数理方程备课本

授课老师：许雷叶;邮箱：leoasa@mail.ustc.edu.cn

助教：刘传麟，徐胜男

qq群：1050099280，请同学们加入。

关于教科书，教科书的错误比较多

1 数学物理方程

数学物理方程是指从物理、工程问题中，导出的反映客观物理量在各个地点、时刻之间相互制约关系的一些偏微分方程。历史可以一直追溯到牛顿时期，牛顿说了一句很著名的话：要想探索自然界的奥秘就得解微分方程。发扬光大则是法国人，代表人物：达郎贝尔，傅里叶，泊松，勒让德，贝塞尔等。

1.1 偏微分方程

偏导数：一个多变量函数的偏导数，是它关于其中某个变量的导数。例如：$u(t,x,y,z) = tx^2y^3z^4$。u关于x的偏导数记为$\frac{\partial u}{\partial x}$ 或者u_x。我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = 2txy^3z^4.$$

二阶偏导数记为$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 或者u_{xx}。如果是不同变量则记为$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 或者u_{xy}。如果不加说明，我们总是认为$u_{xy} = u_{yx}$成立。

偏微分方程：含有偏导数的方程。本书主要涉及三类偏微分方程：

波动方程: 和波有关的方程，包括弦和薄膜微小振动、声波、电磁波、光波等。

一维: $u_{tt} = a^2u_{xx} + f(t,x)$，其中$u = u(t,x)$；

二维: $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(t,x,y)$，其中$u = u(t,x,y)$；

三维: $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(t,x,y,z)$，其中$u = u(t,x,y,z)$。

热传导方程: 又叫扩散方程，描述热传导过程（可以看做热量的扩散），溶液中溶质的扩散，杂质在固体的扩散等。包括

一维: $u_t = a^2u_{xx} + f(t,x)$，其中$u = u(t,x)$；

二维: $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(t,x,y)$，其中$u = u(t,x,y)$；

三维: $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(t,x,y,z)$，其中$u = u(t,x,y,z)$。

泊松方程: 描述电场的电势分布，热平衡状态的温度分布的方程。

二维: $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$，其中$u = u(x,y)$；

三维: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x,y,z)$，其中$u = u(x,y,z)$。

注记. 为了方便，我们将$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$记为$\Delta_3 u$，或者$\Delta_3=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，称为拉普拉斯算子；还有个很像的符号$nabla$算子，$\nabla_3=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$。

$$\nabla_3 u=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}).$$

没有$\nabla_3\cdot u$的写法。

$$\nabla_3\cdot(u,v,w)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

特别地

$$\Delta_3=\nabla_3\cdot\nabla_3.$$

二维也有相应的写法，如果没有误解的话，也会省略下标。

除了这些方程外，还有其他偏微分方程，例如:冲击波方程（$u_t+uu_x=0$），Kdv方程（$u_t+\sigma uu_x+u_{xxx}=0$）等，但不在我们的考虑范围内。

偏微分方程的求解：如果把某个函数带入偏微分方程后等式成立，则称该函数为偏微分方程的一个解。一般来说，常微分方程的通解常常带有任意常数，例如$y'=0$的通解为

$$y=C.$$

$y''=0$的通解为

$$y=ax+b.$$

然而，哪怕是最最简单的偏微分方程，通解通常包含着某一任意函数。例如：求$u_x=0$的通解，其中$u=u(x,y)$，答案为

$$u=f(y)$$

f为任意函数。又例如所有全纯函数的实部和虚部都是二维拉普拉斯方程$u_{xx}+u_{yy}=0$的解。为此，通常会加入限制条件，称为定解条件，将原来的数学物理方程称为泛定方程，合起来称为一个定解问题，在此不做展开。

例子1. 求二维拉普拉斯方程$u_{xx}+u_{yy}=0$的所有形如e^{ax+by}的解。

解. 将e^{ax+by}带入二维拉普拉斯方程得到

$$(a^2+b^2)e^{ax+by}=0.$$

从而$a^2+b^2=0$，即$a=\pm bi$。方程的解为

$$u=e^{ax\pm ayi}=e^{ax}(\cos(ay)\pm\sin(ay)).$$

例子2. 设$u=u(x,y)$，求$u_{xy}=0$的通解。

解. 首先

$$u_y=f(y).$$

其次

$$u(x,y)=u(x,0)+\int_0^y u_y(x,s)ds=u(x,0)+\int_0^y f(s)ds=h_1(x)+h_2(y).$$

例子3. 设$u = u(t,x)$，求$u_{tt} = a^2u_{xx}$的通解。

解. 变量替换$\xi = x + at, \eta = x - at$，则有

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = au_\xi - au_\eta$$

$$u_{tt} = (au_\xi - au_\eta)_\xi \xi_t + (au_\xi - au_\eta)_\eta \eta_t = a^2u_{\xi\xi} + a^2u_{\eta\eta} - 2a^2u_{\xi\eta}.$$

同理，$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}$，带入泛定方程得

$$a^2u_{\xi\xi} + a^2u_{\eta\eta} - 2a^2u_{\xi\eta} = a^2(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta})$$

即

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

从而$u = f(\xi) + g(\eta)$。即

$$u(t,x) = f(x + at) + g(x - at).$$

1.2 三类方程的推导

一、弦振动方程（一维波动方程）。

理想化假设：

(1) 理想弦:（有限长、）细、柔软且线密度$\rho(x)$，躺在x轴上，处于xu平面内，运动方向垂直于x轴，$u = u(t,x)$为位移；

(2) 弦处于紧绷状态，张力很大，张力满足胡克定律；

(3) 弦做微小上下震动，$|u| \ll 1, u_x \ll 1$；可以认为弦的长度没有发生变化，因而张力不随时间变化，为常值T；

(4) 所受外力非常小，合力为竖直方向，力密度为$g(t,x)$。

（拿一根橡皮筋长$1cm$，拉长到$1m$，固定住，微风在吹-形变太小忽略不计因而认为张力不随时间变化，差不多就是这样了。）其他例子还有大小提琴，古筝等等。

我们取一段弧线$[x, x + \triangle x]$做受力分解，其竖直方向合力

$$= T_1(t, x + \triangle x)u_x(t, x + \triangle x) - T_1(t,x)u_x(t,x) + \int_x^{x+\triangle x} g(t,s)ds.$$

