中国科学技术大学

2021—2022 学年第 二 学期期末考试试卷

考试科目: 信号与系统　　　　得分:________

学生所在系:________ 姓名:________ 学号:________

一、计算下列各小题: (每小题 6 分、共 48 分)

1. 已知连续时间函数 $x(t)=1$，离散时间序列 $x[n]=1$，试分别求其傅里叶变换的像函数。

2. 求 $\frac{1}{2}[1+(-1)^n]u[n]$ 的 Z 变换

3. 已知一个 4 点序列 $x[n]$ 的值分别为 1，0，2，-2，试求其 4 点的 DFT 系数 $X[k]$

4. 求信号 $x(t)=\sin(\pi t)\sin(2\pi t)/(\pi t)^2$ 的频谱密度函数 $X(\omega)$ 表达式并画出图形，再给出对信号 $x(t)$ 进行采样时不发生频谱混叠的最低采样频率 ω_s。

5、试求 $F(z)=\frac{1}{(1+az^{-1})^2}$， $|z|>|a|$ Z 变换的反变换

6、因果连续时间信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换的像函数为 $X(s)=(s+6)/(s^2+7s+10)$，试求信号 $x(t)$ 的初值 $\lim_{t\to 0^+}x(t)$ 和终值 $\lim_{t\to\infty}x(t)$。

7、已知 $x(t)=\begin{cases}1/t, t\neq 0\\ 0, t=0\end{cases}$，求 $y(t)=x(t)*x(t)$，其中 * 表示卷积运算。

8、已知 $y[n]+\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{3}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]-3x[n-2]$ 表示的因果 LTI 系统，请概画出该系统的幅频响应。

二、假设某连续时间周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶级数表示和一个 LTI 系统的频率响应 $H(\omega)$ 分别为

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^{|k|}e^{jk(2\pi/T)t},\quad 0<\alpha<1 \quad 和 \quad H(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$$

如果让 $\tilde{x}(t)$ 通过该连续时间 LTI 系统，试确定 W 值应取多大时，才能确保系统输出 $\tilde{y}(t)$ 的平均功率至少是 $\tilde{x}(t)$ 平均功率的 90%。（12 分）

装订线 答题时不要超过此线

三、由差分方程 $y[n]+0.75y[n-1]+0.125y[n-2]=x[n]+3x[n-1]$ 表示的因果系统。（共 20 分）

(1) 对于其描述的 LTI 系统，求系统函数 $H(z)$，画出 $H(z)$ 在 z 平面上零极点分布和收敛域；（4 分）

(2) 对于差分方程描述的系统，用并联型和级联型结构实现结构，要求延时单元不多于 2 个。(6 分)

(3) 已知其附加条件为 $y[0]=1, y[-1]=-6$，当输入 $x[n]=(0.5)^n u[n]$ 时，求系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 和零输入响应 $y_{zi}[n]$。（10 分）

四、已知实的离散时间因果 LTI 系统的零、极点如图 1 所示，且它在输入为 $x[n]=\cos(\pi n)$ 时的输出为 $y[n]=(-1)^n$。{提示：在有限 z 平面上没有零点}　（共 10 分）

(1) 写出它的系统函数 $H(z)$ 和收敛域。(5 分)

(2) 写出系统的差分方程表示。(3 分)

(3) 求其单位冲激响应。(2 分)

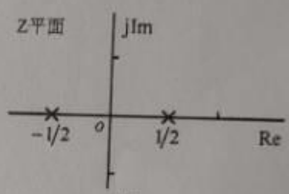


图 1

五、对于如图 2 所示的一起始静止的电路，（10 分）

(1) 求系统的系统函数　（6 分）

(2) 求在输入是 $x(t)=\sin(2t)u(t)$ 时的输出　（4 分）

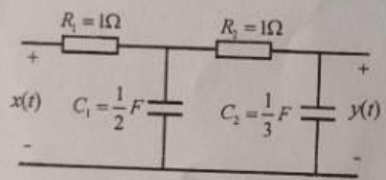


图 2

二

1. $x(t)=1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ 3

$x[n]=1 \longleftrightarrow 2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi l)$ 3

