果棒端固定，方程的边界条件为

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0.$$

如果棒端不固定，变分后给出自然边界条件即端点不受力，

$$F=EA\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\qquad x=0,l$$

⑥傅里叶展开

满足固定边界条件

$$f(0)=f(l)=0$$

的平方可积函数$f(x)$，有完备基

$$\left\{\sin\left(n\frac{\pi x}{l}\right)\middle|n\in 1,2,3,\cdots\right\}$$

弹性棒在任意时刻的形状可以展开为

$$\psi(t,x)\equiv q_1(t)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)+q_2(t)\sin\left(2\cdot\frac{\pi x}{l}\right)+\cdots$$

于是

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\dot{q}_1\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)+\dot{q}_2\sin\left(2\cdot\frac{\pi x}{l}\right)+\cdots$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\pi}{l}q_1\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)+\frac{2\pi}{l}q_2\cos\left(2\cdot\frac{\pi x}{l}\right)+\cdots$$

代回作用量，对x积分得

$$S[q]=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{l\rho A}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\dot{q}_n^2-\frac{n^2\pi^2EA}{4l}\sum_{n=1}^{+\infty}q_n^2\right\}dt=\int_{t_0}^{t_1}\frac{l\rho A}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dot{q}_n^2-\frac{n^2\pi^2E}{l^2\rho}q_n^2\right)dt$$

$q_n(t)$是广义坐标，它的运动方程为

$$\ddot{q}_n+\frac{n^2\pi^2E}{l^2\rho}q_n=0,\qquad n=1,2,3,\cdots$$

解得

$$q_n(t)=A_n\cos(\omega_n t+\varphi_n),\qquad \omega_n=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}=n\pi\frac{v_0}{l}$$

有无穷多种振动模式：$n=1$的模式q_n是基频，其它为倍频。各模式的振幅和相位由初始条件确定。

自由边界的振动作为练习，请自行分析。

例 2 空气中的声波

一根截面积为S的玻璃管，内有空气，静态时空气密度为ρ，压强为p_0。不考虑输运。设原来在x处的气体分子，偏移$\psi(t,x)$。

绝热过程满足

$$PV^{\gamma}=c,\qquad \gamma\approx 1.4$$

气体做功

$$\int pdV=\int cV^{-\gamma}dV=\frac{c}{1-\gamma}V^{1-\gamma}$$

所以内能为

$$-\frac{c}{1-\gamma}V^{1-\gamma}$$

考虑一小段气体，

$$c=PV^{\gamma}=p_0(S\Delta x)^{\gamma}$$

微元的内能为

$$\begin{aligned}
&-\frac{p_0(S\Delta x)^{\gamma}}{1-\gamma}(S\Delta x+S\Delta\psi)^{1-\gamma}=-\frac{p_0S}{1-\gamma}\left(1+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^{1-\gamma}\Delta x\\
&\approx-\frac{p_0S}{1-\gamma}\left\{1+(1-\gamma)\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{(1-\gamma)(1-\gamma-1)}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right\}\Delta x\\
&\sim\frac{1}{2}p_0S\gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\Delta x
\end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\rho S\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}p_0S\gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\Delta x$$

$$\rho S\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-p_0S\gamma\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0$$

色散关系

$$-\rho S\omega^2+p_0S\gamma k^2=0$$

声波的群速度、相速度为

$$v_p=|\omega/k|=\sqrt{\frac{p_0\gamma}{\rho}},\qquad v_g=\frac{d\omega}{dk}=\sqrt{\frac{p_0\gamma}{\rho}}$$

2. 连续体系的拉氏方程

一般情形，3 维空间中连续体系的场

$$\psi = \psi(t, x, y, z)$$

场也可以是多个或多分量的（如电磁场、Dirac 场），

$$\psi_i = \psi_i(t, x, y, z) = \psi_i(x^\mu)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(x^\mu, \psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial x^\mu}\right)$$

拉氏方程为

$$\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^\mu}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} = 0$$

注意上式第一项中$\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} x^\mu}$的含义是求**全偏导数**，

$$\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^\mu}\right)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^\mu}\right) \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^\mu}\right) \partial \psi_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^\mu}\right) \partial \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x^\nu}\right)} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^\nu \partial x^\mu}$$

在经典场的运动方程中，(t, x, y, z)都是参数，地位等同。

例 薛定谔场的拉氏密度

$$\mathcal{L} = -i\hbar \frac{1}{2}\left(\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^*\right) + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi \cdot \nabla\psi^* + V\psi\psi^*$$

变分，得薛定谔方程

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(t, \vec{r})\psi$$

附录 Dirac δ函数

冲击函数被 Dirac 引入以描述点电荷的电荷密度分布。

$$\delta(x) = 0, \qquad x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a), \qquad f(x)\delta(x-a) = f(a)$$

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}\{\delta(x-a) + \delta(x+a)\}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk$$