其中$T_1(t,s)$为t时刻张力在s点的分量，因为弦只在竖直方向有运动，该值与s无关，为$T_1(t)$。竖直方向合力

$$= T_1(t)u_x(t, x + \triangle x) - T_1(t)u_x(t,x) + \int_x^{x+\triangle x} g(t,s)ds = \int_x^{x+\triangle x} T_1(t)u_{xx}(t,s) + g(t,s)ds.$$

又因为$|u_x| \ll 1$，$T_1(t) \approx T$，竖直方向合力为

$$\int_x^{x+\triangle x} T(t)u_{xx}(t,s) + g(t,s)ds.$$

由牛顿第二定律$F = ma$，上式等于

$$\int_x^{x+\triangle x} \rho(s) u_{tt}(t,s) ds.$$

由所取弧线的任意性，我们得到

$$u_{tt} = \frac{T}{\rho} u_{xx} + \frac{g}{\rho}$$

设$a = a(x) = \sqrt{T/\rho}, f(t,x) = g/\rho$，我们得到

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f.$$

一般来说，我们总是会假定ρ为常数，因而a为常数。

二、热传导方程。

理想化假设：

(1) 介质各向同性且均匀分布（比热c，密度ρ，热传导系数k）；

(2) $dQ = -k(x,y,z) \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dSdt$，其中$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = (u_x, u_y, u_z) \cdot \vec{n}$，$u$为温度；

(3) 内部热源，设为$g(t,x,y,z)$（产生热量密度）。

取一个方体$(x, x+\triangle x) \times (y, y+\triangle y) \times (z, z+\triangle z)$以及时间段$[t, t+\triangle t]$，先计算从方体的左边一个面$\{x\} \times (y, y+\triangle y) \times (z, z+\triangle z)$ 流入方体的热量，法向为$(1,0,0)$，因而左边一个面流入方体的热量为

$$Q_{左} = \int_t^{t+\triangle t} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} -ku_x(s,x,v,w) dvdwds.$$

再计算从方体的右边一个面$\{x+\triangle x\} \times (y, y+\triangle y) \times (z, z+\triangle z)$流入方体的热量，法向为$(-1,0,0)$，因而右边一个面流入方体的热量为

$$Q_{右} = \int_t^{t+\triangle t} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} ku_x(s,x+\triangle x,v,w) dvdwds.$$

从而左右两个面合计流入热量为

$$\begin{aligned} Q_{左} + Q_{右} &= \int_t^{t+\triangle t} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} ku_x(s,x+\triangle x,v,w) - ku_x(s,x,v,w) dvdwds \\ &= \int_t^{t+\triangle t} \int_x^{x+\triangle x} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} ku_{xx}(s,u,v,w) dudvdwds. \end{aligned}$$

同理

$$Q_{前} + Q_{后} = \int_t^{t+\triangle t} \int_x^{x+\triangle x} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} ku_{yy}(s,u,v,w) dudvdwds.$$

$$Q_{上} + Q_{下} = \int_t^{t+\triangle t} \int_x^{x+\triangle x} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} ku_{zz}(s,u,v,w) dudvdwds.$$

总计方体内热量变化

$$\int_t^{t+\triangle t}\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z} k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})(s,u,v,w)+g(s,u,v,w)dudvdwds.$$

由热力学定律所需热量，即上式等于

$$\begin{aligned}&\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z} c\rho(u(t+\triangle t,u,v,w)-u(t,u,v,w))dudvdw\\ =&\int_t^{t+\triangle t}\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z} c\rho u_t(s,u,v,w)dudvdwds.\end{aligned}$$

既然我们所取方体是任意的，我们有

$$u_t=\frac{k}{c\rho}k(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+\frac{g}{c\rho}.$$

设$a=\sqrt{k/c\rho}, f=g/c\rho$，热传导方程为

$$u_t=\frac{k}{c\rho}(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+\frac{g}{c\rho}=a^2\Delta_3 u+f.$$

三、泊松方程（静电场的场势方程）。

理想化假设：

(1) 介质各向同性且均匀分布（介电常数设为ε）；

(2) 电荷密度，设为$\rho(x,y,z)$。

设$\vec{E}$ 为电场，则与电势有关系$\nabla_3\varphi=-\vec{E}$。推导依赖高斯定律：通过封闭曲面的电通量=封闭曲面内部载荷除以介电常数。任意封闭曲面S，有

$$\int \nabla_3\cdot\vec{E}dV \overset{\text{高斯公式}}{=} \int \vec{E}\cdot\vec{n}dS=\int\frac{\rho}{\varepsilon}dV.$$

从而由封闭曲面选取的任意性，

$$-\Delta_3\varphi=\nabla_3\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}\Leftrightarrow\Delta_3\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

我们也可以用推导热方程的办法推导泊松方程。取一个方体$(x,x+\triangle x)\times(y,y+\triangle y)\times(z,z+\triangle z)$，设$\vec{E}=(E_1,E_2,E_3)$。计算方体的左边一个面$\{x\}\times(y,y+\triangle y)\times(z,z+\triangle z)$的电场通量为

$$\Phi_{\text{左}}=\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z} E_1(x,v,w)dvdw.$$

再计算从方体的右边一个面$\{x+\triangle x\}\times(y,y+\triangle y)\times(z,z+\triangle z)$的电场通量

$$\Phi_{\text{右}}=\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z} E_1(x+\triangle x,v,w)dvdw.$$

从而左右两个面跑出方体的通量为

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{右}}-\Phi_{\text{左}}&=\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z} E_1(x+\triangle x,v,w)-E_1(x,v,w)dvdw\\ &=\int_x^{x+\triangle x}\int_y^{y+\triangle y}\int_z^{z+\triangle z}(E_1)_x(u,v,w)dudvdw.\end{aligned}$$