3. $M=4$，$\Omega_0=\frac{\pi}{2}$，由 $X[k]=\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-jkn\Omega_0}$ 2

$\Rightarrow X[0]=\sum_{n=0}^{3}x[0]=1$

$X[1]=1-2-2j=-1-2j$ 4

$X[2]=1+2+2=5$

$X[3]=1-2+2j=-1+2j$

5. 由 $(-a)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1+az^{-1}}$，$|z|>|-a|=|a|$ (+2)

法一 $f[n]=(-a)^n u[n] * (-a)^n u[n]$

$=(-a)^n(n+1)u[n]$ 4

7. 由 $x(t)=\begin{cases}\frac{1}{t}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases} \xleftrightarrow{F} -j\pi\,\mathrm{sgn}\,\omega$ (+2)

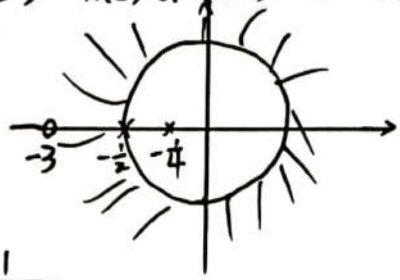
$\Rightarrow y(t) \xleftrightarrow{F} (-j\pi\,\mathrm{sgn}\,\omega)^2=-\pi^2$ 4

$\Rightarrow y(t)=-\pi^2\delta(t)$

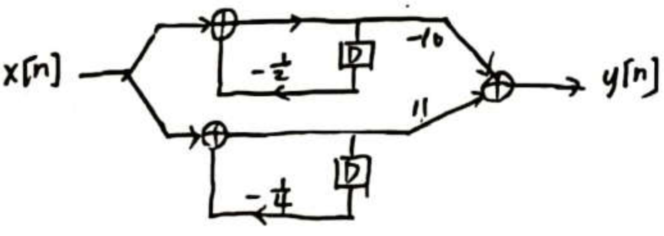
三、

(1) 由 $Y(z)(1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2})=X(z)(1+3z^{-1}) \Rightarrow H(z)=\frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1+3z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$ 2

$\begin{cases}\text{零点 } z=-3\\ \text{极点 } p_1=-\frac{1}{2},\ p_2=-\frac{1}{4}\\ ROC=\{|z|>\frac{1}{2}\}\end{cases} \Rightarrow$ 2

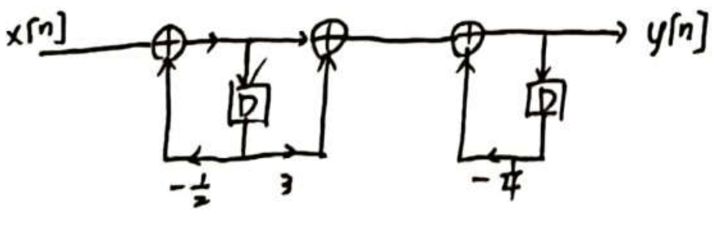


(2) ① $H(z)=\frac{-10}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{11}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$ 1



2

② $H(z)=\frac{1+3z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$ 1



2

(不唯一)

(3) 由 $y[0]+0.75y[-1]+0.125y[-2]=x[0]+3x[-1] \Rightarrow \underline{y[-2]=36}$ (+2)

又由 $Y_u(z)+0.75[z^{-1}Y_u(z)+y[-1]]+0.125[z^{-2}Y_u(z)+y[-1]z^{-1}+y[-2]]=X(z)+3z^{-1}X(z)$

$$\Rightarrow Y_u(z)=X(z)\cdot\frac{1+3z^{-1}}{1+0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}+\frac{\frac{3}{4}z^{-1}}{1+0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}$$ 5

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\frac{3}{4}z^{-1}}{1+0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}=\dfrac{-3}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} \Rightarrow y_{zi}[n]=\left[-3(-\frac{1}{2})^n+3(-\frac{1}{4})^n\right]u[n] \\ \dfrac{1+3z^{-1}}{(1+0.75z^{-1}+0.125z^{-2})(1-0.5z^{-1})}=\dfrac{-5}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{11/3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}+\dfrac{7/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow y_{zs}[n]=\left[-5(-\frac{1}{2})^n+\frac{11}{3}(-\frac{1}{4})^n+\frac{7}{3}(\frac{1}{2})^n\right]u[n] \end{cases}$$ 2 2

五.