同理

$$\Phi_{后} - \Phi_{前} = \int_x^{x+\triangle x} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} (E_2)_y(u,v,w)dudvdw.$$

$$\Phi_{上} - \Phi_{下} = \int_x^{x+\triangle x} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} (E_3)_z(u,v,w)dudvdw.$$

总计离开方体的电通量为

$$\begin{aligned}&\int_x^{x+\triangle x} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} \left((E_1)_x + (E_2)_y + (E_3)_z\right)(u,v,w)dudvdw \\ =&\int_x^{x+\triangle x} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} \nabla_3 \cdot \vec{E}(u,v,w)dudvdw.\end{aligned}$$

由高斯定律，上式等于

$$\int_x^{x+\triangle x} \int_y^{y+\triangle y} \int_z^{z+\triangle z} \frac{\rho}{\varepsilon} dudvdw$$

既然我们所取方体是任意的，我们有

$$\nabla_3 \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

代入关系式$\nabla_3\varphi = -\vec{E}$。得到

$$\Delta_3\varphi = -\nabla_3 \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

除此之外，泊松方程也可以描述某些平衡态，比如处于热平衡的方程。

1.3 定解条件

一般来说，哪怕是最最简单的偏微分方程，其解都有无数个，而且通常包含着某一任意函数。例如：求$u_t = 0$的通解，其中$u = u(t,x)$，答案为

$$u = f(x)$$

f为任意函数。这与一般物理现象不符，为了让解唯一，我们必须加限制条件，称为定解条件。合起来称为定解问题

$$\begin{cases}\text{泛定方程：描述一般物理规律的数学物理方程}\\ \text{定解条件：使方程有唯一解的各种条件}\end{cases}$$

(1) 泛定方程：波动方程，热方程，泊松方程，其他方程(KDV方程，冲击波方程等)；

(2) 定解条件：

   (a) 初始条件:系统的初始状态；

   (b) 边界条件:系统的边界状态，分为Dirichlet条件(I类)，Neumann条件(II 类)，混合边界条件(Robin条件,III 类)，自然边界条件，周期边界条件等。

I类 给出了状态函数在边界的取值，可以和时间有关；

II类 给出了状态函数在边界法向(垂直于边界，远离区域)导数的取值，可以和时间有关；

关于状态函数u 在边界法向$\vec{n}$导数$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} = (u_x, u_y, u_z) \cdot \vec{n}$，

一维: $\pm u_x$，取决于$\vec{n}$选取；

二维: $(u_x, u_y) \cdot (n_1, n_2) = n_1 u_x + n_2 u_y$;

三维: $(u_x, u_y, n_z) \cdot (n_1, n_2, n_3) = n_1 u_x + n_2 u_y + n_3 u_z$。

III类 上述两的线性组合；

自然边界条件 自然满足的边界条件，例如状态函数取值必须有界等；

周期边界条件 状态函数取值周期性发生变化，往往出现在柱坐标系和球坐标系中。

在这一节中，我们只考虑初始条件和I，II，III类边界条件。

只有初始条件的叫初始问题；只有边界条件的叫边界问题；既有初始条件又有边界条件的称为混合问题。

弦振动方程，热方程和泊松方程的定解条件。(能够依据题意给出泛定方程和定解条件)

(1) 弦振动方程：$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$.

(a) 初始条件（初始问题）:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, 0 \le t < \infty, -\infty \le x < \infty \\ u \mid_{t=0} (x) = g_1(x), u_t \mid_{t=0} (x) = g_2(x), -\infty \le x < \infty \end{cases}$$

(b) 边界条件（混合问题）:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, 0 \le x \le l, 0 \le t < \infty \\ u(t,0) = A(t), u_x(t,l) = B(t), 0 \le t < \infty \Longleftarrow \text{(边界条件)} \\ u \mid_{t=0} (x) = g_1(x), u_t \mid_{t=0} (x) = g_2(x), 0 \le x \le l \Longleftarrow \text{(初始条件)} \end{cases}$$

例子：常见边界条件

(I) Dirichlet边界条件：端点运动状态：$u(t,0) = A(t)$；特别地，端点固定在零点：$u(t,0) = 0$;

(II) Neumann边界条件：端点竖直方向自由运动，受竖直方向力$F(t)$：则由受力分解，$Tu_x \mid_{x=0} + F(t) = 0$，即$u_x(t,0) = -\frac{F(t)}{T}$；特别地，$F(t) = 0$时，$u_x(t,0) = 0$;

(III) 混合边界条件：端点接了一个竖直的弹簧，弹性系数为k：由受力分解，$Tu_x \mid_{x=0} -ku = 0$，即$u_x(t,0) - \frac{k}{T} u(t,0) = 0$。

例子4. *一根长为l的理想弦躺在x轴上，张力为T，一端固定$x=0$处，另一端$x=l$端点接了一个竖直的弹簧，弹性系数为k。初始位置为$g_1(x)$，初始速度$g_2(x)$。写出定解问题。*

解.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 \le x \le l, 0 \le t < \infty \\ u(t,0) = 0, u_x(t,0) + \frac{k}{T} u(t,0) = 0, 0 \le t < \infty \Longleftarrow \textit{(边界条件)} \\ u \mid_{t=0} (x) = g_1(x), u_t \mid_{t=0} (x) = g_2(x), 0 \le x \le l \Longleftarrow \textit{(初始条件)} \end{cases}$$

(2) 一维细杆热方程：我们认为与x垂直的界面上的温度是一样的，热源也是一样的，因而$u_{yy} = u_{zz} = 0$，可以在热传导方程中无视y与z。即：$u_t = a^2 u_{xx} + f$.（二维类似）

(a) 初始条件（初始问题）：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f, 0 \le t < +\infty, -\infty \le x < +\infty \\ u(0,x) = g(x), -\infty \le x < +\infty \end{cases}$$

(b) 热方程边界条件（混合问题）：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f, \quad 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty \\ u(t,0) = A(t), u_x(t,l) = B(t) \Longleftarrow \text{(边界条件)} \\ u\mid_{t=0}(t,x) = g(x), 0 \le x \le l \Longleftarrow \text{(初始条件)} \end{cases}$$