(1) $$Z(s)=R_1+\frac{\frac{1}{sC_1}(R_2+\frac{1}{sC_2})}{\frac{1}{sC_1}+R_2+\frac{1}{sC_2}}=1+\frac{2+\frac{6}{s}}{s+5}=\frac{s^2+7s+6}{s^2+5s}$$

$I_1(s)=\frac{X(s)}{Z(s)}$, $I_2(s)=\frac{2/s}{R_2+\frac{2}{s}+\frac{3}{s}}I_1(s)=\frac{2}{s+5}I_1(s)$, $Y(s)=\frac{1}{sC_2}I_2(s)$ 4

$$\Rightarrow H(s)=\frac{6}{s^2+7s+6}$$ 2

/ $$H(s)=\frac{\dfrac{\frac{1}{sC_1}(R_2+\frac{1}{sC_2})}{\frac{1}{sC_1}+R_2+\frac{1}{sC_2}}}{\dfrac{\frac{1}{sC_1}(R_2+\frac{1}{sC_2})}{\frac{1}{sC_1}+R_2+\frac{1}{sC_2}}+R_1}\cdot\frac{\frac{1}{sC_2}}{R_2+\frac{1}{sC_2}}$$ (+4)

(2) $X(s)=\frac{2}{s^2+4}$ (+1)

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{12}{(s^2+7s+6)(s^2+4)}=\frac{12}{(s^2+4)(s+1)(s+6)}$$

$$=\frac{12}{25}\frac{1}{s+1}-\frac{3}{50}\frac{1}{s+6}+\frac{3(-14-j2)}{200}\cdot\frac{1}{s-j2}+\frac{3(-14+j2)}{200}\cdot\frac{1}{s+j2}$$ 2

$$\Rightarrow y(t)=\left(\frac{12}{25}e^{-t}-\frac{3}{50}e^{-6t}+\frac{3}{50}\sin 2t-\frac{21}{50}\cos 2t\right]u(t)$$ 2

一、2解: $x[n]=\frac{1}{2}[1+(-1)^n]u[n]=\begin{cases}0, & n=1,3,5,\cdots\\ 1, & n=0,2,4,\cdots\\ 0, & n\le -1\end{cases}$

$\therefore X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}=z^{0}+z^{-2}+z^{-4}+\cdots=\frac{1}{1-z^{-2}}$, $|z|>1$ (2')

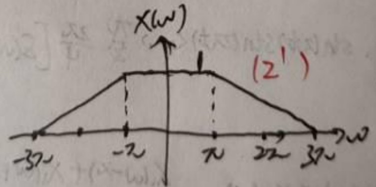
(4')

4.解: $\frac{\sin\pi t\sin2\pi t}{(\pi t)^2}=\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\frac{\sin2\pi t}{\pi t}$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega t}}{jt}\Big|_{-2\pi}^{2\pi}=\frac{2j\sin2\pi t}{2\pi jt}=\frac{\sin2\pi t}{\pi t}$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega t}}{jt}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2j\sin\pi t}{2\pi jt}=\frac{\sin\pi t}{\pi t}$ (2')

$\therefore X(\omega)=\frac{1}{2\pi}[u(\omega+2\pi)-u(\omega-2\pi)]*[u(\omega+\pi)-u(\omega-\pi)]$



(2')

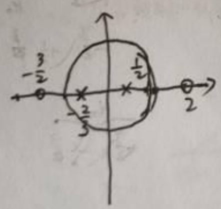
$\omega_s=6\pi$ (2')

6.解：$\lim\limits_{t\to 0} x(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sX(s) = 1$ (3') , $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{s\to 0} sX(s) = 0$. (3')