例子：常见边界条件（记住一点，热量都是从高温往低温流，这样就不会搞错正负号了!）

(I) Dirichlet条件：$u(t,0) = g(t)$，特别地，恒温：$u(t,0) = T$；

(II) Neumann条件：

(α) 绝热：$u_x(t,0) = 0$；

(β) 左端有热量$q(t)$ 流入：$\frac{dQ}{dSdt} = -ku_x\mid_{x=0}(t,x)$，即：$u_x\mid_{x=0} = -\frac{q(t)}{k}$；

(γ) 右端有热量$q(t)$ 流入：$\frac{dQ}{dSdt} = ku_x\mid_{x=l}(t,x)$，即：$u_x\mid_{x=l} = \frac{q(t)}{k}$。

(III) 混合边界条件：边界与介质接触，热流交换满足$h\times$温度差：

(α) 左端与温度为$T(t)$ 的介质接触：$h(u|_{x=0} - T) = ku_x\mid_{x=0}(t,x)$，即：$(u - \frac{k}{h}u_x)\mid_{x=0} = T$；

(β) 右端与温度为$T(t)$的介质接触：$h(u|_{x=l} - T) = -ku_x\mid_{x=l}(t,x)$，即：$(u + \frac{k}{h}u_x)\mid_{x=l} = T$。

例子5. 一根长为l的由理想介质组成的细杆(两端点分别为$0,l$)，$k = c = \rho = 1$，侧面绝热，内部无热源，初始温度为x。两端分别与温度0,1的介质接触，热交换系数为2。写出定解问题。

解.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = x, , 0 \le x \le l \\ u(t,0) - \frac{1}{2}u_x(t,0) = 0, u(t,l) + \frac{1}{2}u_x(t,l) = 1, 0 \le t < +\infty. \end{cases}$$

(3) 一般热方程边界问题：我们省略了二维的情形，反正都差不多。例子：常见边界条件（记住一点，热量都是从高温往低温流，这样就不会搞错正负号了!）我们用V表示区域，S表示V的边界。

(I) Dirichlet条件：$u(t,x,y,z) = g(t,x,y,z), (x,y,z) \in S$；

(II) Neumann条件：

(α) 绝热：$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0$；

(β) 有热量$q(t,x,y,z),(x,y,z)\in S$ 流出：$-k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S=q$，即：$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S=-\frac{q}{k}$；

(γ) 有热量$q(t,x,y,z),(x,y,z)\in S$ 流入：$k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S=q$，即：$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S=\frac{q}{k}$。

(III) 混合边界条件：边界与介质接触，热流交换满足$h\times$温度差：

(α) 边界与温度为$\theta(t,x,y,z),(x,y,z)\in S$ 的介质接触：$h(u-\theta)=-k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_S$，即：$(u+\frac{k}{h}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}})|_S=\theta$。

（需要注意的是，并不是所有边界都取一样的边界条件，可以不同。）

例子6. 有一块$[0,1]\times[0,1]$的正方形金属片，内部无热源，有初始温度xy，上下面绝热，$x=0$绝热，$x=1$恒温$=1$，$y=1$与温度为0的介质接触，热交换系数=热传导系数$=1$，$y=0$有热流密度$q(t)$流出，写出定解问题。

解.

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+u_{yy}, 0\le x,y\le 1, 0\le t<+\infty \\ u(0,x,y)=xy, 0\le x,y\le 1 \\ u_x(t,0,y)=0, u(t,l,y)=1, 0\le y\le 1, 0\le t<+\infty \\ u_y(t,x,0)=q(t), u(t,x,1)+u_y(t,x,1)=0, 0\le x\le 1, 0\le t<+\infty. \end{cases}$$

(4) 泊松方程没有初始条件只有边界条件（边界问题）：$\Delta_3 u=f$.

$$\begin{cases} \Delta_3 u=f, \quad (x,y,z)\in\Omega \\ u\mid_{\partial\Omega}=A(x,y,z) \Longleftarrow \text{(边界条件)} \end{cases}$$

注记. 在上述定解问题中，如果$f=0$，则称方程齐次，如果边界条件中不含u,u_x项为0，则称边界条件齐次，一般我们总是希望方程和边界条件都是齐次，齐次化的过程需要叠加原理和冲量原理，详情见下一节。

例子7. 一个圆柱体，顶端恒温T_0，底端绝热，侧面与温度为T的介质接触，内部无热源，初始温度$\psi(x,y,z)$，写出定解问题。

解. （要特别注意正负号，记住热流总是从高温到低温，这样就不会搞错了。）

$$\begin{cases} u_t=a^2\Delta u, \quad x^2+y^2\le R^2, 0\le z\le H, 0\le t<\infty \\ u_z\mid_{z=0}=0, u\mid_{z=H}=T_0, \quad x^2+y^2\le R^2, 0\le t<\infty \\ u(0,x,y,z)=\psi(x,y,z), \quad x^2+y^2\le R^2, 0\le z\le H \\ (u+\frac{k}{h}u_r)\mid_{r=R}=T, \quad 0\le z\le H, 0\le t<\infty \end{cases}$$

例子8. 一个圆柱体，顶端恒温T_0，底端绝热，侧面与温度为T的介质接触，内部无热源，处于热平衡，写出定解问题。

解.

$$\begin{cases} \Delta u=0, \quad x^2+y^2\le R^2, 0\le z\le H, 0\le t<\infty \\ u_z\mid_{z=0}=0, u\mid_{z=H}=T_0, \quad x^2+y^2\le R^2, 0\le t<\infty \\ (u+\frac{k}{h}u_r)\mid_{r=R}=T, \quad 0\le z\le H, 0\le t<\infty \end{cases}$$

1.4 达朗贝尔公式

我们先求弦振动方程的初始问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, -\infty < x < +\infty, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = g_1(x), u_t(0,x) = g_2(x), -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

为此，我们先要求泛定方程$u_{tt} = a^2 u_{xx}$的通解，做变量替换$\xi = x + at, \eta = x - at$，则有

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = a u_\xi - a u_\eta, u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} + a^2 u_{\eta\eta} - 2a^2 u_{\xi\eta}.$$

同理，$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}$，带入泛定方程得

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

从而$u = h_1(\xi) + h_2(\eta)$。即

$$u(t,x) = h_1(x+at) + h_2(x-at).$$

与初始条件结合有

$$\begin{cases} h_1(x) + h_2(x) = g_1(x) \\ h_1'(x) - h_2'(x) = \frac{g_2(x)}{a} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} h_1(x) = \frac{1}{2} g_1(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x g_2(s)ds + C \\ h_2(x) = \frac{1}{2} g_1(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x g_2(s)ds - C \end{cases}$$

带入通解，得到达朗贝尔公式

$$u(t,x) = \frac{g_1(x+at) + g_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g_2(s)ds$$

对于非齐次一维波动方程的初始问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, -\infty < x < +\infty, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = g_1(x), u_t(0,x) = g_2(x), -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解题步骤如下：

(1) 先找泛定方程$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f$的一个特解$v(t,x)$；

(2) 用$\tilde{u} = u - v$建立新的初始问题：

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2 \tilde{u}_{xx}, -\infty < x < +\infty, 0 \le t < +\infty \\ \tilde{u}(0,x) = g_1(x) - v(0,x), \tilde{u}_t(0,x) = g_2(x) - v_t(0,x), -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

(3) 用达朗贝尔公式解出$\tilde{u}$ 并求出$u = \tilde{u} + v$。

例子9. 求解以下非齐次定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x^2 e^{-t}, -\infty < x < +\infty, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = x, u_t(0,x) = \sin x, -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解. 泛定方程$v_{tt}=v_{xx}+x^2e^{-t}$一个特解为

$$v(t,x)=x^2e^{-t}+2e^{-t}.$$

令$\tilde{u}=u-v$，得到

$$\begin{cases}\tilde{u}_{tt}=\tilde{u}_{xx},-\infty<x<+\infty,0\le t<+\infty\\ \tilde{u}(0,x)=x-x^2-2,\tilde{u}_t(0,x)=\sin x+x^2+2,-\infty<x<+\infty.\end{cases}$$

由达朗贝尔公式，得

$$\tilde{u}(t,x)=\frac{x+t-(x+t)^2-2+x-t-(x-t)^2-2}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin s+s^2+2ds.$$

整理得，

$$\tilde{u}(t,x)=-x^2+x-2-t^2+\sin x\sin t+x^2t+\frac{t^3}{3}+2t.$$

从而

$$u(t,x)=\tilde{u}(t,x)+v(t,x)=-x^2+x-2-t^2+\sin x\sin t+x^2t+\frac{t^3}{3}+x^2e^{-t}+2e^{-t}+2t.$$

达朗贝尔公式的其他应用：

例子10. 求解一端固定的半弦齐次波动方程：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx},0\le x<+\infty,0\le t<+\infty\\ u(0,x)=g_1(x),u_t(0,x)=g_2(x),0\le x<+\infty\\ u(t,0)=0.\end{cases}$$

解. 我们可以把半弦扩为完整的弦，但是要求解在$x=0$点取值始终为0，为此我们做奇扩充：

$$\begin{cases}\tilde{u}_{tt}=a^2\tilde{u}_{xx},-\infty<x<+\infty,0\le t<+\infty\\ \tilde{u}(0,x)=\tilde{g}_1(x),u_t(0,x)=\tilde{g}_2(x),\infty<x<+\infty\end{cases}$$

其中，$\tilde{g}_1(x)=sign(x)g_1(|x|)$，$\tilde{g}_2(x)=sign(x)g_2(|x|)$. 用达朗贝尔公式解该方程，得：

$$\tilde{u}(t,x)=\frac{\tilde{g}_1(x+at)+\tilde{g}_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{g}_2(s)ds.$$

整理得

$$u(t,x)=\begin{cases}\frac{g_1(x+at)+g_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g_2(s)ds & x-at\ge 0\\ \frac{g_1(x+at)-g_1(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at}\tilde{g}_2(s)ds-\int_0^{at-x}\tilde{g}_2(s)ds\right) & x-at<0\end{cases}$$

例子11. 求解一端上下自由运动的半弦齐次波动方程：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx},0\le x<+\infty,0\le t<+\infty\\ u(0,x)=g_1(x),u_t(0,x)=g_2(x),0\le x<+\infty\\ u_x(t,0)=0.\end{cases}$$

解. 我们可以把半弦扩为完整的弦，要求解在$x=0$点导数取值始终为0，为此我们做偶扩充：

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}=a^2\tilde{u}_{xx}, -\infty<x<+\infty, 0\le t<+\infty \\ \tilde{u}(0,x)=\tilde{g}_1(x), u_t(0,x)=\tilde{g}_2(x), \infty<x<+\infty, \end{cases}$$

其中，$\tilde{g}_1(x)=g_1(|x|)$，$\tilde{g}_2(x)=g_2(|x|)$. 用达朗贝尔公式解该方程，得：

$$\tilde{u}(t,x)=\frac{\tilde{g}_1(x+at)+\tilde{g}_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{g}_2(s)ds.$$

整理得

$$u(t,x)=\begin{cases} \frac{g_1(x+at)+g_1(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g_2(s)ds, & x-at\ge 0 \\ \frac{g_1(x+at)+g_1(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at}g_2(s)ds+\int_0^{at-x}g_2(s)ds\right), & x-at<0. \end{cases}$$

总结例子10和例子11的方法，就是$u(t,a)=0$就以$x=a$中心对称，$u_x(t,a)=0$就以$x=a$对称。用这个办法，我们可以处理某些带两个边界条件的齐次弦振动方程。

例子12. 求解一端固定一端自由运动的有界弦振动方程：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, 0\le x\le l, 0\le t<+\infty \\ u(0,x)=g_1(x), u_t(0,x)=g_2(x), 0\le x\le l \\ u(t,0)=0, u_x(t,l)=0. \end{cases}$$