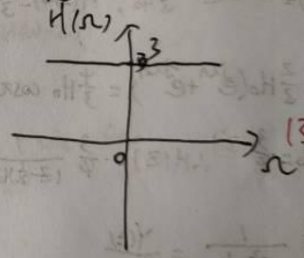
8.解：$Y(z) + \frac{1}{6}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{3}z^{-2}Y(z) = X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}X(z) - 3z^{-2}X(z)$

$$\therefore H(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}-3z^{-2}}{1+\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{3}z^{-2}} = \frac{z^2-\frac{1}{2}z-3}{z^2+\frac{1}{6}z-\frac{1}{3}} = \frac{(z-2)(z+\frac{3}{2})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{2}{3})}$$ (3')

零极点图：



全通系统



(3').

$z = e^{j\Omega}$

二.解：对于 $x(t)$，$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x^*(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{2|k|} = \frac{1+a^2}{1-a^2}.$$ (5')

$y(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a^{|k|} H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$. 假设 $N\omega_0 = W$

则 $y(t) = \sum\limits_{k=-N}^{N} a^{|k|} e^{jk\omega_0 t}$

$$P_y = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)y^*(t)\,dt = \sum_{k=-N}^{N} a^{2|k|} = \frac{1+a^2-2a^{2(N+1)}}{1-a^2}$$ (5')

(2')

$P_y \geq 0.9P_x$ 则 $N \geq \frac{1}{2}\log_a \frac{1+a^2}{20} - 1$ 则 W 至少为 $\frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{2}\log_a \frac{1+a^2}{20} -\right.$

四 解 (1) $H(z)=\dfrac{H_0}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}$ (2')

$x[n]=\cos(\pi n)=(e^{j\pi n}+e^{-j\pi n})\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{j\pi n}+\frac{1}{2}e^{-j\pi n}$

$H(\Omega)=\dfrac{H_0}{(e^{j\Omega}-\frac{1}{2})(e^{j\Omega}+\frac{1}{2})}$

$\therefore y[n]=\frac{1}{2}e^{j\pi n}H(\Omega)\big|_{\Omega=\pi}+\frac{1}{2}e^{-j\pi n}H(\Omega)\big|_{\Omega=-\pi}$

$\therefore H(\pi)=\frac{4}{3}H_0,\ H(-\pi)=\frac{4}{3}H_0$

$\therefore y[n]=\frac{2}{3}H_0(e^{j\pi n}+e^{-j\pi n})=\frac{4}{3}H_0\cos\pi n=\frac{4}{3}H_0(-1)^n=(-1)^n$

$\therefore H_0=\frac{3}{4}$ (2') $\therefore H(z)=\frac{3}{4}\dfrac{1}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})},\ |z|>\frac{1}{2}$ (1')

(2) $H(z)=\frac{3}{4}\dfrac{1}{z^2-\frac{1}{4}}=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$

$\therefore z^2Y(z)-\frac{1}{4}Y(z)=\frac{3}{4}X(z)$ 则 $y[n+2]-\frac{1}{4}y[n]=\frac{3}{4}x[n]$

即 $y[n]-\frac{1}{4}y[n-2]=\frac{3}{4}x[n-2]$ (3')

~~(3) $H(z)=\frac{3}{4}\frac{z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}=\frac{3}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$~~

(3) $H(z)=\frac{3}{4}\dfrac{1}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}=\frac{3}{4}\left(\dfrac{1}{z-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{z+\frac{1}{2}}\right),\ |z|>\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{4}\left(\dfrac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\dfrac{z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right),\ |z|>\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{4}(\frac{1}{2})^nu[n]*\delta[n-1]-\frac{3}{4}(-\frac{1}{2})^nu[n]*\delta[n-1]$

$x[n]\to X(z)$ $\quad=\frac{3}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]-\frac{3}{4}(-\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$

$x[n-1]\ z^{-1}$ $\quad=\frac{3}{4}\left[(\frac{1}{2})^{n-1}-(-\frac{1}{2})^{n-1}\right]u[n-1]$ (2')

$z^{-1}X(z)$