解. 我们可以把有界弦扩为完整的弦，要求解在$x=0$点取值始终为0且在$x=l$点对x求导取值始终为0。为此我们解如下定解问题：

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}=a^2\tilde{u}_{xx}, -\infty<x<+\infty, 0\le t<+\infty \\ \tilde{u}(0,x)=\tilde{g}_1(x), u_t(0,x)=\tilde{g}_2(x), \infty<x<+\infty, \end{cases}$$

其中，

$$\tilde{g}_1(x)=\begin{cases} g_1(x-4kl), & 4kl<x\le 4kl+l, k\in\mathbb{Z} \\ g_1(4kl+2l-x), & 4kl+l<x\le 4kl+2l, k\in\mathbb{Z} \\ -g_1(x-4kl-2l), & 4kl+2l<x\le 4kl+3l, k\in\mathbb{Z} \\ -g_1(4kl+4l-x), & 4kl+3l<x\le 4kl+4l, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\tilde{g}_2(x)=\begin{cases} g_2(x-4kl), & 4kl<x\le 4kl+l, k\in\mathbb{Z} \\ g_2(4kl+2l-x), & 4kl+l<x\le 4kl+2l, k\in\mathbb{Z} \\ -g_2(x-4kl-2l), & 4kl+2l<x\le 4kl+3l, k\in\mathbb{Z} \\ -g_2(4kl+4l-x), & 4kl+3l<x\le 4kl+4l, k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

用达朗贝尔公式解该方程，得：

$$\tilde{u}(t,x)=\frac{\tilde{g}_1(x+t)+\tilde{g}_1(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\tilde{g}_2(s)ds.$$

当然我们可以不用达朗贝尔公式解，实际上，简单观察可得，$\tilde{g}_1$和$\tilde{g}_2$都是周期为$4l$的函数，且为奇函数，相应该问题中齐次定解问题的解也应该为周期为$4l$的周期函数和奇函数(关于x)。由$Fourier$展开，解得

$$\tilde{u}(t,x)=\sum_{n\ge 1}b_n(t)\sin(\frac{2n\pi x}{4l})=\sum_{n\ge 1}b_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{2l}).$$

带入泛定方程并对照得：

$$b_n''(t) = -\left(\frac{n\pi a}{2l}\right)^2 b_n(t), n \geq 1.$$

解得

$$b_n(t) = A_n \cos(\frac{n\pi at}{2l}) + B_n \sin(\frac{n\pi at}{2l}), n \geq 1.$$

从而

$$\tilde{u}(t,x) = \sum_{n\geq 1}\left(A_n \cos(\frac{n\pi at}{2l}) + B_n \sin(\frac{n\pi at}{2l})\right)\sin(\frac{2n\pi x}{4l}).$$

同样对$\tilde{g}_1$和$\tilde{g}_2$也可以做*Fourier* 分解：

$$\tilde{g}_1(x) = \sum_{n\geq 1} c_n \sin(\frac{2n\pi x}{4l}), \tilde{g}_2(x) = \sum_{n\geq 1} d_n \sin(\frac{2n\pi x}{4l})$$

从而令$t=0$并对照，我们可以得到：

$$\begin{cases} A_n = c_n \\ B_n = \frac{2l}{n\pi a} d_n. \end{cases}$$

最后，注意到$g_1(x)$关于$x=l$对称，即$g_1(2l-x)=g_1(x)$，从而可以得到

$$A_{2n} = c_{2n} = 0, n = 1,2,3,\cdots.$$

同理，$B_{2n} = d_{2n} = 0, n = 1,2,3,\cdots$。从而定解问题的解为

$$\tilde{u}(t,x) = \sum_{n\geq 0}\left(c_{2n+1}\cos(\frac{(2n+1)\pi at}{2l}) + \frac{2l}{(2n+1)\pi a} d_{2n+1}\sin(\frac{(2n+1)\pi at}{2l})\right)\sin(\frac{(2n+1)\pi x}{2l}).$$

可以进一步把系数算出来，在此，我们忽略。

注记. 细心的同学发现上述步骤和下一章分离变量法很像，当然也可以把左右边界条件换成其他*Dirichlet*或者*Neumann* 边界条件，方法依然有效。不仅是波方程，对热方程也能同样操作。

1.5 叠加原理和冲量原理

我们希望定解问题是其次的，叠加原理和冲量原理可以消除非齐次项，这往往是解数学物理方程的第一步。

1.5.1 叠加原理

对于一个复杂问题，我们试图用叠加原理将其分解成几个简单的问题（边界条件齐次，方程齐次）。设$\mathcal{L}$为线性微分算子，则有叠加原理

(1) 有限叠加$\mathcal{L}u_i = f_i, i = 1,2,\cdots,n \Rightarrow \mathcal{L}(\sum_i u_i) = \sum_i f_i$；

(2) 可数叠加$\mathcal{L}u_i = f_i, i = 1,2,\cdots \Rightarrow \mathcal{L}(\sum_i u_i) = \sum_i f_i$；

(3) 积分叠加$\mathcal{L}u_i(M;m) = f(M;m), m \in M_0 \Rightarrow \mathcal{L}(\int_{M_0} u(M;m)dm) = \int_{M_0} f(M;m)dm$。

叠加原理最大的用处就是把一个复杂问题分解成若干简单问题（方程齐次，边界条件齐次），例如：找特解本身就表示我们使用了叠加原理，我们还是用例子说明：

例子13. 将下面弦振动方程做分解：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = g_1(x), u_t(0,x) = g_2(x), 0 \le x \le l \\ u(t,0) = \psi_1(t), u_x(t,l) = \psi_2(t). \end{cases}$$

解. 该方程本身非齐次，并且边界条件也是非齐次。我们先想办法将边界条件齐次化，一个办法是设

$$v(t,x) = \psi_1(t) + x\psi_2(t).$$

令$\tilde{u} = u - v$，则得到一个边界条件齐次的定解问题：

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2 \tilde{u}_{xx} + \tilde{f}(t,x), 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty \\ \tilde{u}(0,x) = \tilde{g}_1(x), \tilde{u}_t(0,x) = \tilde{g}_2(x), 0 \le x \le l \\ \tilde{u}(t,0) = 0, \tilde{u}_x(t,l) = 0, \end{cases}$$

其中$\tilde{f} = f - \psi_1''(t) - x\psi_2''(t), \tilde{g}_1 = g_1 - \psi_1(0) - x\psi_2(0), \tilde{g}_2 = g_2 - \psi_1'(0) - x\psi_2'(0)$. 设$\tilde{v}$ 是定解问题

$$\begin{cases} \tilde{v}_{tt} = a^2 \tilde{v}_{xx} + \tilde{f}(t,x), 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty \\ \tilde{v}(0,x) = 0, \tilde{v}_t(0,x) = 0, 0 \le x \le l \\ \tilde{v}(t,0) = 0, \tilde{v}_x(t,l) = 0, \end{cases}$$

的解。设$\bar{v}$ 是定解问题

$$\begin{cases} \bar{v}_{tt} = a^2 \bar{v}_{xx}, 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty \\ \bar{v}(0,x) = \tilde{g}_1(x), \bar{v}_t(0,x) = \tilde{g}_2(x), 0 \le x \le l \\ \bar{v}(t,0) = 0, \bar{v}_x(t,l) = 0, \end{cases}$$

的解。则$\tilde{u} = \tilde{v} + \bar{v}$，从而$u = \tilde{u} + v = v + \tilde{v} + \bar{v}$。因而仅需解出$\tilde{v}$和$\bar{v}$。$\bar{v}$的解法已经说过，参见例子*12*，推荐用下一章的分离变量法。$\tilde{v}$的解法可以使用冲量原理化为$\bar{v}$的情形。

思考. 上述例子中，v的选取是否唯一？如果边界条件为$u_x(t,0) = \psi_1(t), u(t,l) = \psi_2(t)$，该如何选择$v$？如果出现混合边界条件呢？对于热方程，我们是否可以做同样的操作？

1.5.2 冲量原理

冲量原理适用范围：非齐次波动方程或热方程（可以高维）+平凡初始条件+齐次边界条件（可以没有边界条件）。推导冲量原理依赖一个求导公式

$$\int_0^t p(t,s)ds = p(t,t) + \int_0^t p_t(t,s)ds.$$

弦振动方程的冲量原理：如果定解问题

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, 0 \le x \le l, \tau \le t < +\infty \\ w(\tau,x) = 0, w_t(\tau,x) = f(\tau,x), 0 \le x \le l \\ w(t,0) = 0, w_x(t,l) = 0, \tau \le t < +\infty \end{cases}$$

的解为$w(t,x;\tau)$。则定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x), 0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = 0, 0 \le x \le l \\ u(t,0) = 0, u_x(t,l) = 0, \end{cases}$$

的解为

$$u(t,x) = \int_0^t w(t,x;\tau)d\tau.$$

证明. 边界条件和初始条件上述表达式显然满足。我们仅需说明上述表达式满足泛定方程。

$$u_t = w(t,x;t) + \int_0^t w_t(t,x;\tau)d\tau = \int_0^t w_t(t,x;\tau)d\tau.$$

从而

$$u_{tt} = w_t(t,x;t) + \int_0^t w_{tt}(t,x;\tau)d\tau = f(t,x) + a^2 \int_0^t w_{xx}(t,x;\tau)d\tau = a^2 u_{xx} + f.$$

热方程的冲量原理： 如果定解问题

$$\begin{cases} w_t = a^2 \Delta_3 w, -\infty < x,y,z < +\infty, \tau \le t < +\infty \\ w(\tau,x,y,z) = f(\tau,x,y,z), -\infty < x,y,z < +\infty. \end{cases}$$

的解为$w(t,x,y,z;\tau)$。则定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta_3 u + f(t,x,y,z), -\infty < x,y,z < +\infty, \tau \le t < +\infty \\ u(0,x,y,z) = 0, -\infty < x,y,z < +\infty. \end{cases}$$

的解为

$$u(t,x,y,z) = \int_0^t w(t,x,y,z;\tau)d\tau.$$

证明. 初始条件上述表达式显然满足。我们仅需说明上述表达式满足泛定方程。

$$\begin{aligned} u_t &= w(t,x,y,z;t) + \int_0^t w_t(t,x,y,z;\tau)d\tau = f + a^2 \int_0^t \Delta w_t(t,x,y,z;\tau)d\tau \\ &= f + a^2 \Delta u. \end{aligned}$$

例子14 (例子9). 求解以下非齐次定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x^2 e^{-t}, -\infty < x < +\infty, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = x, u_t(0,x) = \sin x, -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解. 注意到初始条件非平凡，我们设

$$v(t,x) = t\sin x + x.$$

设$\tilde{u} = u - v$，则有

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} + x^2 e^{-t} - t\sin x, -\infty < x < +\infty, 0 \le t < +\infty \\ \tilde{u}(0,x) = 0, \tilde{u}_t(0,x) = 0, -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解以下定解问题

$$\begin{cases} w_{tt} = w_{xx}, -\infty < x < +\infty, \tau \leq t < +\infty \\ w(\tau, x; \tau) = 0, w_t(\tau, x; \tau) = x^2 e^{-\tau} - \tau \sin x, -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

得

$$w(t,x;\tau) = \frac{1}{2}\int_{x+\tau-t}^{x+t-\tau} s^2 e^{-\tau} - \tau \sin s ds = x^2(t-\tau)e^{-\tau} + \frac{1}{3}(t-\tau)^3 e^{-\tau} - \tau \sin x \sin(t-\tau).$$

由冲量原理

$$\tilde{u}(t,x) = \int_0^t w(t,x;\tau)d\tau = x^2(e^{-t}+t-1) + 2e^{-t} + \frac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 2 - t\sin x + \sin x \sin t.$$

从而

$$u(t,x) = u(t,x) + v(t,x) = -x^2 + x - 2 - t^2 - \sin x \sin t + x^2 t + \frac{t^3}{3} + x^2 e^{-t} + 2e^{-t} + 2t.$$

注记. 并不是一定要用冲量原理消除方程的非齐次项，如果能直接找到泛定方程的满足要求（一般是边界条件的要求）的特解是最好的。例如

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t\sin x, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t < +\infty \\ u(t,0) = 0, u(t,\pi) = 0, 0 \leq t < +\infty \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = 0, 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

我们可以取泛定方程的特解$v = t\sin x$，然后令$\tilde{u} = u - v$，得到

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx}, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t < +\infty \\ \tilde{u}(t,0) = 0, \tilde{u}(t,\pi) = 0, 0 \leq t < +\infty \\ \tilde{u}(0,x) = 0, \tilde{u}_t(0,x) = -\sin x, 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

在下一章后半段将详细讲述。

在本章的最后，我们简要介绍下特征线法。特阵线法主要求一阶偏微分方程和波动方程的通解。我们从例子出发

例子15. 设$u = u(x,y)$，求$u_x + e^y u_y = e^{-y}$ 的通解。

解. 特征方程为

$$\frac{1}{dx} = \frac{e^y}{dy}.$$

这是个常微分方程，解得：$x + e^{-y} = C$。令$\xi = x + e^{-y}$，$\eta = x$，得到

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u + \eta$$

$$u_y = -e^{-y} u_\xi.$$

带入原方程，得到$u_\eta = \xi - \eta$。从而

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= u(\xi,0) + \int_0^\eta u_\eta(\xi,s)ds = u(\xi,0) + \int_0^\eta \xi - sds \\ &= f(\xi) + \xi\eta - \frac{\eta^2}{2}. \end{aligned}$$

从而

$$u = f(x + e^{-y}) + xe^{-y} + \frac{x^2}{2}.$$

方法总结：设$u = u(x_1, \cdots, x_k$，则$\sum a_i u_{x_i} = f$ 的特征方程为

$$\frac{a_1}{dx_1} = \frac{a_2}{dx_2} = \cdots.$$

解之，做相应的变量替换，不足的补上。最后一步带入原方程，化解并求解。

二阶情形：

例子16. 设$u = u(x, y)$，求$u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = x$ 的通解。

解. 特征方程为

$$\frac{1}{(dx)^2} - \frac{3}{dxdy} + \frac{2}{(dy)^2} = 0.$$

即

$$(\frac{1}{dx} - \frac{1}{dy})(\frac{1}{dx} - \frac{1}{dy}) = 0.$$

$\frac{1}{dx} - \frac{1}{dy} = 0$ 或者$\frac{1}{dx} - \frac{2}{dy} = 0$。分别解得

$$x - y = C, \quad 2x - y = \tilde{C}.$$

设$\xi = x - y$ 和$\eta = 2x - y$，则

$$u_x = u_\xi + 2u_\eta, u_{xx} = u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}, u_{xy} = -u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta},$$

$$u_y = -u_\xi - u_\eta, u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

带入原方程，得到$u_{\xi\eta} = \xi - \eta$，解得$u_\xi = \xi\eta - \frac{\eta^2}{2} + f(\xi)$，得到

$$u = \frac{\xi^2\eta}{2} - \frac{\xi\eta^2}{2} + f(\xi) + g(\eta).$$

从而

$$u = \frac{3x^2y - 2x^3 - xy^2}{2} + f(x - y) + g(2x - y).$$

例子17. 设$u = u(x, y)$，求$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ 的通解。

解. 特征方程为

$$\frac{1}{(dx)^2} - \frac{2}{dxdy} + \frac{1}{(dy)^2} = 0.$$

即

$$(\frac{1}{dx} - \frac{1}{dy})^2 = 0.$$

$\frac{1}{dx} - \frac{1}{dy} = 0$ 解得

$$x - y = C.$$

设$\xi = x - y$ 和$\eta = x$，则

$$u_x = u_\xi + u_\eta, u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, u_{xy} = -u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta},$$

$$u_y = -u_\xi, u_{yy} = u_{\xi\xi}.$$

带入原方程，得到$u_{\eta\eta} = 0$，解得$u_\eta = f(\xi)$，得到

$$u = \eta f(\xi) + g(\xi).$$

从而

$$u = xf(x-y) + g(x-y).$$

本章重点：按题意写出定解问题；达朗贝尔公式；消除非齐次项。

作业：书本第一章回家作业4,6,7,8,10,12.

问题(四). 求方程

$$u_{xx} - 4u_{yy} = e^{2x+y}$$

的形如$u = axe^{2x+y}$的通解。

问题(六). 设$u = u(x,y,z)$，求下列方程的通解：

(1) $u_y + a(x,y)u = 0$;

(2) $u_{xy} + u_y = 0$;

(3) $u_{tt} = a^2u_{xx} + 3x^2$，设$u = u(t,x)$。

问题(七). 一根长为l具有绝缘的侧表面的均匀细杆，左端为$x = 0$，右端$x = l$，它的初始温度为$\varphi(t)$，两端满足下列边界条件之一：

(1) 左端绝热，右端保持常温u_0;

(2) 左右两端分别有热流密度q_1和q_2进入;

(3) 左端温度$\mu(t)$，右端与温度为$\theta(t)$的介质接触，热交换系数为h。

问题(八). 一根长为l两端固定的弦，用手把它的中点朝u轴正向拨开h距离，然后放手任其自由振动，写出定解问题。

问题(十). 利用叠加原理和齐次化原理求解

$$\begin{cases} u_t + au_x = f(t,x), -\infty \le x \le +\infty, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = \varphi(x), -\infty \le x \le +\infty \end{cases}$$

$a \neq 0$ 为常数。

问题(十二). 求一端固定的半无界弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, 0 \le x \le +\infty, 0 \le t < +\infty \\ u(0,x) = \sin x, u_t(0,x) = kx, 0 \le x \le +\infty \\ u(t,0) = 0, t \ge 0. \end{cases}$$